
TEORÍA DE REDES. Ejercicios Vol. I

Mario E. Salgado
Sebastián Pulgar

Departamento de Electrónica
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, CHILE

VALPARAÍSO, CHILE. 2009.

Índice general

1. REDES RESISTIVAS SIMPLES	1
1.1. Introducción	1
1.2. Redes Resistivas de tres componentes	2
1.2.1. Divisor de Tensión	2
1.2.2. Divisor de Corriente	8
1.2.3. Red con fuentes independientes de tensión y corriente . .	12
1.3. Redes Resistivas con fuentes controladas	19
1.3.1. Red de tres componentes con fuentes controladas	19
1.4. Ejercicios suplementarios	25
2. REDES DINÁMICAS SIMPLES	33
2.1. Introducción	33
2.2. Redes RC	35
2.2.1. Red RC con un condensador	35
2.2.2. Red RC con dos condensadores	39
2.2.3. Red con dos condensadores, sin resistencia	44
2.3. Redes RL	49
2.3.1. Red RL con un inductor	49
2.3.2. Red RL con dos inductores	52
3. MÉTODOS GENERALES DE ANÁLISIS.	57
3.1. Introducción	57
3.2. Método de mallas en redes resistivas.	59
3.2.1. Red resistiva con fuentes de tensión.	59
3.2.2. Red resistiva con fuentes de tensión y de corriente.	63
3.3. Método de mallas en redes dinámicas.	66
3.3.1. Red dinámica con fuentes de tensión.	66
3.3.2. Red dinámica con fuente de corriente.	70
3.3.3. Red dinámica con fuentes de corriente, de tensión y con fuentes controladas.	73
3.4. Método de nodos en redes resistivas.	75

3.4.1. Red resistiva con fuentes de corriente.	75
3.4.2. Red resistiva con fuentes con fuentes de corriente y de tensión.	79
4. REDES ELÉCTRICAS EQUIVALENTES.	81
4.1. Introducción	81
4.2. Redes resistivas	82
4.2.1. Transformaciones y movilidad de fuentes	82
4.2.2. Red resistiva con y sin fuentes controladas	85
4.3. Redes dinámicas	89
4.3.1. Equivalencias con condiciones iniciales	89
4.3.2. Redes dinámicas con fuentes independientes	96
5. ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO Y TRANSFORMADOR IDEAL	99
5.1. Introducción	99
5.2. Acoplamiento Magnético	101
5.2.1. Red de dos mallas con Acoplamiento Magnético	101
5.2.2. Acoplamiento Magnético entre tres inductores	104
5.3. Redes con Transformador Ideal	108
5.3.1. Máxima transferencia de potencia	108
5.3.2. Red con transformador ideal y fuente controlada	112
5.3.3. Red con Transformador Ideal y Acoplamiento Magnético	116
5.4. Ejercicios suplementarios	120
6. REDES ELÉCTRICAS CON EXCITACIONES SINUSOIDALES Y EN ESTADO ESTACIONARIO.	125
6.1. Introducción	125
6.2. Conceptos básicos en redes con excitaciones sinusoidales.	127
6.2.1. Red RC con un condensador. Análisis de los fenómenos transitorios.	127
6.2.2. Red RLC con fuentes controladas.	136
6.2.3. Red con fuentes de distinta frecuencia. Principio de su- perposición.	143
6.3. Potencia en redes con excitaciones sinusoidales.	152
6.3.1. Red RC con un condensador. Análisis de potencia y fenó- menos transitorios.	152
6.3.2. Redes con factor de potencia capacitivo e inductivo.	157
6.3.3. Red con acoplamiento magnético.	165
6.3.4. Corrección del factor de potencia.	172
6.4. Ejercicios suplementarios	180
Índice alfabético	187
A. Relaciones de interés.	189
A.1. Transformación estrella-triángulo	189

B. Matrices	191
B.1. Introducción	191
B.2. Conceptos básicos	191
B.3. Determinante y rango de una matriz	193
B.4. Inversa de una matriz	194

Capítulo 1

REDES RESISTIVAS SIMPLES

1.1. Introducción

En este capítulo se desarrollan ejemplos de análisis de redes resistivas. Llamamos redes resistivas a aquellas que resultan de la interconexión de fuentes independientes y de componentes cuyo Tercer Postulado se puede definir como una relación algebraica lineal entre tensiones y corrientes. Así, nuestras redes en este capítulo estarán conformadas exclusivamente por fuentes independientes, fuentes controladas lineales y resistores lineales.

La idea principal es mostrar como se pueden aplicar la ley de corrientes de Kirchoff (LCK), la ley de voltajes de Kirchoff (LVK) y el Tercer Postulado, de una forma más bien intuitiva pero de forma tal que se logre construir un modelo algebraico (sin derivadas ni integrales) lineal para la red. Este modelo debe ser consistente (igual número de ecuaciones independientes que incógnitas), y además debe permitir, a través de su solución, que permita calcular todas las corrientes y tensiones en ellas.

Un segundo foco de interés en estos problemas es afirmar los conceptos de potencia y energía en redes eléctricas, poniendo énfasis en el equilibrio de potencias instantáneas y en la dirección en que la potencia es transferida (potencia entregada y potencia recibida).

Un subproducto de este estudio, a través de ejemplos, es familiarizar al estudiante con ciertas redes que aparecen a menudo en el análisis de sistemas eléctricos. Las más interesantes son el divisor de tensiones y el divisor de corrientes.

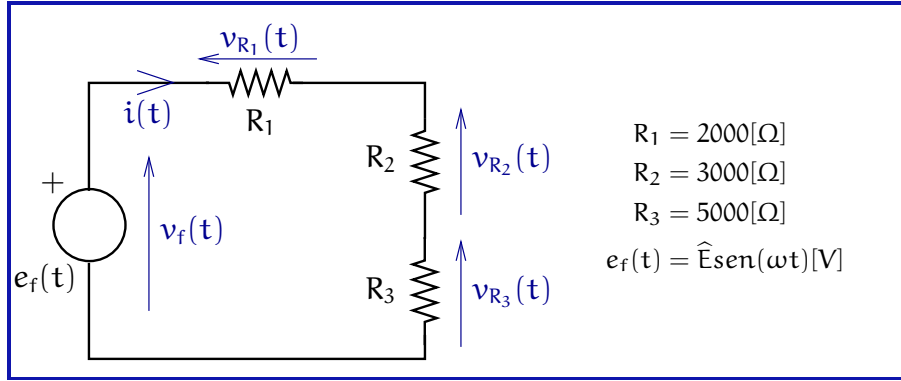
Para que el estudiante pueda obtener el máximo provecho de este estudio, se requiere que esté familiarizado con las variables básicas (tensión, corriente, potencia instantánea y energía), así como con notación y orientación de variables.

1.2. Redes Resistivas de tres componentes

1.2.1. Divisor de Tensión

Problema 1.1.

Considere la red resistiva de la figura, se trata de analizarla dada una fuente de alimentación sinusoidal, con los datos que se indican.



Utilizando $\hat{E} = 10$ y $\omega = 2 [\text{rad s}^{-1}]$, calcule

1.1.1 $i(t)$, $\forall t \geq 0$.

1.1.2 $v_{R_1}(t)$, $v_{R_2}(t)$ y $v_{R_3}(t)$, $\forall t \geq 0$.

1.1.3 La potencia instantánea en cada elemento de la red, y muestre que se cumple el teorema de Tellegen.

Solución

Estas leyes suponen que la red es concentrada, por lo que a partir de estos tres postulados se pueden deducir la conservación de la energía, y el equilibrio de potencias instantáneas (teorema de Tellegen)

Para tener una visión general del problema a tratar, es conveniente plantear las ecuaciones necesarias, en primera instancia, para verificar que el modelo matemático planteado es consistente con la realidad física del problema a tratar. Para ello se deben plantear las ecuaciones correspondientes a la Ley de Corrientes de Kirchoff (LCK), Ley de Voltajes de Kirchoff (LVK) y Ley de componentes (tercer postulado).

Dada la red bajo análisis se deduce, por LCK, que la corriente es la misma por todos los componentes. Por su parte, la LVK entrega la siguiente relación para los voltajes de los cuatro componentes

$$v_f(t) = \sum_{k=1}^3 v_{R_k}(t), \quad (1.1)$$

y a su vez la Ley de Componentes nos dice que

$$v_f(t) = e_f(t), \quad v_{R_k}(t) = R_k i(t), \quad (1.2)$$

para $k = 1, 2, 3$.

Así, al reducir el sistema de ecuaciones, reemplazando en (1.1) las relaciones anteriores, se llega a la expresión que determina la corriente en función del voltaje de la fuente de alimentación y los componentes resistivos

$$i(t) = \frac{v_f(t)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (1.3)$$

obteniéndose una expresión para la corriente, **cuando la excitación de la red es una señal sinusoidal**

$$i(t) = \frac{\hat{E}}{R_1 + R_2 + R_3} \text{sen}(\omega t). \quad (1.4)$$

La expresión literal (1.4) obtenida para la corriente, es independiente del tipo de fuente de alimentación utilizada, sea ésta constante, variable, o combinación de ambas.

Reemplazando en (1.4) los valores numéricos dados para los componentes de la red, se obtiene finalmente el valor para la corriente $\forall t \geq 0$.

$$i(t) = 1 \times 10^{-3} \text{sen}(2t) [\text{A}] = \text{sen}(2t) [\text{mA}]. \quad (1.5)$$

De la expresión literal obtenida en (1.4), se puede comentar lo siguiente:

- Por estar todas las componentes resistivas en serie, se puede notar que el denominador de esta expresión considera el equivalente resistivo de la red conectada a la fuente de alimentación.
- Se debe notar que, a diferencia de los componentes capaces de almacenar energía como condensadores e inductores, la magnitud de la corriente (valor máximo) es independiente de la frecuencia de la señal de excitación de la red, y solo depende de la magnitud de ésta, y del valor que tengan los demás componentes.
- Se observa también la relación lineal que existe entre la tensión y la corriente, por lo que se espera que bajo cualquier cambio en la fuente de alimentación, la corriente será una combinación lineal de ésta.

Sabiendo el valor de la corriente, es fácil calcular la tensión en cada uno de los resistores, ya que ésta es la misma para todos los componentes de la red. Considerando esto, y utilizando la ecuación de tercer postulado para cada resistor se obtiene que el voltaje en ellos está determinado por

$$v_{R_k}(t) = R_k i(t) = R_k \frac{v_f(t)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (1.6)$$

para $i = 1, 2, 3$.

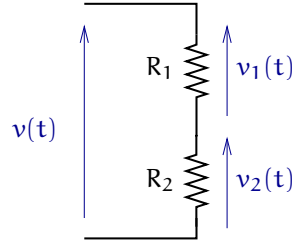
De la expresión (1.6) se puede comentar lo siguiente:

- La relación de voltajes obtenida en (1.6), es conocida como **Divisor de Tensión**, donde se observa que la tensión en cada resistor es una ponderación de la entrega por la fuente de alimentación, y para la cuales se cumple que

$$v_{R_1}(t) : v_{R_2}(t) : v_{R_3}(t) = R_1 : R_2 : R_3$$

La relación obtenida para el divisor de tensión, es exacta para redes (o subredes) donde sus componentes resistivos están en serie.

- El resultado obtenido para el divisor de tensión, se puede interpretar como una ley natural donde la tensión se divide con el fin de minimizar la potencia disipada en los elementos de la red. Esto se puede demostrar si consideramos la red sencilla



para la cual, la potencia total del conjunto está dada por

$$p(t) = \frac{v_1(t)^2}{R_1} + \frac{v_2(t)^2}{R_2} = \frac{v_1(t)^2}{R_1} + \frac{(v(t) - v_1(t))^2}{R_2}$$

utilizando la LVK.

Calculando la derivada parcial de $p(t)$ respecto a $v_1(t)$ e igualando ésta a cero, para buscar un punto mínimo de la función de potencia, se obtiene

$$\frac{\partial p(t)}{\partial v_1(t)} = \frac{2v_1}{R_1} + \frac{-2(v(t) - v_1(t))}{R_2}$$

$$v_1(t) = v(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.7)$$

Para saber si esta solución representa un punto mínimo, calculamos la segunda derivada parcial de $p(t)$ respecto a $v_1(t)$

$$\frac{\partial^2 p(t)}{\partial v_1(t)^2} = 2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

la cual es siempre mayor que cero, lo que corrobora que (1.7) es un mínimo de la función de potencia total. De igual forma se puede realizar el cálculo considerando la derivada parcial de $p(t)$ respecto a $v_2(t)$, con lo que se obtiene la solución para la tensión en R_1 .

Por lo tanto, se demuestra así que **la tensión se divide para minimizar la potencia total de la red.**

De esta forma, reemplazando los valores numéricos de las componentes se obtiene

$$v_{R_1}(t) = 2 \operatorname{sen}(2t) \text{ [V]} \quad (1.8a)$$

$$v_{R_2}(t) = 3 \operatorname{sen}(2t) \text{ [V]} \quad (1.8b)$$

$$v_{R_3}(t) = 5 \operatorname{sen}(2t) \text{ [V]} \quad (1.8c)$$

Para responder al tercer punto, es útil haber calculado la tensión y la corriente en cada componente del circuito. Considerando que estas variables tienen la forma (correspondientes a (1.5) y (1.8))

$$i(t) = \hat{i} \operatorname{sen}(\omega t) \quad v_{R_i}(t) = \hat{v}_{R_i} \operatorname{sen}(\omega t)$$

la **potencia instantánea recibida por cada resistor** está dada por

$$p_{R_k}(t) = v_{R_k}(t)i(t) = \frac{\hat{v}_{R_k}\hat{i}}{2} - \frac{\hat{v}_{R_k}\hat{i}}{2} \cos(2\omega t), \quad (1.9)$$

De forma similar, la **potencia entregada por la fuente** está dada por

$$p_{v_k}(t) = v_f(t)i(t) = \frac{\hat{E}\hat{i}}{2} - \frac{\hat{E}\hat{i}}{2} \cos(2\omega t). \quad (1.10)$$

En (1.9) y (1.10) se observa que en todos los componentes existe un término constante (correspondiente a la potencia media) y otro oscilatorio, pero que en ningún caso el valor instantáneo de la potencia es menor a cero, lo cual es totalmente coherente con el hecho que en esta red hay solo elementos de disipación de energía (resistores).

Observe también, que en ambos casos el cálculo de la potencia se realizó de la misma forma, sin embargo es necesario destacar que en el caso de la fuente de alimentación, el cálculo realizado corresponde a la **potencia entregada por la fuente** dado que las referencias para la señal de tensión y corriente no están en referencia combinada.

Considerando los resultados obtenidos en (1.9) y (1.10) se puede mostrar la equivalencia entre la potencia entregada por la fuente y la recibida por los resistores (teorema de Tellegen), tomando en cuenta que se debe cumplir

$$p_{v_f}(t) = p_{R_1}(t) + p_{R_2}(t) + p_{R_3}(t). \quad (1.11)$$

Reemplazando (1.9) y (1.10) en (1.11), y considerando las ecuaciones de tercer postulado para los resistores, se obtiene

$$\hat{E}\hat{i} - \hat{E}\hat{i} \cos(2\omega t) = \underbrace{\hat{i}(R_1 + R_2 + R_3)}_{\hat{E}} \hat{i} - \underbrace{\hat{i}(R_1 + R_2 + R_3)}_{\hat{E}} \hat{i} \cos(2\omega t), \quad (1.12)$$

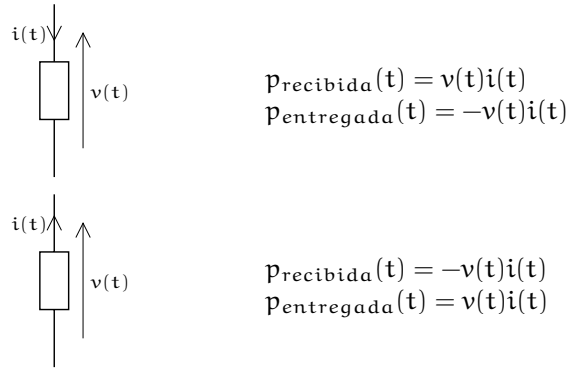
lo cual muestra el equilibrio de potencias instantáneas enunciado en el teorema de Tellegen.

Errores

Dada la simplicidad de la red, la mayor parte de los errores que se cometen, son de tipo conceptual. Señalamos a continuación aquellos más frecuentes.

Error 1 Errores en la formulación de LVK.

Error 2 Error en el cálculo de la potencia entregada (o recibida) en algún componente, debido a la utilización de referencias erróneas para las variables de tensión y corriente. Este error puede ser corregido considerando las siguientes referencias al realizar el cálculo de potencia en algún componente



Error 3 Extender la idea de linealidad que se puede aplicar al cálculo de tensiones y corrientes en el caso de resistores, al cálculo de potencias. Esto se puede explicar, ya que en el caso de estos componentes, la ley de componentes expresa una relación lineal entre la tensión y la corriente. Sin embargo para el cálculo de la potencia, se realiza el producto de estas dos variables, introduciendo así la no linealidad. Esto se puede observar suponiendo la variable de corriente, $i(t) = i_A$, para un resistor (R) donde su potencia instantánea está dada por

$$p_R(t) = i_A^2 R. \quad (1.13)$$

Si ahora consideramos $i(t) = i_A + i_B$, la potencia instantánea en el resistor será

$$p_R(t) = i_A^2 R + 2i_A i_B R + i_B^2 R. \quad (1.14)$$

Con esto se observa la presencia de la no linealidad en el cálculo de la potencia, considerando entonces

$$p_R(t) \neq i_A^2 R + i_B^2 R, \quad (1.15)$$

que sería el resultado al aplicar, erróneamente, la linealidad en el cálculo de la potencia.

Una variante de interés

Suponga la misma red, con los mismos datos para los resistores, pero con la siguiente modificación en la fuente de alimentación

$$E(t) = E_o + \hat{E} \operatorname{sen}(\omega t), \quad (1.16)$$

donde $E_o = 10 \text{ [V]}$.

La solución a esta variante pasa por notar que en (1.4) aparece un término constante en la expresión que determina la corriente, obteniéndose entonces

$$i(t) = \frac{E_o}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{\hat{E}}{R_1 + R_2 + R_3} \operatorname{sen}(\omega t). \quad (1.17)$$

Considerando esto, se puede deducir que las tensiones para cada resistor también considerarán la adición de un término constante al ya existente, lo cual se puede observar reemplazando la nueva señal de excitación en (1.6), con lo que se obtiene

$$v_{R_k}(t) = \frac{R_k E_o}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{R_k \hat{E}}{R_1 + R_2 + R_3} \operatorname{sen}(\omega t). \quad (1.18)$$

Posteriormente, el cálculo de las potencias para cada elemento se desarrolla de forma similar a (1.9) y (1.10), obteniéndose para este caso **la potencia disipada por cada resistor** como

$$p_{R_k}(t) = \frac{R_k E_o^2}{R_{eq}^2} + 2 \frac{R_k E_o \hat{E}}{R_{eq}} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{R_k \hat{E}^2}{2R_{eq}^2} - \frac{R_k \hat{E}^2}{2R_{eq}^2} \cos(2\omega t). \quad (1.19)$$

De igual forma, se obtiene **la potencia entregada por la fuente**

$$p_{R_k}(t) = \frac{E_o^2}{R_{eq}^2} + 2 \frac{E_o \hat{E}}{R_{eq}} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\hat{E}^2}{2R_{eq}^2} - \frac{\hat{E}^2}{2R_{eq}^2} \cos(2\omega t), \quad (1.20)$$

donde se ha utilizado la equivalencia

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^3 R_k.$$

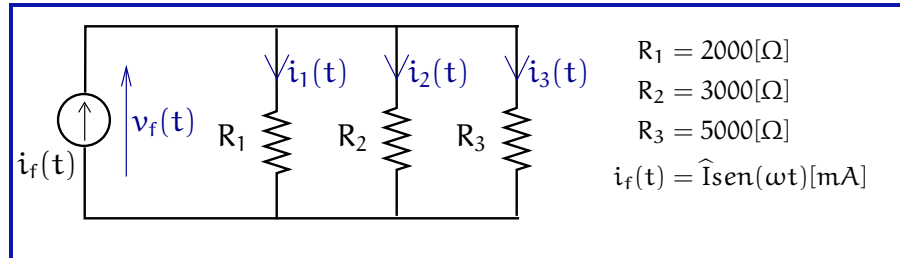
Note que en el cálculo de las potencias instantáneas para todos los elementos, aparecen nuevos términos que muestran la no linealidad en el cálculo de potencia respecto a las variables de tensión y corriente. Esto concuerda con lo discutido en la sección de errores, donde se mostró el origen de estos términos adicionales.

Finalmente, al considerar el equilibrio de potencias instantánea enunciado en (1.11), reemplazando (1.19) y (1.20) se obtiene la igualdad deseada.

1.2.2. Divisor de Corriente

Problema 1.2.

Al igual que el problema 1.1, la red de la figura contiene tres elementos resistivos. Sin embargo, la fuente de alimentación de esta red corresponde a una fuente de corriente independiente. Al analizar esta red, se obtendrá relaciones conocidas para las corrientes en los distintos componentes.



Utilizando $\hat{I} = 10$ y $\omega = 2 [\text{rad s}^{-1}]$, calcule

1.2.1 $v_f(t)$, $\forall t \geq 0$.

1.2.2 $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $\forall t \geq 0$.

1.2.3 Muestre que las potencias instantáneas en R_1 , R_2 y R_3 se relacionan según

$$p_{R_1}(t) : p_{R_2}(t) : p_{R_3}(t) = R_2 R_3 : R_1 R_3 : R_1 R_2$$

Solución

Dos o más componentes están en paralelo si y solo si siempre tienen la misma tensión.

Para resolver este problema es necesario considerar nuevamente la utilización de los tres postulados básicos del análisis de redes. Lo primero que se puede deducir al aplicarlos, es (por LVK) que las tensiones en todos los componentes son iguales, dada la conexión en paralelo de éstos

$$v_f(t) = v_1(t) = v_2(t) = v_3(t). \quad (1.21)$$

Además, la Ley de Componentes nos dice que

$$i_k = \frac{v_k(t)}{R_k} = \frac{v_f(t)}{R_k}, \quad (1.22)$$

para $k = 1, 2, 3$.

Primero, observamos que la LCK entrega la relación

$$i_f(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t), \quad (1.23)$$

para las corrientes en la red. Luego, utilizando los resultados de la LVK y la Ley de Componentes obtenidos anteriormente, se puede encontrar una relación

para el voltaje en la fuente en función de variables conocidas. Para llegar a esto, tomemos (1.22) para cada resistor R_k y reemplacémoslo en (1.23), con lo que obtenemos

$$i_f(t) = v_f(t) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (1.24)$$

Posteriormente, realizando la suma de los términos correspondientes a los resistores y despejando la variable de interés se obtiene

$$v_f(t) = i_f(t) \frac{R_1 R_2 R_3}{\tilde{R}}. \quad (1.25)$$

donde $\tilde{R} = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$.

Para obtener el resultado numérico, utilizamos los datos del enunciado, con lo que se obtiene

$$v_f(t) = 9,68 \sin(2t) \text{ [V]}.$$

Con los resultados obtenidos anteriormente, es simple calcular la corriente en cada resistor, utilizando la Ley de Componente mostrada en (1.22). Se obtiene entonces

$$i_1(t) = i_f(t) \frac{R_2 R_3}{\tilde{R}} \quad (1.26)$$

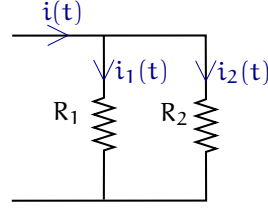
$$i_2(t) = i_f(t) \frac{R_1 R_3}{\tilde{R}} \quad (1.27)$$

$$i_3(t) = i_f(t) \frac{R_1 R_2}{\tilde{R}} \quad (1.28)$$

De las expresiones (1.26), (1.27) y (1.28) se puede comentar lo siguiente:

- Las expresiones obtenidas, son conocidas como **divisores de corriente**, ya que se obtiene una relación para la corriente en cada componente de una red (o subred) en paralelo como una ponderación de la corriente que entra a dicha red. Además, muestran una relación lineal entre la corriente de entrada a la red (o subred) y la corriente en cada componente.
- Al igual que en el problema 1.1, las relaciones obtenidas no dependen de la frecuencia angular de la señal de excitación, como en redes donde hay elementos dinámicos.
- El resultado obtenido para el divisor de corriente se puede interpretar como una ley natural donde la corriente se divide con el fin de minimizar la potencia disipada en los elementos de la red. Esto se puede demostrar si consideramos la red sencilla

La relación obtenida para el divisor de corriente, es exclusiva para redes (o subredes) donde sus componentes resistivos están conectados en paralelo, y no en serie.



para la cual, la potencia total del conjunto está dada por

$$p(t) = i_1(t)^2 R_1 + i_2(t)^2 R_2 = (i(t) - i_2(t))^2 R_1 + i_2(t)^2 R_2$$

utilizando la LCK.

Calculando la derivada parcial de $p(t)$ respecto a $i_2(t)$ e igualando ésta a cero, para buscar un punto mínimo de la función de potencia, se obtiene

$$\frac{\partial p(t)}{\partial i_2(t)} = -2(i(t) - i_2(t))R_1 + 2i_2(t)R_2 = 0$$

$$i_2(t) = i(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.29)$$

Para saber si esta solución representa un punto mínimo, calculamos la segunda derivada parcial de $p(t)$ respecto a $i_2(t)$

$$\frac{\partial^2 p(t)}{\partial i_2(t)^2} = 2(R_1 + R_2),$$

lo cual es siempre mayor que cero, lo que corrobora que (1.29) es un mínimo de la función de potencia total. De igual forma se puede realizar el cálculo considerando la derivada parcial de $p(t)$ respecto a $i_1(t)$, con lo que se obtiene la solución para la corriente en R_1 .

Por lo tanto, se demuestra así que **la corriente se divide para minimizar la potencia total de la red.**

Con los valores numéricos entregados para los elementos de la red, se obtiene los valores para $i_1(t)$, $i_2(t)$ y $i_3(t)$

$$i_1(t) = 4,84 \text{ sen}(2t) \text{ [mA]},$$

$$i_2(t) = 3,23 \text{ sen}(2t) \text{ [mA]},$$

$$i_3(t) = 1,94 \text{ sen}(2t) \text{ [mA]}.$$

Finalmente, se puede expresar la **potencia instantánea recibida** en cada resistor como

$$p_{R_1}(t) = i_f^2(t) \frac{R_2^2 R_3^2}{R^2} R_1 \quad (1.30a)$$

$$p_{R_2}(t) = i_f^2(t) \frac{R_1^2 R_3^2}{R^2} R_2 \quad (1.30b)$$

$$p_{R_3}(t) = i_f^2(t) \frac{R_1^2 R_2^2}{R^2} R_3 \quad (1.30c)$$

Con ésto, se puede escribir la relación de potencias de la forma

$$p_{R_1}(t) : p_{R_2}(t) : p_{R_3}(t) = i_f^2(t) \frac{R_2^2 R_3^2}{\tilde{R}^2} R_1 : i_f^2(t) \frac{R_1^2 R_3^2}{\tilde{R}^2} R_2 : i_f^2(t) \frac{R_1^2 R_2^2}{\tilde{R}^2} R_3 \quad (1.31)$$

la cual, simplificando factores comunes, se reduce a la relación buscada

$$p_{R_1}(t) : p_{R_2}(t) : p_{R_3}(t) = R_2 R_3 : R_1 R_3 : R_1 R_2 \quad (1.32)$$

Errores

Al desarrollar la solución a este problema se puede cometer varios errores. Los más frecuentes son

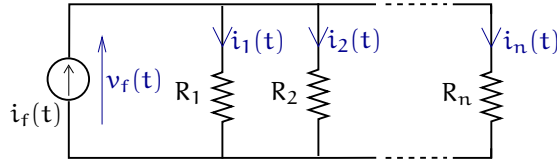
Error 1 Obtener signos erróneos al manipular las ecuaciones de LVK y LCK.

Error 2 Suponer que en una conexión en paralelo la corriente es la misma a través de todos los componentes.

Error 3 Error en el cálculo de la potencia recibida (o entregada) por un componente, dependiendo si las variables de tensión y corriente están en referencia combinada¹.

Una variante de interés

Una variante de interés para este problema, es extender los resultados obtenidos anteriormente al caso de n resistores en paralelo.



Análogo al desarrollo realizado anteriormente, por la LCK se deduce que

$$i_f(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t). \quad (1.33)$$

Además, por la LVK, se sabe que los voltajes en todos los resistores en paralelo son iguales. Por lo tanto, similar a lo obtenido en (1.24), para el caso de n resistores se tiene que

$$i_f(t) = v_f(t) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right). \quad (1.34)$$

Realizando la sumatoria correspondiente, se obtiene el voltaje presente en la fuente de corriente

¹Para mayor detalle ver Errores en problema 1.1, página 6.

$$v_f(t) = i_f(t) \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{\sum_{\ell=1}^n \left(\frac{1}{R_\ell} \prod_{k=1}^n R_k \right)}. \quad (1.35)$$

Con este resultado se puede calcular la corriente en cada resistor, utilizando la Ley de Componentes. Con ésto se tiene que

$$i_m(t) = i_f(t) \frac{\frac{1}{R_m} \prod_{k=1}^n R_k}{\sum_{\ell=1}^n \left(\frac{1}{R_\ell} \prod_{k=1}^n R_k \right)} \quad (1.36)$$

para $m = 1, 2, \dots, n$.

Tal como se expresó la relación de potencias instantáneas en (1.31), en este caso se obtiene que

$$p_{R_1} : p_{R_2} : \dots : p_{R_n} = \frac{1}{R_1} \prod_{k=1}^n R_k : \frac{1}{R_2} \prod_{k=1}^n R_k : \dots : \frac{1}{R_n} \prod_{k=1}^n R_k \quad (1.37)$$

Nótese que para el caso en que todos los elementos resistivos sean iguales, es decir $R_k = R$, (1.36) se reduce a

$$i_m(t) = i_f(t) \frac{R^{n-1}}{nR^{n-1}} = i_f(t) \frac{1}{n}, \quad (1.38)$$

lo que comprueba que al ser todos los resistores iguales, en una conexión en paralelo, la corriente se divide de igual forma para todos estos elementos. Además, (1.37) se reduce a

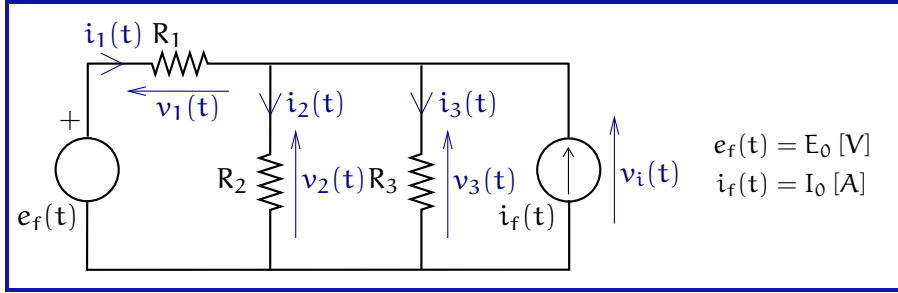
$$p_{R_1} : p_{R_2} : \dots : p_{R_n} = 1 : 1 : \dots : 1, \quad (1.39)$$

lo que muestra que al ser todos los elementos iguales, la potencia que se disipa en cada uno de ellos es la misma. Esto es coherente con lo obtenido en (1.38), ya que al tener cada resistor la misma corriente y el mismo voltaje (por estar conectados en paralelo), la potencia $p_{R_k} = i_k(t)v_f(t)$ es igual para todos los elementos.

1.2.3. Red con fuentes independientes de tensión y corriente

Problema 1.3.

En este problema se analiza una red que, a diferencia de las estudiadas anteriormente, contiene dos fuentes independientes, una de tensión y otra de corriente. En la solución a desarrollar, se determinan las condiciones bajo las cuales, las fuentes de excitación entregan (o reciben) energía a los resistores.



Para la red de la figura

1.3.1 Calcule $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ $\forall t \geq 0$, en función de $e_f(t)$ e $i_f(t)$.

1.3.2 Suponiendo que $I_0 > 0$, ¿qué relaciones deben satisfacer E_0 , I_0 , R_1 , R_2 y R_3 , para que ambas fuentes entreguen energía?.

Solución

Consideremos nuevamente los tres postulados básicos del análisis de redes, y escribamos las ecuaciones que de ellos se deducen, para estudiar la red propuesta.

Primero, la LCK nos entrega la relación

$$i_1(t) + i_f(t) = i_2(t) + i_3(t). \quad (1.40)$$

Luego, la LVK nos dice que

$$e_f(t) = v_1(t) + v_2(t), \quad (1.41)$$

$$v_2(t) = v_3(t) = v_i(t). \quad (1.42)$$

Utilizando las ecuaciones de Tercer Postulado para los resistores, podemos obtener las relaciones necesarias para calcular $i_1(t)$. Así, de (1.41), se deduce que

$$i_2(t) = \frac{e_f(t) - i_1(t)R_1}{R_2}. \quad (1.43)$$

También, de (1.42) se obtiene

$$i_2(t)R_2 = i_3R_3 \quad \Rightarrow \quad i_3(t) = i_2(t)\frac{R_2}{R_3}, \quad (1.44)$$

lo cual se puede deducir también, al considerar el **divisor de corriente** formado por R_2 y R_3 , lo que entrega la expresión

$$i_2(t) = (i_1(t) + i_f(t))\frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{(i_1(t) + i_f(t))}{R_2 + R_3} = \frac{i_2(t)}{R_3}.$$

Reemplazando esta relación en la ecuación para $i_3(t)$ dada por el divisor de corriente, se obtiene (1.44)

$$i_3(t) = (i_1(t) + i_f(t)) \frac{R_2}{R_2 + R_3} \Rightarrow i_3(t) = i_2(t) \frac{R_2}{R_3}.$$

Utilizamos los resultados obtenidos, reemplazando (1.44) y (1.43) en (1.40), para llegar a una expresión que relacione $i_1(t)$ solo con términos conocidos. De esta forma, se tiene que

$$i_1(t) + i_f(t) = \frac{e_f(t) - i_1(t)R_1}{R_2} + \frac{e_f(t) - i_1(t)R_1}{R_2} \frac{R_2}{R_3},$$

lo que se puede reducir finalmente a

$$i_1(t) = (e_f(t)(R_2 + R_3) + i_f(t)(R_2 R_3)) \frac{1}{\tilde{R}}, \quad (1.45)$$

donde $\tilde{R} = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$.

Para obtener $i_2(t)$, sigamos un procedimiento similar al realizado anteriormente para $i_1(t)$. Para ello, despejemos $i_1(t)$ desde (1.41) usando las relaciones de Tercer Postulado para R_1 y R_2 . Obtenemos entonces

$$i_1(t) = \frac{e_f(t) - i_2(t)R_2}{R_1}. \quad (1.46)$$

Reemplazando (1.44) y (1.46) en (1.40), se tiene

$$\frac{e_f(t) - i_2(t)R_2}{R_1} + i_f(t) = i_2(t) + i_2(t) \frac{R_2}{R_3},$$

lo que se reduce finalmente a

$$i_2(t) = (e_f(t) + R_1 i_f(t)) \frac{R_3}{\tilde{R}}. \quad (1.47)$$

Para el cálculo de $i_3(t)$, utilicemos la relación mostrada en (1.44) y reemplacemos (1.47) en ella. Obtenemos así la expresión para la corriente en R_3

$$i_3(t) = (e_f(t) + R_1 i_f(t)) \frac{R_2}{\tilde{R}}. \quad (1.48)$$

A partir de las expresiones (1.45), (1.47) y (1.48) se puede hacer los siguientes comentarios:

- En las tres expresiones se puede observar como se estructura la expresión para cada corriente, es decir, aparece la forma en que ellas dependen de ambas fuentes. Esto es coherente con el hecho que **la red es lineal**, y por lo tanto, las variables de tensión y corriente en cada componente de la red se pueden calcular como una combinación lineal de los efectos que produce cada señal de excitación.

- Las expresiones (1.47) y (1.48) se pueden relacionar usando el concepto del **divisor de corriente**, visto anteriormente en el problema 1.2, donde la corriente $\tilde{i}(t)$ que entra al conjunto de resistores en paralelo es

$$\tilde{i}(t) = (e_f(t) + R_1 i_f(t)) \frac{R_2 + R_3}{\tilde{R}}$$

De las expresiones obtenidas para la corriente en cada resistor de la red, se puede observar qué condiciones debe cumplir $e(t) = E_0$ para que ambas fuentes entreguen energía al sistema.

Para comenzar el análisis, se debe tener en cuenta que

$$i(t) = I_0 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Considerando esto, para que la fuente de corriente entregue energía, la tensión $v_i(t)$ debe ser positiva y mayor que cero en el intervalo analizado. Dado que este elemento está conectado en paralelo con R_2 y R_3 , es necesario y suficiente que la corriente en ellos sea positiva. De (1.47) y (1.48), esto se puede expresar como

$$i_2(t), i_3(t) > 0 \Rightarrow e_f(t) + R_1 i_f(t) > 0.$$

Se deduce entonces, que E_0 debe cumplir con la siguiente condición, para que la fuente de corriente entregue energía al sistema

$$E_0 > -R_1 I_0 \quad (1.49)$$

Para saber si esta condición satisface también el requerimiento sobre la fuente de tensión, es necesario analizar las condiciones bajo las cuales este elemento entregaría energía al sistema. Así, es necesario y suficiente que el producto $e_f(t)i_1(t)$ sea mayor que cero, con lo que estaremos asegurando que la potencia entregada por la fuente sea siempre positiva. Para cumplir con esta condición, suponiendo que $i_1(t) > 0$, de (1.45) se obtiene para E_0

$$e_f(t)(R_2 + R_3) > i_f(t)(R_2 R_3) \Rightarrow E_0 > I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (1.50)$$

De igual forma, si suponemos $i_1(t) < 0$, de (1.45) se tiene que

$$e_f(t)(R_2 + R_3) < i_f(t)(R_2 R_3) \Rightarrow E_0 < I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (1.51)$$

Por lo tanto, con los resultados obtenidos en (1.49), (1.50) y (1.51), se puede concluir que el rango de valores para E_0 que hace que ambas fuentes entreguen energía al sistema es

$$\boxed{-R_1 I_0 < E_0 < I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{y} \quad E_0 > I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.} \quad (1.52)$$

Del resultado obtenido para el rango de valores mostrado en (1.52), se puede comentar lo siguiente:

Las referencias utilizadas para ambas fuentes no están en referencia combinada, considerando para el cálculo de la potencia entregada por el elemento, el producto $v_i(t)i_f(t)$.

- El valor

$$E_0 = I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \quad (1.53)$$

no se ha considerado dentro del intervalo solución, ya que para este valor, la fuente de tensión no entregaría energía al sistema. Esto se puede observar al reemplazar (1.53) en (1.45), con lo que se obtiene $i_1(t) = 0$. De esta forma, la corriente por la fuente de tensión es cero, y por lo tanto la potencia que entrega a la red también.

- El límite inferior del rango encontrado,

$$E_0 = -R_1 I_0, \quad (1.54)$$

no se ha incluido dentro de los valores posibles como solución, ya que para este valor de E_0 , la tensión en R_2 , R_3 y la fuente de corriente es cero. Así, la potencia entregada hacia la red por la fuente de corriente sería cero.

Errores

Al desarrollar la solución a este problema se puede cometer varios errores. Los más frecuentes son

Error 1 Obtener resultados inconsistentes al tener signos erróneos producto de la incorrecta manipulación de las ecuaciones de LVK y LCK. Por ejemplo, al utilizar el Tercer Postulado y despejar $i_2(t)$, de (1.41), de la forma

$$i_2(t) = \frac{e_f(t) + i_1 R_1}{R_2}.$$

Reemplazando esta relación, y (1.44), en (1.40) se obtiene

$$i_1(t) = (e_f(t)(R_2 + R_3) + i_f(t)(R_2 R_3)) \frac{1}{\tilde{R}},$$

donde $\tilde{R} = R_2 R_3 - R_1 R_3 - R_1 R_2$, lo cual puede ser negativo para ciertos valores de R_1 , R_2 y R_3 . Esto puede generar un equivalente resistivo negativo, lo que es inconsistente con la realidad física de la red.

Error 2 Aplicar mal la LVK y la LCK, obteniendo como resultado que en una conexión en paralelo la corriente es siempre la misma a través de todos los componentes. Esto se puede ejemplificar, considerando el problema analizado, como

$$i_2(t) = i_3(t) \Rightarrow v_2(t) = v_3(t) \frac{R_2}{R_3},$$

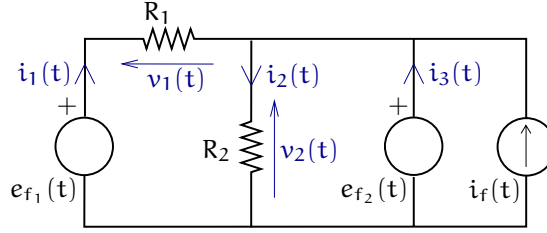
lo cual es erróneo.

Error 3 Error en el cálculo de la potencia recibida (o entregada) por un componente, dependiendo si las variables de tensión y corriente están en referencia combinada².

²Para mayor detalle ver Errores en problema 1.1, página 6.

Una variante de interés

Una variante interesante de analizar, es resolver el problema anterior reemplazando R_3 , por una fuente de tensión, $e_{f_2}(t)$. Al realizar este cambio, veremos que variables de la red se ven afectadas cuando una fuente de tensión y una fuente de corriente se conectan en paralelo. La siguiente figura muestra la red bajo estudio,



donde $e_{f_1}(t) = E_1$, $e_{f_2}(t) = E_2$ e $i_f(t) = I_0$, y para la cual obtenemos, aplicando la LVK, las siguientes relaciones para las tensiones en los elementos

$$v_2(t) = e_{f_2}(t) \quad v_1(t) = e_{f_1}(t) - v_2(t) = e_{f_1}(t) - e_{f_2}(t). \quad (1.55)$$

Utilizando (1.55) y el Tercer Postulado para R_2 , tenemos que la corriente por este elemento es

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} = \frac{e_{f_2}(t)}{R_2}. \quad (1.56)$$

De igual forma que lo anterior, calculamos la corriente por R_1 . Utilizando (1.55) y el Tercer Postulado para este resistor, obtenemos

$$i_1(t) = \frac{v_1(t)}{R_1} = \frac{e_{f_1}(t) - e_{f_2}(t)}{R_1}. \quad (1.57)$$

Dadas las referencias mostradas en la figura, sabemos que la potencia entregada por la fuente de tensión $e_{f_1}(t)$, está dada por

$$p_{e_{f_1}}(t) = e_{f_1}(t)i_1(t),$$

por lo que, considerando (1.57), este elemento entregará potencia a la red solo si

$$e_{f_1}(t) > e_{f_2}(t) \quad \Rightarrow \quad E_1 > E_2.$$

De la figura podemos deducir, usando la LCK, que la corriente entregada por la fuente de tensión $e_{f_2}(t)$ se puede calcular como

$$i_3(t) = i_2(t) - i_1(t) - i_f(t) = \frac{e_{f_2}(t)}{R_{eq}} - \frac{e_{f_1}(t)}{R_1} - i_f(t), \quad (1.58)$$

donde

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Por lo tanto, de (1.58), deducimos que la potencia entregada por $e_{f_2}(t)$ será positiva si

$$\frac{E_2}{R_{eq}} - \frac{E_1}{R_1} > I_0 \quad (1.59)$$

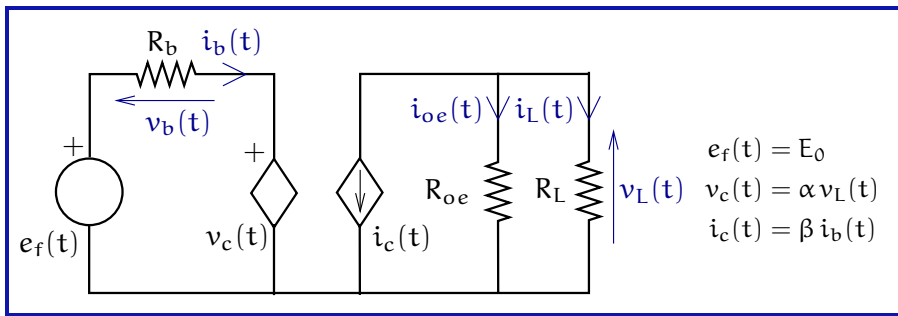
Del análisis anterior podemos concluir que las variables $i_1(t)$ e $i_2(t)$ no dependen de la fuente de corriente $i_f(t)$, ya que estas se ven afectadas solo por los valores que tomen E_1 y E_2 . Sin embargo, $i_f(t)$ influye en la corriente que entrega la fuente de tensión $e_{f_2}(t)$, es decir, la potencia que desarrolla este elemento puede ser negativa, positiva o cero, dependiendo del valor de I_0 , lo cual no afecta el comportamiento de la red en los resistores R_1 y R_2 .

1.3. Redes Resistivas con fuentes controladas

1.3.1. Red de tres componentes con fuentes controladas

Problema 1.4.

En este problema se analiza un sistema compuesto por una fuente de tensión independiente y dos fuentes controladas (una de tensión y otra de corriente) además de los elementos resistivos, donde es de interés el estudio de la potencia asociada a las fuentes controladas, bajo el concepto de amplificación de potencia.



Para la red de la figura

- 1.4.1** Suponiendo $R_b, R_{oe}, R_L > 0$, determine las condiciones sobre α y β , para que la potencia disipada en R_L sea mayor a la entregada por la fuente de tensión $e_f(t)$.
- 1.4.2** Calcule $i_b(t)$, $v_L(t)$, la potencia disipada en R_L , y la potencia entregada en cada fuente (independiente y controladas) sabiendo que: $R_b = 10[\text{K}\Omega]$, $R_{oe} = 100[\text{K}\Omega]$, $R_L = 1[\text{K}\Omega]$, $\alpha = 0,01[\text{V/V}]$, $\beta = 100[\text{A/A}]$ y $E_0 = 5[\text{V}]$.

Solución

Para desarrollar la solución a este problema, es necesario identificar las variables que intervienen en el cálculo de la potencia disipada en R_L y la potencia entregada por la fuente de tensión $e_f(t)$. La idea a seguir, considera obtener la expresión para estas cantidades, en función de los parámetros α y β . De esta forma, se podrá obtener una relación entre estos parámetros a partir de las expresiones de potencia mencionadas anteriormente.

Para la fuente de tensión independiente, $e_f(t)$, las variables que definen su potencia son $e_f(t)$ e $i_b(t)$. Por definición, $e_f(t)$ tiene un valor constante igual a E_0 . Por lo tanto, falta por encontrar la expresión para la corriente que entrega esta fuente, en función de los parámetros α y β . Consideremos entonces, la LVK que resulta al aplicarse en la malla que contiene la fuente

$$e_f(t) = v_b(t) + v_c(t). \quad (1.60)$$

Utilizando el Tercer Postulado para R_b y ley que define a $v_c(t)$, en (1.60), obtenemos

$$i_b(t) = \frac{e_f(t) - \alpha v_L(t)}{R_b}. \quad (1.61)$$

Si bien, (1.61) entrega una relación entre $i_b(t)$ y α , es necesario buscar la relación que tiene esta variable con el parámetro β , sabiendo que (al observar la red de la figura) $v_L(t)$ depende de $i_c(t)$, la cual es una función de β e $i_b(t)$. Entonces, podemos encontrar la relación buscada aplicando el **divisor de corriente** a la malla que contiene la fuente de corriente controlada

$$v_L(t) = -\beta R_{eq} i_b(t), \quad (1.62)$$

donde se ha utilizado el Tercer Postulado para la fuente de corriente controlada, $i_c(t) = \beta i_b(t)$, y la definición

$$R_{eq} = \frac{R_{oe} R_L}{R_{oe} + R_L}.$$

Reemplazando (1.62) en (1.61), y despejando la variable de interés de la expresión resultante, se obtiene que la corriente por la fuente de tensión independiente esta dada por

$$i_b(t) = e_f(t) \frac{1}{R_b - \alpha \beta R_{eq}}. \quad (1.63)$$

Teniendo el resultado mostrado en (1.63), podemos encontrar la expresión que define la potencia entregada por la fuente de tensión $e_f(t)$,

$$p_{e_f} = e_f(t) i_b(t),$$

tomando en cuenta que el valor de tensión para esta fuente es E_0 . Se obtiene entonces

$$p_{e_f}(t) = E_0^2 \frac{1}{R_b - \alpha \beta R_{eq}}. \quad (1.64)$$

Obtenido el resultado anterior, resta por encontrar la expresión que define la potencia en R_L . Para esto, consideremos (1.62) y el Tercer Postulado de R_L , con lo que se obtiene

$$i_L(t) = -\beta \frac{R_{eq}}{R_L} i_b(t). \quad (1.65)$$

Reemplazando (1.63) en (1.65) obtenemos la expresión para la corriente por R_L

$$i_L(t) = -e_f(t) \frac{\beta R_{eq}}{R_L(R_b - \alpha \beta R_{eq})}. \quad (1.66)$$

Con los resultados anteriores, podemos calcular la potencia disipada en R_L , sabiendo que esta está dada por la expresión

$$p_{R_L}(t) = i_L^2(t) R_L,$$

con lo que se obtiene

$$p_{R_L}(t) = E_0^2 \frac{\beta^2 R_{eq}^2}{R_L} \frac{1}{(R_b - \alpha \beta R_{eq})^2}. \quad (1.67)$$

De las expresiones (1.64) y (1.67) se puede comentar lo siguiente:

- La potencia entregada por la fuente de tensión, puede ser positiva o negativa dependiendo de los valores que tomen los parámetros α y β , en relación a los resistores de la red. *El signo de $p_{e_f}(t)$, determina finalmente si la fuente de tensión está entregando o recibiendo energía.*
- La expresión (1.67) muestra que la potencia disipada en R_L es siempre positiva, independiente de los valores que tomen α y β , lo cual es coherente con el hecho que un elemento resistivo en ningún caso es capaz de entregar energía a una red.
- Dado que la única fuente de alimentación de la red es $e_f(t)$, es necesario que esta entregue energía a la red. Por lo tanto, para que la potencia entregada por la fuente de tensión independiente sea positiva ($p_{e_f}(t) > 0$ en (1.64)) se debe cumplir:

- para $\beta > 0$

$$\alpha < \frac{R_b}{\beta R_{eq}}, \quad (1.68)$$

- para $\beta < 0$

$$\alpha > \frac{R_b}{\beta R_{eq}}. \quad (1.69)$$

- El problema analizado aquí, corresponde a un modelo simplificado de un circuito transistorizado, en cual se busca amplificar la potencia entre dos partes de una red.

Comparando las expresiones obtenidas para las potencias en los elementos de interés, (1.64) y (1.67), podemos deducir que la potencia disipada en R_L es mayor a la entregada por la fuente de tensión $e_f(t)$ si se cumple que

$$p_{R_L} > p_{e_f} \Rightarrow \beta^2 R_{eq}^2 > R_L (R_b - \alpha \beta R_{eq}) \quad (1.70)$$

Manipulando algebraicamente (1.70), y considerando las condiciones (1.68) y (1.69), se obtiene finalmente la relación que debe cumplirse entre los parámetros de las fuentes controladas:

- para $\beta > 0$

$$\frac{R_b}{\beta R_{eq}} - \frac{\beta R_{eq}}{R_L} < \alpha < \frac{R_b}{\beta R_{eq}}, \quad (1.71)$$

- para $\beta < 0$

$$\frac{R_b}{\beta R_{eq}} < \alpha < \frac{R_b}{\beta R_{eq}} - \frac{\beta R_{eq}}{R_L}. \quad (1.72)$$

Con los resultados obtenidos, podemos calcular los valores numéricos de las variables $i_b(t)$, $v_L(t)$, la potencia disipada en R_L , y la potencia entregada en cada fuente. Para ello, utilicemos (1.63) para calcular la corriente que entrega la fuente independiente. Obtenemos así

$$i_b(t) = 0,56 \text{ [mA]}.$$

Para determinar $v_L(t)$, utilicemos (1.66) y el Tercer Postulado para R_L . Con esto tenemos que

$$v_L(t) = -e_f(t) \frac{\beta R_{eq}}{R_b - \alpha \beta R_{eq}} = -54,95 \text{ [V]}. \quad (1.73)$$

La **potencia disipada** por R_L la calculamos utilizando (1.67), obteniendo

$$p_{R_L}(t) = 3,02 \text{ [W]}. \quad (1.74)$$

La potencia entregada por la fuente independiente, la calculamos usando (1.64), obteniendo

$$p_{e_f}(t) = 2,77 \text{ [mW]}.$$

La potencia se ha definido con el signo negativo, ya que las variables involucradas en el cálculo, no están definidas en referencia combinada.

La **potencia entregada** por la fuente de tensión controlada por tensión, está dada por

$$p_{v_c}(t) = -v_c(t) i_b(t) = -\alpha v_L(t) i_b(t). \quad (1.75)$$

Reemplazando en (1.75) las expresiones literales obtenidas en (1.73) para $v_L(t)$, y en (1.63) para $i_b(t)$, obtenemos la relación buscada

$$p_{v_c}(t) = E_0^2 \frac{\alpha \beta R_{eq}}{(R_b - \alpha \beta R_{eq})^2} = 0,31 \text{ [mW]}.$$

Finalmente, calculemos la **potencia entregada** por la fuente de corriente controlada por corriente, definida como

$$p_{i_c}(t) = -v_L(t)i_c(t) = -\beta v_L(t)i_b(t), \quad (1.76)$$

reemplazando en (1.76) las expresiones literales obtenidas en (1.73) para $v_L(t)$, y en (1.63) para $i_b(t)$. De esta forma obtenemos

$$p_{i_c}(t) = E_0^2 \frac{\beta^2 R_{eq}}{(R_b - \alpha \beta R_{eq})^2} = 3,05 \text{ [W]}.$$

Note que los valores de α y β utilizados en los cálculos anteriores, satisfacen la relación (1.71), lo cual lleva a que la potencia disipada por R_L sea mayor que la potencia entregada por $e_f(t)$. Podemos comprobar esto, comparando los resultados obtenidos en (1.74) y (1.75).

La potencia se ha definido con el signo negativo, ya que las variables involucradas en el cálculo, no están definidas en referencia combinada.

Errores

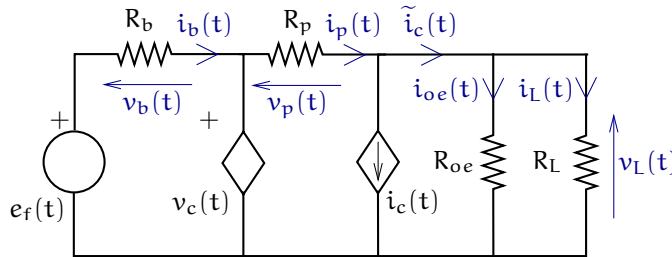
Al desarrollar la solución a este problema se puede cometer varios errores. Los más frecuentes son

Error 1 Errores al plantear las ecuaciones de la LVK y la LCK.

Error 2 Error en el cálculo de potencias asociadas a elementos cuyas variables de tensión y corriente no han sido definidas en referencia combinada. Para mayor detalle ver Errores en problema 1.1, página 6.

Una variante de interés

Una variante al problema analizado anteriormente, es calcular nuevamente los valores de las señales $i_b(t)$ y $v_L(t)$ considerando ahora la conexión entre las dos mallas, utilizando el resistor R_p como se muestra a continuación



La expresión obtenida en (1.61) para $i_b(t)$, se mantiene en esta red. Sin embargo, la expresión obtenida en (1.62) para $v_L(t)$ ya no es válida, porque no se puede aplicar el divisor de corriente como se hizo anteriormente. Para aplicarlo en este caso, usaremos la variable auxiliar $\tilde{i}_c(t)$, para la cual es posible aplicar el divisor de corriente directamente, obteniéndose

$$i_L(t) = \tilde{i}_c(t) \frac{R_{eq}}{R_L} \Rightarrow v_L(t) = \tilde{i}_c(t) R_{eq}. \quad (1.77)$$

Para poder obtener la expresión que define a $v_L(t)$ en esta red, consideremos la LCK

$$i_p(t) = \tilde{i}_c(t) + i_c(t),$$

la cual se puede escribir como

$$v_L(t) \frac{\alpha - 1}{R_p} = \tilde{i}_c(t) + i_c(t), \quad (1.78)$$

utilizando el Tercer Postulado para R_p , y sabiendo que

$$v_p(t) = v_c(t) - v_L(t) = \alpha v_L(t) - v_L(t).$$

Despejando la variable de interés $\tilde{i}_c(t)$, en (1.78), y reemplazándola en (1.77), se tiene que

$$v_L(t) = -i_b(t) \frac{\beta R_{eq} R_p}{R_p - (\alpha - 1) R_{eq}}. \quad (1.79)$$

Utilizando (1.79) en (1.61), se obtiene la expresión para la corriente que entrega la fuente de tensión independiente

$$i_b(t) = e_f(t) \frac{1 - (\alpha - 1) \frac{R_{eq}}{R_p}}{R_b \left(1 - (\alpha - 1) \frac{R_{eq}}{R_p} \right) - \alpha \beta R_{eq}}. \quad (1.80)$$

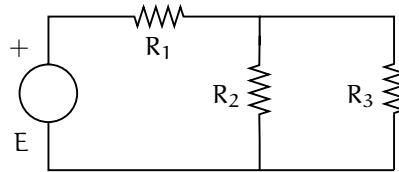
Para deducir la expresión para la tensión $v_L(t)$, reemplacemos (1.80) en (1.79). Con esto se obtiene

$$v_L(t) = -e_f(t) \frac{\beta R_{eq}}{R_b \left(1 - (\alpha - 1) \frac{R_{eq}}{R_p} \right) - \alpha \beta R_{eq}}. \quad (1.81)$$

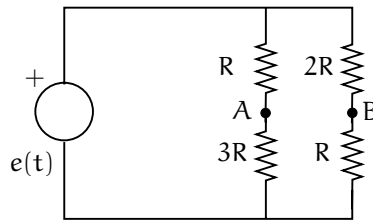
Podemos ver que (1.80) y (1.81) se reducen a (1.63) y (1.73), respectivamente, si consideramos valores grandes para R_p . Esto es equivalente a despreciar la resistencia de pérdida R_p , en el modelo del transistor utilizado en esta variante. Así, realizando esta simplificación, obtenemos la red analizada en el ejercicio principal.

1.4. Ejercicios suplementarios

Problema 1.5. En la red de la figura, calcule la potencia media en R_3 , para $E = 10$ [V], $R_1 = 1$ [K Ω], $R_2 = 2$ [K Ω], $R_3 = 3$ [K Ω].



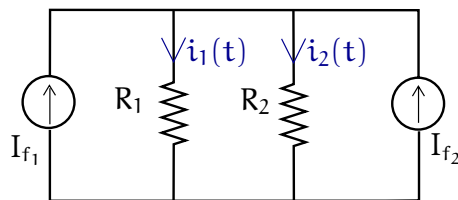
Problema 1.6. En la red de la figura, calcule $V_{AB}(t)$ como función de $e(t)$.



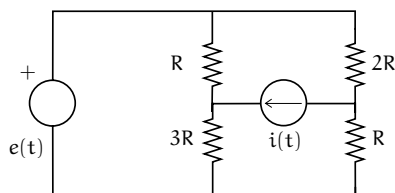
Problema 1.7. Suponga la misma red del problema 1.1 los resistores tienen una resistencia con tolerancia de $\pm 10\%$ del valor nominal. ¿Cuál es la máxima amplitud, y la mínima amplitud que se puede esperar en la tensión en R_2 ?

Problema 1.8. En la red de la figura, calcule $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para $R_1 = 2$ [K Ω], $R_2 = 3$ [K Ω], y

- $I_{f1} = 10$ [mA] y $I_{f2} = 10$ [mA].
- $I_{f1} = 10$ [mA] y $I_{f2} = -10$ [mA].

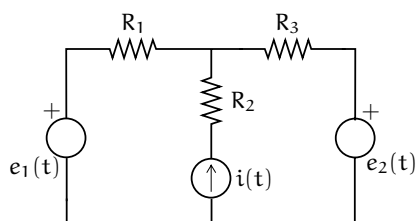


Problema 1.9. Para la red de la figura, calcule la tensión en la fuente de corriente, si $R = 1$ [K Ω], $e(t) = 10$ [V] e $i(t) = 10$ [mA].

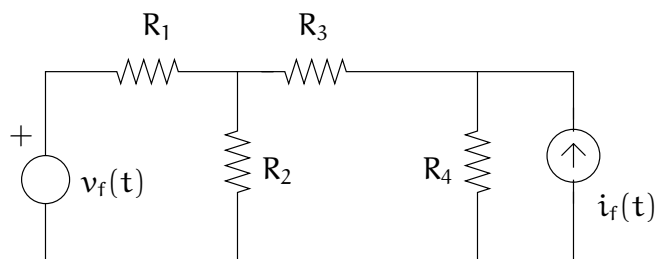


Problema 1.10. Para la red de la figura, calcule la potencia entregada por cada fuente, si:

$e_1(t) = 5 [V]$, $e_2(t) = 10 [V]$, $i(t) = 10 [mA]$, $R_1 = R_2 = 2 [K\Omega]$ y $R_3 = 3 [K\Omega]$.



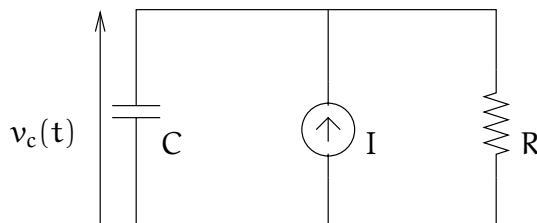
Problema 1.11. En la red de la figura se sabe que $R_1 = R_2 = 1000$, $R_3 = R_4 = 2000$, $v_f(t) = 10 \forall t \geq 0$



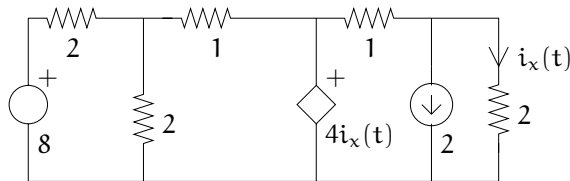
1.11.1 Si $i_f(t) = -0,01 \forall t \geq 0$, ¿qué potencia es entregada o consumida por cada una de las fuentes?

1.11.2 Si pudiese elegir el valor de $i_f(t)$, ¿qué valor elegiría para que R_3 NO consuma potencia?

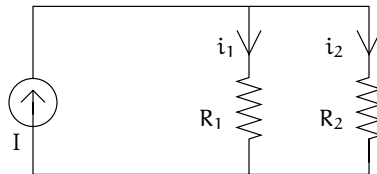
Problema 1.12. En la red de la figura se sabe que $I = 0,5 \forall t \geq 0$, $v_c(0) = 4$, $R = 100$, $C = 2 \times 10^{-6}$. Calcule, si existe, el instante $t_1 > 0$ tal que $v_c(t_1) = 20$.



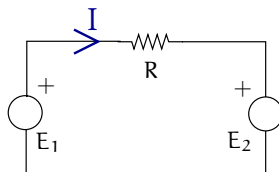
Problema 1.13. En la red de la figura calcule la potencia entregada o recibida (indique de cuál caso se trata) por la fuente controlada de tensión.



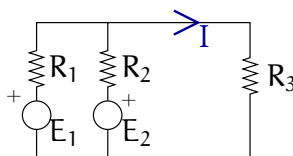
Problema 1.14. Considere la red resistiva de la figura. Suponga que $0 < I < \infty$, y que $i_1 = 2i_2$. Calcule, si es posible, la nueva relación entre i_1 e i_2 cuando R_1 sube al doble de su valor original.



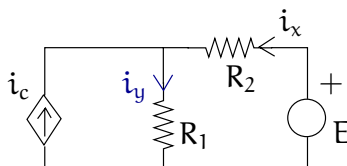
Problema 1.15. Considere la red de la figura donde $0 < R < \infty$. Determine las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer E_1 y E_2 , para que ambas fuentes entreguen energía



Problema 1.16. Considere la red de la figura, donde $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ [K}\Omega\text{]}$, $E_1 = E_2 = 6 \text{ [V]}$. Calcule la potencia suministrada por cada una de las fuentes.



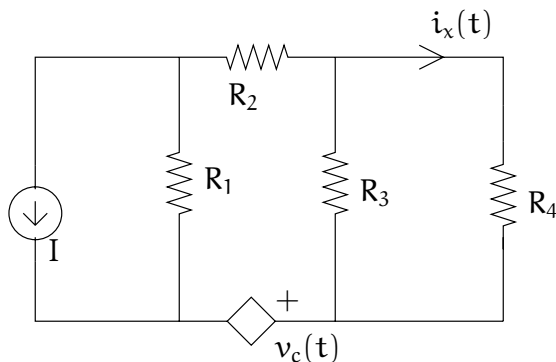
Problema 1.17. Considere la red de la figura, donde $i_c = 3i_x$, $E = 6 \text{ [V]}$, $R_1 = 1 \text{ [K}\Omega\text{]}$ y $R_2 = 2 \text{ [K}\Omega\text{]}$. Calcule la potencia entregada o recibida por la fuente controlada. Indique de cuál de los dos casos se trata.



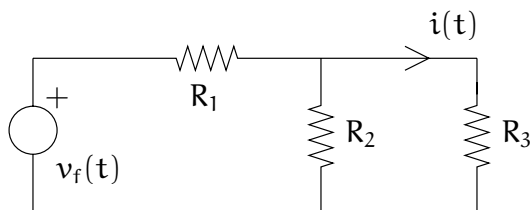
Problema 1.18. Considere la red de la figura, donde las fuentes son constantes $\forall t \geq 0$. Los datos son

$I = 2 \cdot 10^{-3} [\text{A}]$, $R_1 = R_3 = R_4 = 2000 [\Omega]$, $R_2 = 1000 [\Omega]$, $v_c(t) = 800i_x(t)$. Valores de variables en sistema internacional de unidades.

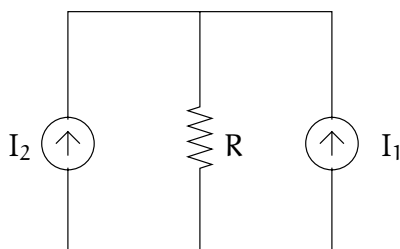
Calcule la potencia entregada o recibida por la fuente controlada, indicando de cuál de los dos casos se trata.



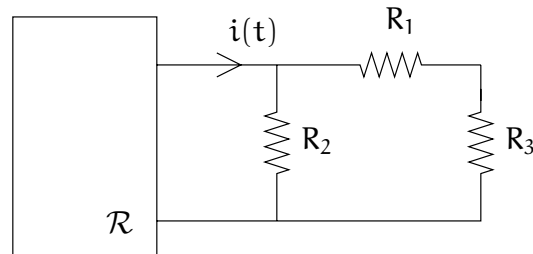
Problema 1.19. Considere la red de la figura, donde $R_1 = 4 [\text{K}\Omega]$, $R_2 = 2R_3 = 2 [\text{K}\Omega]$, $v_f(t) = 11 [\text{V}]$, $\forall t \geq 0$. Calcule $i(t)$.



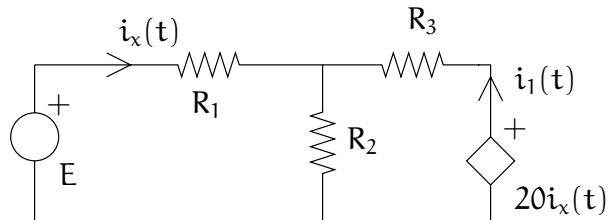
Problema 1.20. Considere la red de la figura, donde $0 < R < \infty$, I_1 e I_2 son constantes no nulas. ¿Qué condiciones deben cumplir I_1 e I_2 para que ambas fuentes entreguen potencia?



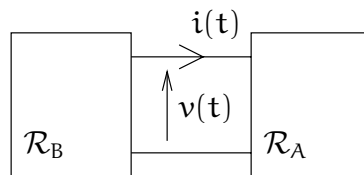
Problema 1.21. Considere la red de la figura, donde $R_1 = 1 \text{ [K}\Omega\text{]}$, $R_2 = 2 \text{ [K}\Omega\text{]}$ y $R_3 = 3 \text{ [K}\Omega\text{]}$. ¿Cuál de las tres resistencias consume más potencia ?



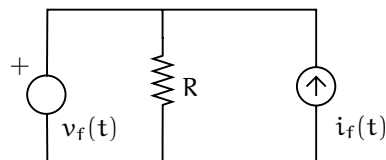
Problema 1.22. Considere la red de la figura, donde $i_1 = 40 \text{ [mA]}$, $R_1 = 3 \text{ [K}\Omega\text{]}$, $R_2 = 2 \text{ [K}\Omega\text{]}$ y $R_3 = 1 \text{ [K}\Omega\text{]}$. Calcule i_x .



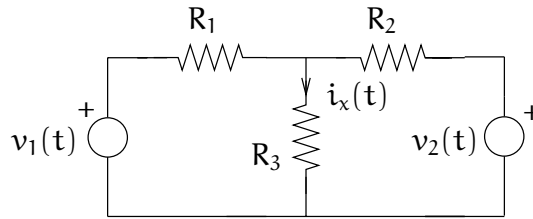
Problema 1.23. Considere la red de la figura donde $i(t) = 8 \cos(10t) \text{ [A]}$, $v(t) = 5 \cos(10t) \text{ [V]}$. Calcule la potencia promedio recibida por la red $\mathcal{R}_A$.



Problema 1.24. Considere la red de la figura, donde $R = 2 \text{ [}\Omega\text{]}$, $v_f(t) = 6 \text{ [V]}$, $\forall t \geq 0$ Calcule el valor (constante) de $i_f(t)$, si existe, de modo que las dos fuentes entreguen potencia.

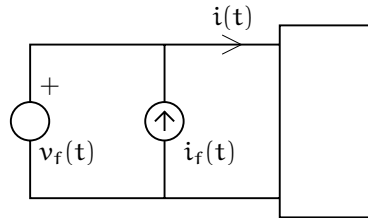


Problema 1.25. Considere la red de la figura.



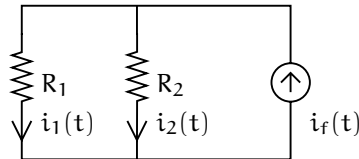
Dé argumentos a favor o en contra de la siguiente afirmación: si el valor de ambas fuentes se duplica, entonces $i_x(t)$ se reduce a la mitad.

Problema 1.26. Considere la red de la figura



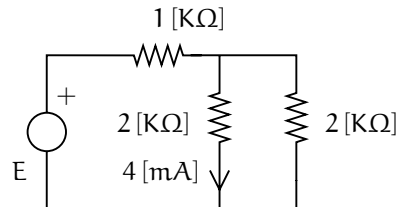
Se sabe que en la red todas las fuentes son de valor constante, con $v_f(t) = -5 \text{ [V]}$, $i_f(t) = 0,5 \text{ [A]}$ e $i(t) = 0,8 \text{ [A]}$, $\forall t \geq 0$. La fuente de tensión ¿entrega o absorbe potencia? y ¿cuánta?

Problema 1.27. Considere la red de la figura



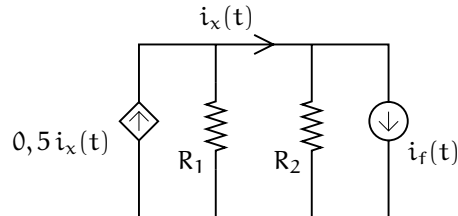
En la red se tiene que $i_f(t) = I_o \text{ [A]}$, $\forall t \geq 0$, $R_1 = 2 \text{ [k}\Omega\text{]}$ y $R_2 = 3 \text{ [k}\Omega\text{]}$. ¿En qué porcentaje sube o baja $|i_1(t)|$ si R_1 disminuye a la mitad?

Problema 1.28. Considere la red de la figura

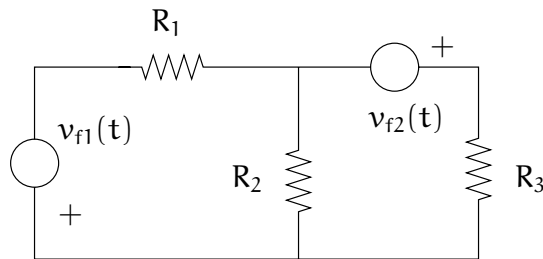


Calcule la potencia entregada por la fuente.

Problema 1.29. Considere la red de la figura, donde $R_1 = 1[\Omega]$, $R_2 = 2[\Omega]$. Se sabe además que $i_x(t) = 2[\text{A}] \forall t$. Calcule la potencia entregada o recibida por la fuente independiente de corriente.



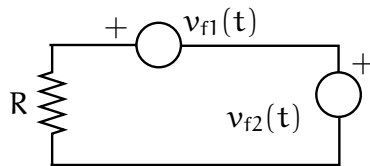
Problema 1.30. En la red resistiva de la figura, se sabe que $v_{f1}(t) = 6[\text{V}]$, $v_{f1}(t) = 10[\text{V}]$, $R_1 = 20[\Omega]$, $R_2 = 20[\Omega]$, $R_3 = 10[\Omega]$



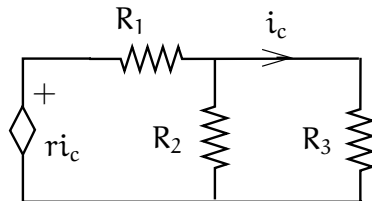
1.30.1 Determine la potencia disipada en cada resistor

1.30.2 Calcule la potencia entregada o recibida por cada fuente. Señale en cada caso, si se trata de potencia entregada o potencia recibida.

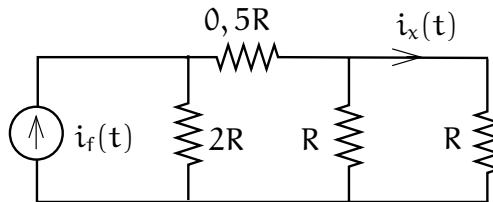
Problema 1.31. Considere la red de la figura, donde $v_{f1}(t) = 3v_{f2}(t)$. ¿Qué porcentaje de la potencia consumida por R es entregada por la fuente 2?



Problema 1.32. Considere la red de la figura, donde $R_1 = R_2 = R_3 = 10[\Omega]$, $r = 0,001[\Omega]$. Calcule i_c .



Problema 1.33. Considere la red de la figura, donde $i_f(t) = 0,6 \cos(314t)$, $R = 10 [\Omega]$. Calcule $i_x(t)$.



Capítulo 2

REDES DINÁMICAS SIMPLES

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan problemas relacionados con redes dinámicas, es decir, aquellas que contienen inductores y condensadores, que son elementos capaces de almacenar energía. El rasgo característico de estas redes es que las señales en ellas, no sólo dependen de las excitaciones independientes (fuentes de tensión y corriente), y de la red misma (estructura y componentes), sino que también de las condiciones iniciales. además los ejercicios de este capítulo incluyen sólo estructuras sencillas y, a lo sumo, dos componentes dinámicas.

El análisis que se hace requiere del estudiante el conocimiento de las leyes fundamentales que rigen el comportamiento de las redes eléctricas concentradas en el espacio y en ausencia de campos magnéticos externos, es decir, de campos que no son generados por la misma red bajo análisis.

El propósito de estos ejercicios es reforzar los conceptos fundamentales y ayudarles a desarrollar criterios para verificar resultados. Un modelo matemático que se repite en la mayoría de los ejercicios, es una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\tau \frac{df(t)}{dt} + f(t) = K \quad (2.1)$$

donde K es constante para $t \geq 0$. La solución para esta ecuación es

$$f(t) = f(\infty) + (f(0) - f(\infty))e^{-t/\tau} = K + (f(0) - K)e^{-t/\tau} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

Si, en cambio, se conoce la condición inicial en $t = t_0$, tenemos que

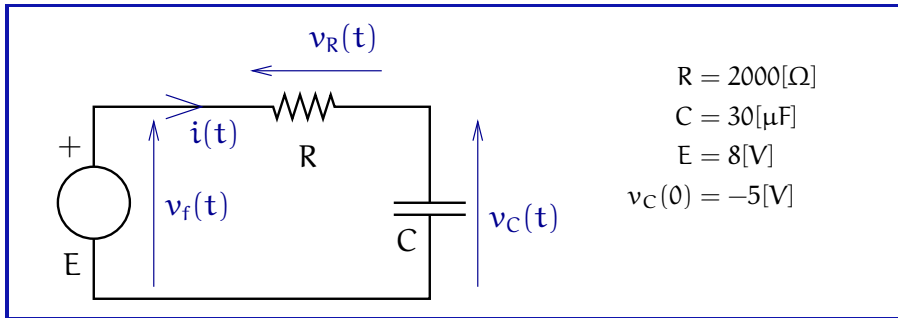
$$f(t) = f(\infty) + (f(t_0) - f(\infty))e^{-t/\tau} = K + (f(0) - K)e^{-(t-t_0)/\tau} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.3)$$

2.2. Redes RC

2.2.1. Red RC con un condensador

Problema 2.1.

Considere la red RC de la figura, se trata de analizarla dada la condición inicial en el condensador y la excitación, con los datos que se indican.



2.1.1 Calcule $v_C(t)$ e $i(t)$, $\forall t \geq 0$

2.1.1 Calcule la energía entregada por la fuente en el lapso $[0, t_1]$, donde $t_1 = 2 \cdot RC$.

Solución

Es siempre conveniente plantear el problema en forma literal, es decir, sin usar aún los valores numéricos. De esa forma, podemos verificar si el modelo matemático es conceptualmente correcto. Para construir ese modelo, debemos recordar, una vez más, que sólo tenemos a nuestra disposición los tres postulados básicos: Ley de Corrientes de Kirchoff (LCK), Ley de Voltajes de Kirchoff (LVK) y Ley de componentes (tercer postulado). En este caso, la LCK nos informa que la corriente es la misma en las tres componentes, la hemos denominado $i(t)$. Por su parte la ley de componentes nos dice que

Note que estas leyes suponen que la red es concentrada, y note además que, a partir de estos tres postulados se pueden deducir la conservación de la energía, y el equilibrio de potencias instantáneas (teorema de Tellegen)

$$v_f(t) = E, \quad v_R(t) = Ri(t), \quad i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}. \quad (2.4)$$

Finalmente, al aplicar la LVK se obtiene

$$v_f(t) = v_R(t) + v_C(t). \quad (2.5)$$

As, al reducir el sistema de ecuaciones, reemplazando en (2.5), las relaciones precedentes se llega a

Esta ecuación es independiente de los valores de las componentes individuales; sólo depende del producto de esos valores.

$$v_f(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t). \quad (2.6)$$

La solución para esta ecuación, cuando $v_f(t) = E$, constante $\forall t \geq 0$, está dada por

$$v_C(t) = E - (E - v_C(0))e^{-t/\tau}, \quad (2.7)$$

donde $\tau = RC$, y se la conoce como constante de tiempo.

Si ahora reemplazamos valores numéricos en (2.7), se obtiene $\tau = 6 \times 10^{-2}$ y se llega a

$$v_C(t) = 8 - 13e^{-100t/6} [V]. \quad (2.8)$$

Observe lo siguiente respecto de la expresión literal (2.7):

- $v_C(\infty) = E$, es decir, la tensión en el condensador tiende a la tensión de la fuente, cualquiera que ella sea, **siempre que esa tensión sea constante $\forall t \geq 0$** .
- La expresión (2.7) satisface la condición inicial (reemplace t por 0 y verifique).
- Si $E = v_C(0)$, es decir, si la condición inicial es igual a la tensión en la fuente, entonces la tensión en el condensador y, en consecuencia, la carga en l , se mantienen constantes $\forall t \geq 0$.
- Si la tensión de la fuente no es constante $\forall t \geq 0$, entonces **la expresión (2.7) no es correcta**. Revise la teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- La expresión para $v_C(t)$ no depende de R y C por separado, sino de su producto. Como se verá luego, **se no es el caso para otras variables en la red**.

Para calcular la corriente, podemos aplicar la ecuación de tercer postulado para el condensador, lo cual lleva a

$$i(t) = \frac{E - v_C(0)}{R} e^{-t/\tau}. \quad (2.9)$$

Observe que esta corriente depende de R y de C , y no únicamente de su producto.

Si reemplazamos valores numéricos en (2.9), se llega a (note las unidades)

$$i(t) = 6,5 \times 10^{-3} e^{-100t/6} [A] = 6,5e^{-100t/6} [mA]. \quad (2.10)$$

Para responder la segunda pregunta, notamos que la **potencia instantánea entregada por la fuente** está dada por

$$p_f(t) = v_f(t)i(t) = Ei(t) = \frac{E(E - v_C(0))}{R} e^{-t/\tau}, \quad (2.11)$$

por lo tanto la energía suministrada por la fuente en el lapso $[0; t_1]$ es

$$w_{[0, t_1]} = \int_0^{t_1} p(t) dt = CE(E - v_C(0)) (1 - e^{-t_1/\tau}). \quad (2.12)$$

Al reemplazar los valores numéricos dados, se obtiene

$$w_{[0, t_1]} = 24 \times 10^{-5} \times 13(1 - e^{-2}) [J] = 270 \times 10^{-5} [J]. \quad (2.13)$$

La expresión (2.12) genera los siguientes comentarios de interés

- La energía es **entregada por la fuente**, si y sólo si $E > v_C(0)$. Si $E < v_C(0)$, entonces la **fente recibe energía** en el lapso $[0, t_1]$, $\forall t_1 > 0$.
- Si $E = v_C(0)$ entonces el flujo de energía es cero, ya que la corriente es cero $\forall t > 0$.
- Si $t_1 \rightarrow \infty$, entonces la energía proporcionada por la fuente en ese lapso es

Recuerde que la energía entregada o recibida por un elemento de dos terminales es cero, siempre que la tensión o la corriente (o ambas) es cero.

$$w_{[0, t_1]} \rightarrow w_{[0, \infty)} = CE(E - v_C(0)) \quad (2.14)$$

Errores

En un problema tan simple como éste, se pueden cometer errores conceptuales de diverso tipo. Señalamos a continuación aquellos más frecuentes.

Error 1 Errores en la formulación de LVK

Error 2 Error en la manipulación de expresiones, de modo que el lado derecho de la ecuación (2.6), los dos términos resulten con distinto signo, por ejemplo

$$v_f(t) = -RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

El efecto de este aparentemente simple error de signo es que la solución de la ecuación sera

$$v_C(t) = 8 - 13e^{100t/6} [V],$$

lo que implica que la magnitud de la **tensión en el condensador crece exponencialmente**, en vez de tender asintóticamente a la tensión de la fuente.

Esta condición debe cumplirse, porque la red no presenta degeneraciones

Error 3 Cometer errores de manipulación tales que la expresión que se obtenga para $v_C(t)$ no cumple con el dato $v_C(0) = -5$ [V].

Error 4 Extender el desarrollo realizado en este caso, donde $v_f(t) = E$ constante $\forall t \geq 0$, a otros casos en los que $v_f(t)$ no es constante y decir, por ejemplo, que en este último caso se cumple que

$$v_C(t) = v_f(t) - (v_f(t) - v_C(0))e^{-t/\tau}.$$

Una variante de interés

Suponga la misma red, con los mismos datos, con una única modificación: en vez de conocerse $v_C(0)$, se conoce $v_C(t_o)$, donde $t_o > 0$.

La solución para esta variante está también dada por la expresión (2.7). El problema reside en que para poder evaluar numéricamente la expresión, necesitamos el valor de $v_C(0)$. Sin embargo, con el valor de $v_C(t_o)$ podemos resolver el problema, ya que

$$v_C(t_o) = E - (E - v_C(0))e^{-t_o/\tau} \iff v_C(0) = E + (v_C(t_o) - E)e^{t_o/\tau},$$

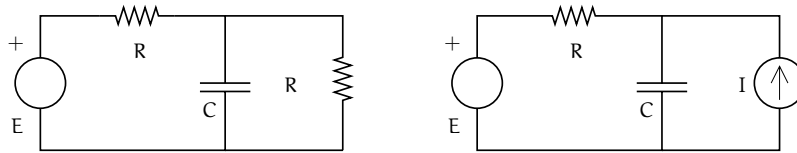
lo cual lleva finalmente a

$$v_C(t) = E - (E - v_C(t_o))e^{(t_o-t)/\tau}. \quad (2.15)$$

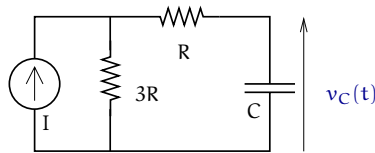
Note que esta ecuación satisface la condición dada, al reemplazar en ella t por t_o .

Ejercicios suplementarios

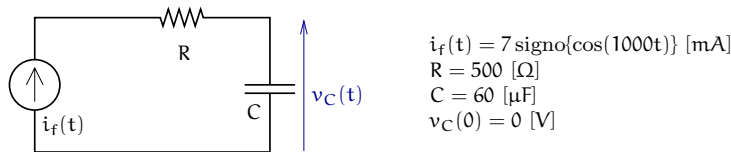
Ejercicio 2.2.1. Calcule en las redes de la figura, la tensión en cada una de las componentes, usando los mismos datos del problema principal y con $I = 4$ [mA].



Ejercicio 2.2.2. En la red de la figura calcule la tensión $v_C(t)$, usando los mismos datos del problema principal y con $I = 4$ [mA]



Ejercicio 2.2.3. La red de la figura es, en algunos aspectos, conceptualmente distinta a aquella tratada en el problema principal. Sin embargo, sigue siendo una red dinámica de primer orden en la que el condensador juega un rol fundamental. En esta red, se pide dibujar cualitativamente $v_C(t)$, y verificar el resultado, usando el programa LTspice.



La función signo arroja 1 cuando el argumento es positivo, y -1 cuando el argumento es negativo

2.2.2. Red RC con dos condensadores

Problema 2.2.

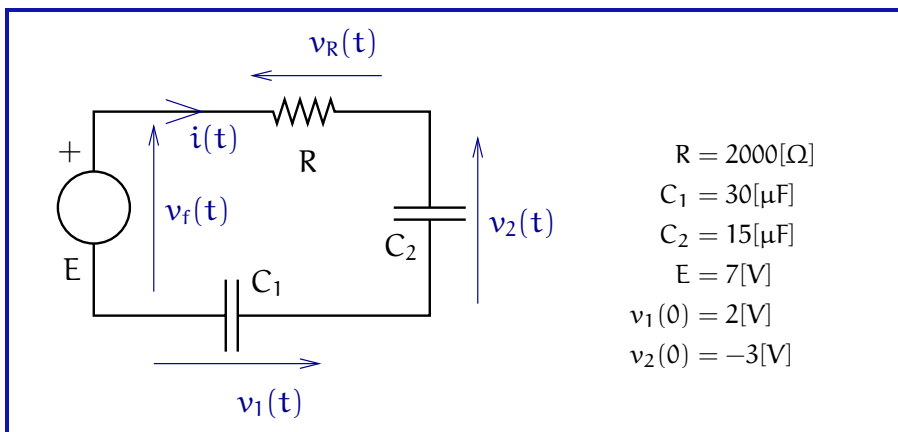
La red de la figura es, en rigor, una red dinámica de segundo orden, porque la respuesta depende en general de **dos condiciones iniciales**; ello implica que, en general, el modelo matemático de esta red ser una ecuación diferencial de segundo orden. Sin embargo, veremos que, en este caso particular, se puede esquivar el trabajar con una ecuación diferencial de segundo orden.

En general, la resolución de una ecuación diferencial de orden n , requiere de n condiciones iniciales para su resolución.

Para este problema se pide

2.2.1 Calcular las tensiones en ambos condensadores, $\forall t \geq 0$.

2.2.2 Calcular la expresión para la potencia instantánea suministrada por la fuente.



Solución

Nuevamente, es importante recordar que con independencia del método a usar, siempre se deben usar los tres postulados básicos del análisis de redes. Lo que distingue a un método de otro, es el orden en que se aplican los postulados, y las estructuras a las que se aplican las leyes de interconexión, es decir, la LVK y la LCK.

En este caso, empezamos por aplicar LVK, lo cual lleva a

$$v_f(t) = v_R(t) + v_1(t) + v_2(t). \quad (2.16)$$

Por su parte, la LCK permite concluir que las corrientes en todas las componentes son iguales entre si. La llamamos $i(t)$. Finalmente, la aplicación del tercer postulado genera las siguientes expresiones

$$v_f(t) = E; \quad v_R(t) = Ri(t); \quad i(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt}; \quad i(t) = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt}. \quad (2.17)$$

De las ecuaciones (2.17) podemos deducir que

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{C_1}{C_2} \frac{dv_1(t)}{dt}. \quad (2.18)$$

Por otro lado, al derivar la ecuación (2.16) y al utilizar (2.17) y (2.18), se obtiene

$$\frac{dv_f(t)}{dt} = RC_1 \frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \frac{dv_1(t)}{dt}. \quad (2.19)$$

sta es una ecuación diferencial de segundo orden; sin embargo, se puede convertir en una ecuación de primer orden si, en vez de usar como función incógnita la tensión en C_1 , usamos la corriente $i(t)$. Con este cambio de variables, se obtiene

$$\boxed{\frac{dv_f(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} i(t).} \quad (2.20)$$

Esta ecuación de primer orden se puede resolver dado que la tensión $v_f(t)$ es dada y que la condición inicial $i(0)$ se puede calcular a partir de la expresión

$$i(0) = \frac{v_f(0) - v_1(0) - v_2(0)}{R}. \quad (2.21)$$

La solución para esta ecuación, cuando $v_f(t) = E$, constante $\forall t \geq 0$, está dada por

$$\boxed{i(t) = i(0) e^{-t/\tau},} \quad (2.22)$$

donde $\tau = RC_s$ con $C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Usando el Tercer Postulado para condensadores, se llega a

$$\boxed{v_1(t) = v_1(0) + \frac{\tau i(0)}{C_1}(1 - e^{-t/\tau}); \quad v_2(t) = v_2(0) + \frac{\tau i(0)}{C_2}(1 - e^{-t/\tau}).} \quad (2.23)$$

Ahora podemos reemplazar valores numéricos. Primero tenemos que $i(0) = 4$ [mA], $\tau = 20$ [ms], $C_s = 10$ [μ F]. As

$$i(t) = 4e^{-50t} \text{ [mA]} \quad (2.24)$$

$$v_1(t) = 2 + \frac{8}{3}(1 - e^{-50t}) \text{ [V]} \quad (2.25)$$

$$v_2(t) = -3 + \frac{16}{3}(1 - e^{-50t}) \text{ [V]} \quad (2.26)$$

Observe lo siguiente respecto de las expresiones literales (2.22) y (2.23):

- La corriente tiende asintóticamente a cero. Esto sólo ocurre cuando $v_f(t)$ es constante, o tiende asintóticamente a una constante.
- Se obtendrá la misma expresión para la corriente $i(t)$, si la red fuese aquella analizada en el Problema 4.4, en la que reemplazamos C por C_s y la condición inicial $v_C(0)$, por la condición inicial equivalente $v_1(0) + v_2(0)$.
- Las tensiones $v_1(t)$ y $v_2(t)$ tienden a valores constantes $v_1(0) + \tau i(0)/C_1$ y $v_2(0) + \tau i(0)/C_2$, respectivamente. Note que, **para el caso general, los condensadores C_1 y C_2 no se descargan completamente** (excepto para valores numéricos particulares).
- Las tensiones asintóticas satisfacen la relación $v_1(\infty) + v_2(\infty) = E$. Esta relación es una consecuencia del hecho que $i(\infty) = 0$, y de la LVK (ecuación (2.16)). Note que, aunque $v_f(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, las dos tensiones pueden tender asintóticamente a valores distintos de cero.

Para responder a la segunda pregunta, recordamos que la potencia instantánea **entregada** por la fuente, está dada por

$$p_f(t) = v_f(t)i(t). \quad (2.27)$$

En este caso, $v_f(t) = E$, se llega a:

$$\boxed{p_f(t) = Ei(0) e^{-t/\tau} = \frac{E(E - v_1(0) - v_2(0))}{R} e^{-t/\tau}} \quad (2.28)$$

Al usar los datos numéricos dados, se obtiene

$$p_f(t) = 28 e^{-50t} [\text{mW}]. \quad (2.29)$$

La expresión (2.27) merece un par de comentarios

*Recuerde que estamos
trabajando con $v_f(t)$ constante
 $\forall t \geq 0$.*

- Es posible que la potencia instantánea entregada por la fuente sea siempre negativa, es decir, que la fuente reciba potencia $\forall t \geq 0$. Suponiendo que $E > 0$, esto ocurre cuando $E < v_1(0) - v_2(0)$. En este caso, la energía que recibe la fuente proviene de aquella almacenada inicialmente en los condensadores.
- El Teorema de Tellegen dice que existe un equilibrio instantáneo de las potencias que entran y salen de las componentes de una red. Esto se puede verificar, para esta red, a partir de (2.16). En efecto, si multiplicamos esa ecuación por $i(t)$, se obtiene

$$\underbrace{v_f(t)i(t)}_{p_f(t)} = \underbrace{v_R(t)i(t)}_{p_R(t)} + \underbrace{v_1(t)i(t)}_{p_1(t)} + \underbrace{v_2(t)i(t)}_{p_2(t)} \quad (2.30)$$

Errores

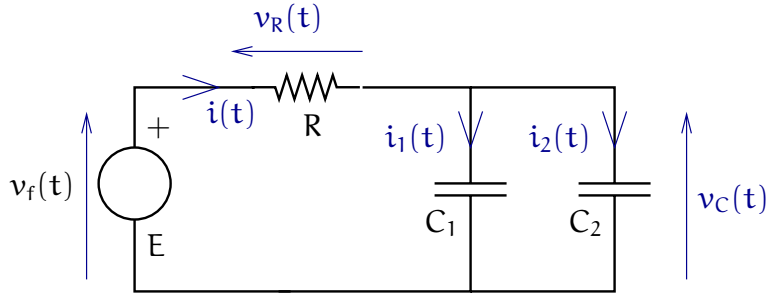
En la resolución de este problema se pueden cometer varios errores. Los más frecuentes son

- Error 1** Signos erróneos en la ecuación que surge de la aplicación de la LVK
- Error 2** Error en el cálculo de $i(0)$. Recuerde que la LVK rige $\forall t \geq 0$ (no sabemos lo que era esta red para $t < 0$), por lo tanto, se debe cumplir en $t = 0$.
- Error 3** Extensión de los resultados obtenidos para $i(t)$ con $v_f(t)$ constante, al caso de fuentes de tensión variable.
- Error 4** Suponer que ambos condensadores **siempre** se descargan completamente, para $v_f(t) = 0$. Este error puede inducir a sostener, usando el principio de conservación de la energía, que la energía disipada en el resistor es siempre igual a la energía inicialmente almacenada en los condensadores.
- Error 5** Confundir potencia entregada, con potencia recibida por la fuente.

Una variante de interés

Suponga que los condensadores no se encuentran conectados en serie, sino en paralelo, como se muestra en la figura.

En esta red se supone que ambos condensadores **estaban conectados en paralelo antes de $t = 0$** ; esta suposición permite asegurar que en $t = 0$ las tensiones en ambos condensadores son iguales (por ello hemos sólo definido una tensión para ambos, $v_C(t)$). El caso en que ello no ocurre se analizar en el siguiente problema.



En este caso se desea conocer las tres corrientes en la red, con los mismos datos numéricos del problema principal, excepto que ahora se especifica $v_C(0) = 4$ [V].

Usando la LCK, se sabe que $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$. Si aplicamos esta relación en la ecuación de la LVK, en conjunto con el tercer postulado para el resistor y los condensadores, se llega a

$$v_f(t) = Ri(t) + v_C(t) = R(i_1(t) + i_2(t)) + v_C(t) = R(C_1 + C_2) \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t). \quad (2.31)$$

Ahora tenemos una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución para $v_f(t) = E$, constante, está dada por (vea Problema 4.4)

$$v_C(t) = E + (v_C(0) - E)e^{-t/\tau}, \quad (2.32)$$

donde la constante de tiempo es, en este caso, $\tau = RC_p = 90$ [ms], con $C_p = C_1 + C_2 = 45$ [μ F].

Así, las corrientes buscadas están dadas por

$$i_1(t) = C_1 \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{C_1}{\tau} (E - v_C(0))e^{-t/\tau} = e^{-100t/9} \text{ [mA]} \quad (2.33)$$

$$i_2(t) = C_2 \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{C_2}{\tau} (E - v_C(0))e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} e^{-100t/9} \text{ [mA]} \quad (2.34)$$

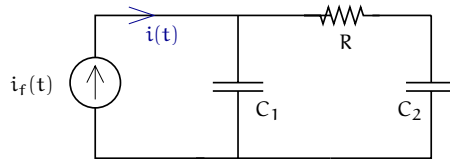
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{C_1 + C_2}{\tau} (E - v_C(0))e^{-t/\tau} = \frac{3}{2} e^{-100t/9} \text{ [mA]} \quad (2.35)$$

Ejercicios suplementarios

Ejercicio 2.2.4. En la red del problema principal, suponga que $v_1 = -v_2$, cuál es la expresión para la corriente?

Ejercicio 2.2.5. Bajo qué excitación y condiciones iniciales, en la red del problema principal se cumple que $v_1(\infty) = 0$? (suponga que los valores de R , C_1 y C_2 son los allí dados).

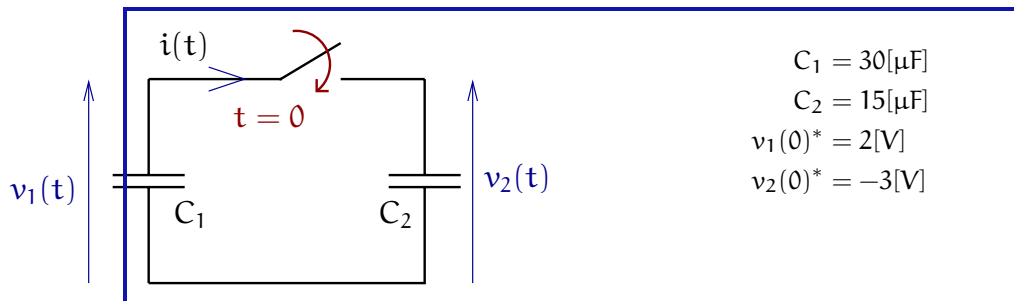
Ejercicio 2.2.6. En la red de la figura, determine la ecuación diferencial para calcular $i(t)$. No se pide resolver esa ecuación.



2.2.3. Red con dos condensadores, sin resistencia

Problema 2.3.

La red de la figura es, igual que en el caso anterior, una red dinámica de segundo orden; sin embargo, esta red tiene además una complejidad adicional cuando las condiciones iniciales en ambos condensadores, **antes de cerrar el interruptor**, son diferentes.



En verdad, se puede argumentar que este tipo de red jamás se encuentra en la práctica. Esta afirmación está sustentada en la observación de varias idealizaciones. La más evidente es que se ha supuesto que los conductores que conectan los condensadores, y el interruptor mismo, tienen cero resistencia. Sin embargo es posible imaginarse esta red como un modelo, en un límite, de ciertas situaciones reales (ver la variante de interés).

Para este problema se pide calcular las tensiones en ambos condensadores, $\forall t \geq 0$.

Solución

La dificultad en este problema surge porque, **después de cerrar el interruptor**, ambas tensiones deben igualarse. En consecuencia, en el caso general, en un tiempo infinitamente breve, la carga de los condensadores debe cambiar. En cuanto a la corriente $i(t)$ es posible afirmar que puede ser sólo diferente a cero en $t = 0$, ya que para $t < 0$ la corriente debe ser cero porque el interruptor está

abierto; por otro lado, para $t > 0$, también debe ser cero, porque si no lo fuera, no se cumpliría la LVK.

El razonamiento de más arriba lleva a afirmar que la corriente deber contener un impulso de Dirac. Recordemos que esta señal se caracteriza por tener un rea finita, no nula (carga eléctrica en este caso) aunque su duracin es infinitesimal y su amplitud es ilimitada.

Este es un caso en que la solución, en el dominio del tiempo, se simplifica si usamos el principio de conservación de la carga. Este principio antecede a la LCK, la que se deriva del mismo. Este principio nos dice que la suma total de las cargas en los condensadores, se mantiene una vez cerrado el interruptor. Definiremos como $t = 0_-$ y $t = 0_+$ el instante inmediatamente anterior y el inmediatamente posterior al cierre del interruptor, respectivamente. Entonces, aplicando el PCC y la LVK para $t = 0_+$, se llega a

A diferencia de la LCK, el principio de conservación de la carga (PCC) también rige en sistemas distribuidos en el espacio, tales como las antenas y las líneas de transmisión.

$$v_1(0_+) = v_2(0_+) \quad (2.36)$$

$$C_1 v_1(0_-) + C_2 v_2(0_-) = C_1 v_1(0_+) + C_2 v_2(0_+) \quad (2.37)$$

Esto lleva a

$$v_1(0_+) = v_2(0_+) = \frac{C_1 v_1(0_-) + C_2 v_2(0_-)}{C_1 + C_2} \quad (2.38)$$

As el cambio de carga en C_2 (igual al negativo del cambio de carga en C_1) está dado por

$$\Delta q_2 = C_2 v_2(0_+) - C_2 v_2(0_-) = (v_1(0_-) - v_2(0_-)) C_s \quad \text{con } C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (2.39)$$

Naturalmente que este cambio de cargo sólo puede deberse a una corriente de la forma

$$i(t) = \Delta q_2 \delta_D(t). \quad (2.40)$$

As las tensiones despues de cerrar el interruptor estn dadas por

$$v_1(0_+) = v_2(0_+) = v_2(0_-) + \frac{\Delta q_2}{C_2} = v_1(0_-) - \frac{\Delta q_2}{C_1}. \quad (2.41)$$

numéricamente, se obtiene $\Delta q_2 = 50 \text{ } [\mu\text{C}]$, lo cual lleva a

$$v_1(0_+) = 2 - \frac{50}{30} \text{ [V]} = \frac{1}{3} \text{ [V]} \quad (2.42)$$

$$v_2(0_+) = -3 + \frac{50}{15} \text{ [V]} = \frac{1}{3} \text{ [V]} \quad (2.43)$$

Las expresiones (2.39), (2.40) y (2.41) merecen los siguientes comentarios

- No hay transferencia de carga si las tensiones de ambos condensadores son iguales, antes de cerrar el interruptor.
- La cantidad de carga transferida es igual al rea del impulso de Dirac. Éste es un caso particular del principio que indica que la carga transferida entre dos puntos, en un lapso especificado, es igual a la integral de la corriente, en el lapso dado.
- Las tensiones en ambos condensadores experimentan un salto tipo escalón (positivo uno y negativo, el otro).
- Conceptualmente, aunque no numéricamente, los resultados serán los mismos si agregásemos una fuente de tensión en la red. sólo habrán cambios en las ecuaciones que se originan en la LVK.
- Este problema se puede resolver en el dominio de la Transformada de Laplace, sin recurrir explícitamente al PCC. Esta alternativa de solución se ilustra en el Volumen 2.

Errores

En este problema, los errores que se suelen cometer son pocos, pero de variada naturaleza

Error 1 Error de signo en la formulación de la ecuación obtenida por aplicación de la LVK, para $t \geq 0$.

Error 2 Errores numéricos que llevan a violación del PCC. Para disminuir la probabilidad de ocurrencia de este error conviene calcular $v_1(0_+)$ y $v_2(0_+)$ en forma separada.

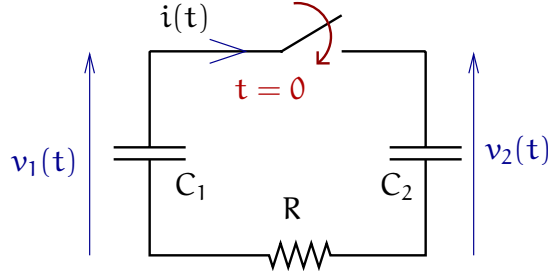
Error 3 Aplicar el principio de conservación de la energía, en el sentido de forzar que se cumpla

$$\frac{C_1 v_1(0_-)^2}{2} + \frac{C_2 v_2(0_-)^2}{2} = \frac{C_1 v_1(0_+)^2}{2} + \frac{C_2 v_2(0_+)^2}{2}.$$

En realidad, esta igualdad no se cumple, ya que en el balance de energía falta un término originado en la circulación de una corriente de amplitud infinita a través de una resistencia de valor cero. Esto se puede calcular sólo como un proceso límite, tal como se mostrar en la variante de interés asociada a este problema

Una variante de interés

El problema principal puede interpretarse como el introducir un interruptor en la red de la subsección § con $E = 0$ y $R \rightarrow 0$. Esta situación corresponde a la red de la figura



En esta red, una vez cerrado el interruptor, se aplica el resultado de las ecuación (2.22), con dos cambios obvios: $E = 0$ y la tensión v_1 aparece con orientaciones distintas en las dos redes. As

Note que aquí no se hace la diferencia entre 0_- y 0_+ , porque no hay discontinuidad para $R \neq 0$.

$$i(0) = \frac{v_1(0) - v_2(0)}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{v_1(0) - v_2(0)}{R} e^{-t/\tau} \quad (2.44)$$

Con $\tau = RC_s$, as las tensiones, para $t \rightarrow \infty$, quedan dadas por (ver ecuación (2.23))

$$v_1(\infty) = v_1(0) - \frac{\tau i(0)}{C_1} \quad (2.45)$$

$$v_2(\infty) = v_2(0) + \frac{\tau i(0)}{C_2}. \quad (2.46)$$

Con lo cual, las cargas en ambos condensadores estn dadas por

$$q_1(\infty) = q_1(0) - \tau i(0) \quad (2.47)$$

$$q_2(\infty) = q_2(0) + \tau i(0). \quad (2.48)$$

Note que el término $\tau i(0)$ corresponde exactamente a la variación de carga Δq_2 , cuya expresión aparece en (2.39). Veremos ahora lo que ocurre cuando $R \rightarrow 0$. Para empezar, la corriente dada en (2.44) tiende a un valor ilimitado en $t = 0$, y a un valor despreciable para $t > 0$, ya que $\tau \rightarrow 0$. Por otro lado,

$$\int_{0_-}^{\infty} i(t) dt = \tau i(0) = C_s(v_1(0) - v_2(0)).$$

La interpretación es natural: la carga transportada por $i(t)$, en el intervalo $[0, \infty)$ es independiente de R , y es igual a la variación de carga Δq_2 . En otras palabras, para $R \rightarrow 0$, la corriente tiende a un delta de Dirac, exactamente igual a la expresión que aparece en (2.40).

Analizaremos a continuación el tema de la energía disipada en R , para $R \rightarrow 0$. Primero notamos que la potencia instantánea es

$$p_R(t) = i(t)^2 R = \frac{(v_1(0) - v_2(0))^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

Por lo tanto la energía disipada en R , en el lapso $[0, \infty)$, está dada por

$$w_{[0, \infty)} = \int_{0-}^{\infty} p_R(t) dt = \frac{C_s(v_1(0) - v_2(0))^2}{2}$$

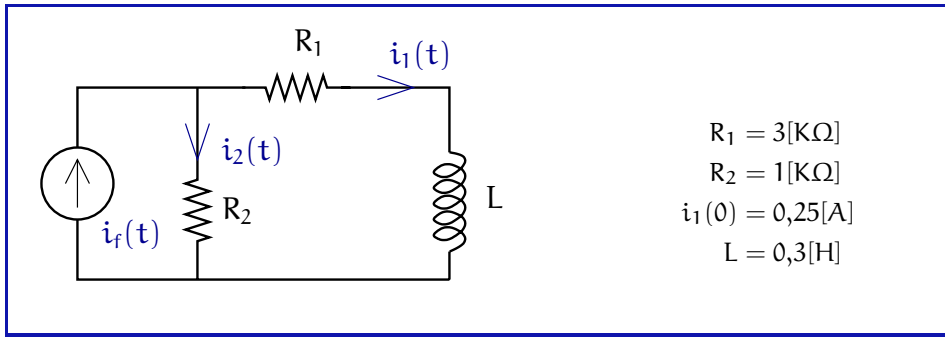
Lo notable de esta expresión para la energía disipada en el resistor es que no depende de R , por pequeña que ésta sea. Es esta energía la que parece faltar al aplicar la ley de conservación de energía cuando $R = 0$.

2.3. Redes RL

2.3.1. Red RL con un inductor

Problema 2.4.

Considere la red de la figura, y los datos asociados. determine $i_1(t) \forall t \geq 0$, si se sabe además que $i_f(t) = 2\mu(t) - 3\mu(t - t_0)$ [A], para $t_0 = 0,5 \times 10^{-4}$ [s].



Solución

Al usar la LCK se obtiene

$$i_f(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (2.49)$$

Por otro lado, aplicando la LVK al camino cerrado formado por R_1 , R_2 y L , se obtiene

$$R_1 i_1(t) = R_2 i_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} \quad (2.50)$$

Al usar (2.49) en (2.50), se obtiene finalmente

$$\frac{L}{R_1 + R_2} \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_f(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.51)$$

En este problema, la fuente de corriente no es constante $\forall t \geq 0$, sino que es constante por intervalos. Entonces, la estrategia de solución pasa por resolver (2.51) para el lapso $[0, t_0)$, usando $i_1(0)$ como condición inicial e $i_f(t) = I_a = 2$ [A]. Luego resolvemos para el intervalo $[t_0, \infty)$, usando $i_1(t_0)$ como condición inicial e $i_f(t) = I_b = -1$ [A].

El valor de I_b resulta de sumar $2\mu(t)$ con $-3\mu(t - t_0)$.

$[0, t_0)$ La solución tiene la forma

$$i_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_a + \left(i_2(0) - \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_a \right) e^{-t/\tau} \quad 0 \leq t < t_0 \quad (2.52)$$

$$\text{con } \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

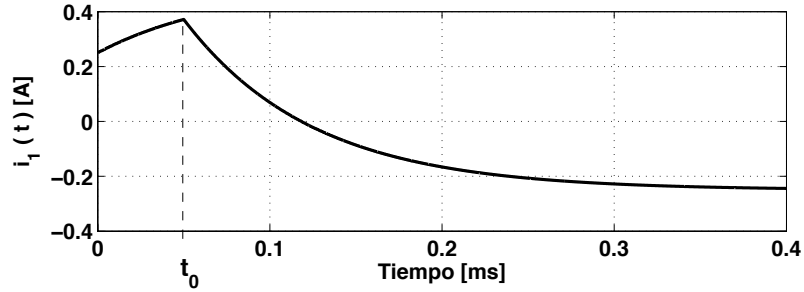
$[t_0, \infty)$ En este intervalo, la solución se obtiene, a partir de (2.3)

$$i_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_b + \left(i_2(t_0) - \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_b \right) e^{-(t-t_0)/\tau} \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.53)$$

Si ahora reemplazamos los valores numéricos, obtenemos $\tau = 0,75 \times 10^{-4}$ [s] y $e^{-t_0/\tau} = e^{-2/3} = 0,5134$

$$i_1(t) = \begin{cases} 0,5 - 0,25e^{t/\tau} & t \in [0, t_0) \\ -0,25 + (i_1(t_0) + 0,25)e^{(t-t_0)/\tau} & t \in [t_0, \infty) \end{cases} \quad (2.54)$$

Gráficamente, la señal $i_1(t)$ tiene la forma que se muestra en la figura.



Estos resultados motivan los siguientes comentarios

- La señal de corriente en el inductor, $i_1(t)$, es continua en el instante $t = t_0$. Sin embargo, la tensión en el inductor no lo es, ya que esa tensión es proporcional a la derivada de la corriente, y esta tiene un salto negativo en $t = t_0$, tal como se aprecia en la figura.
- La corriente en el inductor tiende a un valor constante, lo cual implica que la tensión en el inductor tiende a cero, así $i_1(\infty)$ se puede calcular usando la idea del divisor de corriente:

$$i_1(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_f(\infty) = -0,25[A] \quad (2.55)$$

- Ya que la corriente $i_1(t)$ es una función continua en t , y dado que la fuente de corriente no lo es (tiene un salto de -3 [A] en $t = t_0$), entonces necesariamente $i_2(t)$ exhibe un salto en $t = t_0$, igual al salto de $i_f(t)$.
- La constante de tiempo de la señal exponencial que aparece se puede calcular examinando la red con la fuente independiente igual a cero.
- Una forma alternativa de calcular $i_1(t)$ es considerar que su valor está determinado por:
 - (i) La condición inicial $i_1(0)$
 - (ii) Una fuente de corriente $i_{f1}(t) = 2$ [A] $\forall t \geq 0$
 - (iii) Una fuente de corriente $i_{f2}(t) = -3$ [A] $\forall t \geq t_0$ o, equivalentemente, $i_{f2}(t) = -3\mu(t - t_0)$ [A] $\forall t \geq 0$.

Entonces la corriente total se puede calcular usando la idea de superposición.

Errores

En este problema, los errores que se suelen cometer son

Error 1 Errores de signo en la aplicación de la LCK y la LVK.

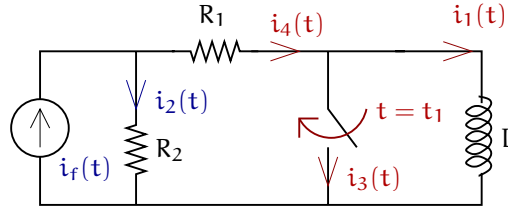
Error 2 Error de signo en el exponente de la exponencial, es decir, se obtiene $e^{t/\tau}$, en vez de $e^{-t/\tau}$. Este error numérico genera un error conceptual, ya que la exponencial debe ser decreciente, porque se origina en la conducta natural de una red RL.

Error 3 Se obtiene una corriente $i_1(t)$ siempre acotada, pero con un salto o discontinuidad. Este error implicaría que la tensión en el inductor tendrá magnitud infinita en el instante en que se produce discontinuidad. A su vez, esto implicaría que la tensión, y por lo tanto la corriente, en R_2 también tendrá magnitud infinita en ese instante. Se genera por lo tanto una contradicción con los datos, ya que $i_f(t)$ es siempre acotada.

Error 4 Se obtiene una corriente $i_1(t)$ que tiende a cero asintóticamente. Este resultado indicaría que la tensión, y por lo tanto la corriente, en R_2 también tendería a cero asintóticamente. Sin embargo, dado que $i_f(t)$ no tiende a cero, no se cumplirá la LCK.

Una variante de interés

Considere la red de la figura, que corresponde a la red original a la cual se ha agregado un interruptor. Este interruptor se cierra en el instante $t = t_1 = 2t_0 = 10^{-4}$ [s]. Se desea conocer $i_1(t)$ e $i_3(t)$ $\forall t \geq 0$, con los mismos datos dados para el problema principal.



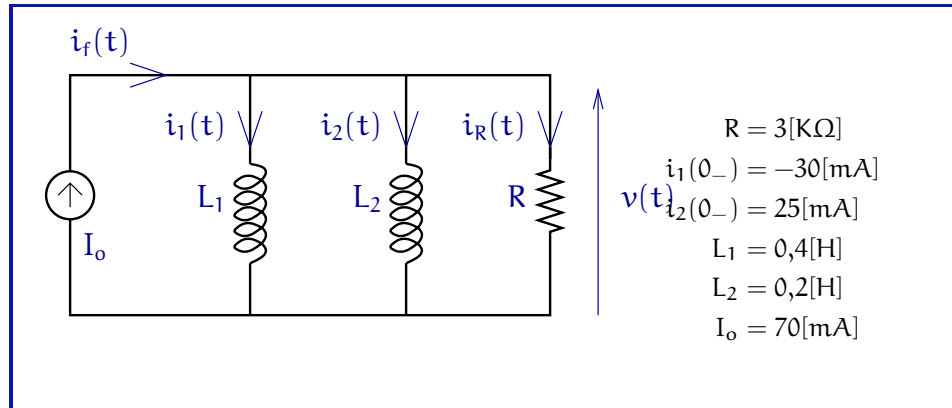
Cuando el interruptor está abierto, es decir, para $0 < t \leq t_1$, la corriente $i_3(t)$ es cero. Por lo tanto, en ese mismo lapso, la corriente $i_1(t)$ es la misma calculada en el problema principal. Sin embargo, cuando el interruptor se cierra, la tensión en el inductor cae instantáneamente a cero, lo cual significa que la corriente $i_1(t)$ se congela en el valor que tenía en $t = t_1$, y además, $i_3(t) = -i_1(t) \forall t \geq t_1$. En consecuencia,

$$i_1(t) = \begin{cases} 0,5 - 0,25e^{t/\tau} & t \in [0, t_0) \\ -0,25 + (i_1(t_0) + 0,25)e^{(t-t_0)/\tau} & t \in [t_0, t_1) \\ -0,25 + (i_1(t_0) + 0,25)e^{(t_1-t_0)/\tau} & t \in [t_1, \infty) \end{cases} \quad (2.56)$$

2.3.2. Red RL con dos inductores

Problema 2.5.

Considere la red de la figura, y los datos asociados. Determine la expresión para la potencia instantánea, $p(t)$, proporcionada por la fuente de corriente y las corrientes en ambos inductores, $\forall t \geq 0$.



Solución

Al aplicar la LCK se obtiene

Al derivar se ha usado el dato que $i_f(t)$ es constante.

$$i_f(t) = i_1(t) + i_2(t) + \frac{v(t)}{R} \implies 0 = \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.57)$$

Usando luego el tercer postulado para los inductores se llega a

$$\boxed{\frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} v(t) = 0} \quad (2.58)$$

Ésta es una ecuación diferencial homogénea de primer orden, cuya solución es

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} \quad (2.59)$$

donde

$$v(0) = (i_f(0) - i_1(0) - i_2(0))R \quad \text{y} \quad \tau = \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)R} \quad (2.60)$$

Así la potencia instantánea entregada por la fuente de corriente es

$$\boxed{p(t) = v(t)i_f(t) = v(0)I_o e^{-t/\tau} \quad \forall t \geq 0} \quad (2.61)$$

Por su parte, las corrientes en los inductores estan dadas por

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t v(\eta) d\eta = \frac{1}{L_1} \int_0^t v(\eta) d\eta + i_1(0) \quad (2.62)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t v(\eta) d\eta = \frac{1}{L_2} \int_0^t v(\eta) d\eta + i_2(0) \quad (2.63)$$

Luego usando la expresión calculada para $v(t)$, se obtiene

$$i_1(t) = \frac{\tau v(0)}{L_1} (1 - e^{-t/\tau}) + i_1(0) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.64)$$

$$i_2(t) = \frac{\tau v(0)}{L_2} (1 - e^{-t/\tau}) + i_2(0) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.65)$$

Al aplicar los valores numéricos se obtiene

$$\tau = \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)R} = \frac{2}{45} [\text{ms}] \quad (2.66)$$

con lo cual se llega a

$$p(t) = 15,75e^{-22500t} \text{ [W]} \quad (2.67)$$

$$i_1(t) = 25(1 - e^{-22500t}) - 30 \text{ [mA]} \quad (2.68)$$

$$i_2(t) = 50(1 - e^{-22500t}) + 25 \text{ [mA]} \quad (2.69)$$

Los resultados motivan los siguientes comentarios

No hay degeneraciones.

- Las corrientes en los inductores son continuas en $t = 0$, es decir, $i_1(0_-) = i_1(0_+)$ e $i_2(0_-) = i_2(0_+)$. Ello se puede demostrar por el argumento del absurdo: suponga que una de las dos corrientes *salta* en $t = 0$, entonces $v(t)$ debería contener un delta de Dirac, y lo mismo ocurriría con la corriente en el resistor. Sin embargo, si así fuese, entonces no se satisfaría la LCK.
- La tensión tiende asintóticamente a cero, ya que las corrientes en los inductores tienden a valores constantes.
- La potencia entregada por la fuente es siempre positiva, es decir, efectivamente la fuente entrega potencia $\forall t \geq 0$. Sin embargo este resultado se deriva de los valores numéricos específicos de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si $i_2(0) = 120 \text{ [mA]}$, entonces $v(0) = -60 \text{ [V]}$, y la fuente estaría efectivamente recibiendo potencia $\forall t \geq 0$.
- El hecho que hayan dos inductores en esta red no aparece explícitamente en la expresión para $v(t)$, ya que se obtendría el mismo resultado si en vez de dos inductores, existiese uno solo, de valor $L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$, con corriente inicial $i_1(0) + i_2(0)$.

Errores

En este problema, los errores que se suelen cometer son muy similares a los del problema anterior:

Error 1 Errores de signo en la aplicación de la LCK y la LVK.

Error 2 Error de signo en el exponente de la exponencial, es decir, se obtiene $e^{t/\tau}$, en vez de $e^{-t/\tau}$. Este error numérico genera un error conceptual, ya que la exponencial debe ser decreciente, porque se origina en la conducta natural de una red RL.

Error 3 Se obtiene una tensión $v(t)$ que tiende a un valor constante distinto de cero. Eso significaría que la primera derivada de las corrientes en los inductores tendería a un valor constante distintos de cero, en ambos inductores, lo cual implicaría que las corrientes crecerían sin límite y **en el mismo sentido**, lo cual no permitiría cumplir la LCK.

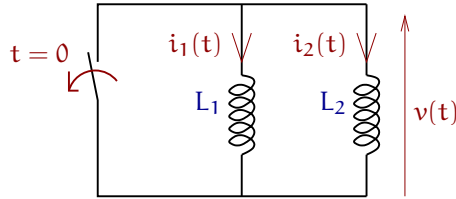
Error 4 Se obtiene que las corrientes en ambos inductores tienden a cero. Ello significaría que toda la corriente de la fuente constante se iría a través del resistor, lo que a su vez generaría una tensión $v(t)$ que no tendería a cero. Ello sería erróneo por la razones dadas en el Error 3.

Error 5 La suma $i_1(\infty) + i_2(\infty)$ resulta distinta de I_o . Ello implicaría que $v(\infty) \neq 0$, lo que es imposible, de acuerdo al análisis precedente.

Error 5 Partir suponiendo que la tensión en la fuente de corriente es cero $\forall t \geq 0$.

Una variante de interés

Suponga que en la red original se reemplaza la fuente de corriente por un interruptor, el que se abre en $t = 0$, tal como se muestra en la figura. Se desea conocer las expresiones para $v(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$, $\forall t \geq 0$.



En el problema original, la fuente de corriente imponía un valor I_o para la suma $i_1(t) + i_2(t) + i_R(t)$. El interruptor abierto obliga a que la suma $i_1(t) + i_2(t)$ sea 0, $\forall t \geq 0$. El problema es que esta última restricción genera una discontinuidad de las corrientes en $t = 0$, ya que $i_1(0_-) + i_2(0_-) \neq 0$. Necesariamente aparece, entonces, un delta de Dirac en la tensión $v(t)$. A similitud del principio de conservación de la carga existe el principio de conservación del flujo magnético, lo que se expresa en

Ésta es una red con una degeneración.

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+) \quad (2.70)$$

Capítulo 3

MÉTODOS GENERALES DE ANÁLISIS.

3.1. Introducción

En este capítulo desarrollamos problemas donde el objetivo es construir un modelo matemático consistente, es decir un conjunto de ecuaciones linealmente independientes, las que al ser resueltas llevan a determinar el valor (función del tiempo, generalmente) de un conjunto de variables de la red. Este conjunto, que se conoce como base de análisis, permite a su vez, calcular todas las tensiones y corrientes de la red. Lo que diferencia un método de otro es la base de análisis que se usa y, como consecuencia, el orden en que se aplican los tres postulados que rigen el comportamiento de las leyes eléctricas que nos interesan. Un caso particular es el método de mallas, el que no se aplica a redes planas, es decir, redes que se pueden dibujar en un plano sin que se crucen conexiones.

Cuando la red tiene sólo resistores y fuentes (controladas y/o independientes), el modelo matemático que resulta de aplicar un método general, es un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales de coeficientes constantes, en el que las incógnitas son las variables de la base. En el caso de una red en la que aparezcan inductores y/o condensadores se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales no-homogéneas, lineales y de coeficientes constantes.

Para resolver los problemas en este texto se usarán los métodos de mallas o nodos. En el análisis de redes dinámicas, por simplicidad se usará la notación de

operadores:

$$Df(t) = \frac{df(t)}{dt} \quad (3.1)$$

$$D^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

En un primer curso de redes eléctricas no se manejan herramientas para resolver numéricamente los modelos matemáticos de redes dinámicas. La excepción es cuando las excitaciones son sinusoidales, la red es lineal y estable e interesa sólo el estado estacionario. Para el caso de excitaciones arbitrarias, consideraremos el análisis completo cuando obtenemos un modelo matemático consistente, es decir, donde hay tantas ecuaciones dinámicas (con derivadas e integrales) linealmente independientes, como incógnitas. Este modelo será expresado usando los operadores definidos en (3.1) y (3.2). En esta formulación, las condiciones iniciales en inductores y condensadores quedan implícitas..

El modelo que resulta usualmente, está compuesto por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, de coeficientes constantes y no homogéneas. El estudiante que maneja Mathematica con soltura, puede resolver esas ecuaciones numérica o simbólicamente usando el comando

`DSolve[{eqn1, eqn2, ...}, {y1, y2, ...}, t]`

Donde eqn₁, eqn₂, ... son las ecuaciones diferenciales que resultan al aplicar uno de los métodos de análisis; y₁, y₂, ... son las señales a calcular.

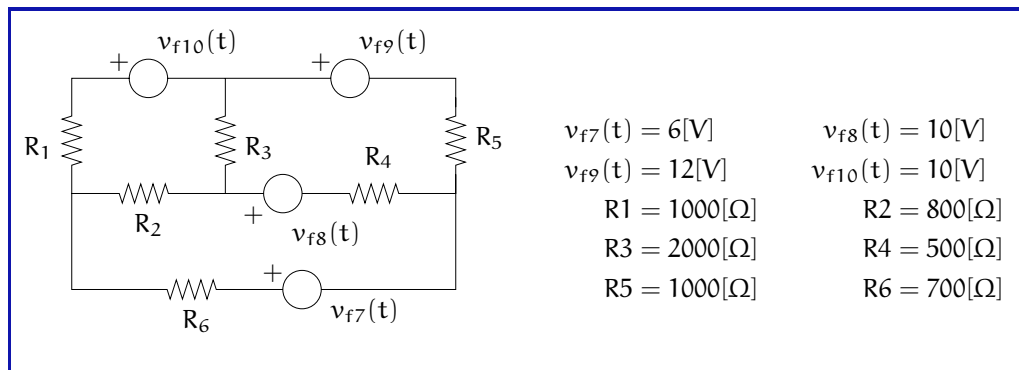
En el Apéndice ?? se ilustra un caso simple, en un sistema con dos ecuaciones diferenciales que se pueden reducir a una ecuación diferencial.

3.2. Método de mallas en redes resistivas.

3.2.1. Red resistiva con fuentes de tensión.

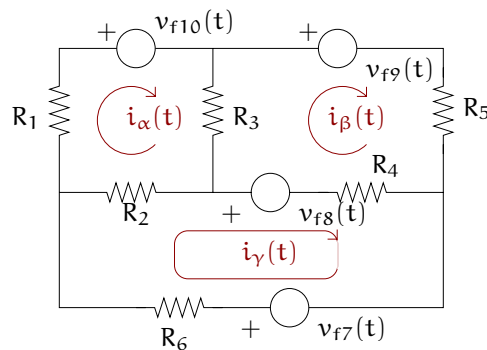
Problema 3.1.

Considere la red resistiva de la figura. Determine las ecuaciones finales del método de mallas, exprese en forma matricial. Finalmente resuelva para calcular la potencia entregada o recibida por cada fuente.



Solución

Primero debemos definir las corrientes de mallas. Las elegimos todas en el mismo sentido, para facilitar la construcción del modelo matemático. El resultado de esta elección se muestra en la figura siguiente



Plantearemos la ecuación de tensiones (aplicación de LVK) para la malla α , reemplazando simultáneamente la tensión en cada elemento, por su valor conocido (si se trata de una fuente de tensión independiente) o por una expresión en las corrientes de malla, si se trata de un resistor. Consideraremos positivas

aquellas tensiones que están en **referencia combinada** con la corriente de malla $i_\alpha(t)$; entonces resulta

$$\begin{aligned} R_1 i_\alpha(t) + R_2(i_\alpha(t) - i_\gamma(t)) + R_3(i_\alpha(t) - i_\gamma(t)) + v_{f10}(t) &= 0 \iff \\ (R_1 + R_2 + R_3)i_\alpha(t) - R_2 i_\gamma(t) - R_3 i_\gamma(t) &= -v_{f10}(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lo único relevante es que se respeten las orientaciones relativas de las tensiones

Para la malla β se repite el proceso, ahora se consideran positivas las tensiones que resultan en referencia combinada con $i_\beta(t)$. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} R_3(i_\beta(t) - i_\alpha(t)) + R_4(i_\beta(t) - i_\gamma(t)) + R_5 i_\beta(t) - v_{f8}(t) + v_{f9}(t) &= 0 \iff \\ -R_3 i_\alpha(t) + (R_3 + R_4 + R_5)i_\beta(t) - R_4 i_\gamma(t) &= v_{f8}(t) - v_{f9}(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Finalmente, se aplica la misma idea a la malla γ , considerando como tensiones positivas, aquellas que se generan en referencia combinada con $i_\gamma(t)$. Entonces la ecuación correspondiente resulta

$$\begin{aligned} R_2(i_\gamma(t) - i_\alpha(t)) + R_4(i_\gamma(t) - i_\beta(t)) + R_6 i_\gamma(t) + v_{f8}(t) - v_{f7}(t) &= 0 \iff \\ -R_2 i_\alpha(t) - R_4 i_\beta(t) + (R_2 + R_4 + R_6)i_\gamma(t) &= -v_{f8}(t) + v_{f7}(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Los resultados precedentes se pueden expresar, ordenadamente, en forma matricial, como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_4 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{f10}(t) \\ v_{f8}(t) - v_{f9}(t) \\ -v_{f8}(t) + v_{f7}(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Al reemplazar los valores numéricos dados, se llega a

$$\begin{bmatrix} 3,8 & -2 & -0,8 \\ -2 & 3,5 & -0,5 \\ -0,8 & -0,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = -10^{-3} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

De donde al resolver (usando MATHEMATICA) se llega

$$\boxed{i_\alpha(t) = -6,626[\text{mA}]; \quad i_\beta(t) = -5,208[\text{mA}]; \quad i_\gamma(t) = -5,952[\text{mA}]} \quad (3.8)$$

A partir de estos valores, las potencias **entregadas** por las cuatro fuentes son

$$\begin{aligned} p_7(t) &= v_{f7}(t)i_\gamma(t) = -35,71[\text{mW}] & p_8(t) &= v_{f8}(t)(i_\beta(t) - i_\gamma(t)) = 7,44[\text{mW}] \\ p_9(t) &= -v_{f9}(t)i_\beta(t) = 62,50[\text{mW}] & p_{10}(t) &= -v_{f10}(t)i_\beta(t) = 66,26[\text{mW}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Los resultados obtenidos y la técnica de análisis, merece los siguientes comentarios:

- La elección de corrientes de malla con la misma orientación, no es un requisito del método de mallas, sino que una elección, que facilita la formulación del modelo directo. Si se observa la ecuación matricial (3.6), se aprecia la estructura bien definida de la matriz de resistencias: todos los términos de la diagonal son positivos, y los de fuera de la diagonal son negativos. Si uno cambiase la orientación de una de las corrientes, esa característica se alteraría; por ejemplo, si cambiásemos el sentido de $i\beta(t)$, todos los términos de la segunda columna de la matriz de resistencias cambiarían su signo.
- La matriz de resistencias en (3.6) resulta simétrica; ello siempre ocurre en una red resistiva en la que no hay fuentes controladas y en donde todas las corrientes de mallas se han definido con la misma orientación. La presencia de fuentes controladas usualmente (no siempre) rompe esa simetría, como se observará en la variante de este problema.
- El vector de excitaciones en el lado derecho de (3.6) tiene una lectura simple: las fuentes de tensión independientes aparecen con signo positivo si en la malla correspondiente impulsan la corriente de malla respectiva, es decir, si la corriente de malla sale del lado positivo de la fuente. En caso contrario, la fuente aparece con signo negativo.

Errores

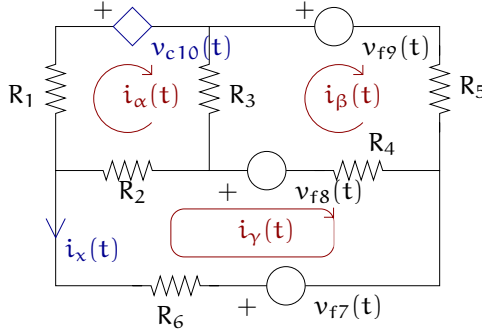
Error 1 Típicamente, se suelen omitir términos en la ecuación de LVK en las mallas. Para disminuir la posibilidad que ello ocurre, la formulación directa, que lleva a (3.6) permite revisar que no ha ocurrido esa omisión.

Error 2 Se cometen errores de signo en la expresión para la tensión en resistores compartidos por dos mallas vecinas. Esto se detecta en la estructura de la matriz de resistencias en (3.6) (ver observación más arriba).

Error 3 Se suelen omitir, y/o cometer errores en los signos de las fuentes de tensión independientes.

Una variante de interés

Supongamos que se sustituye la fuente de tensión independiente 10 por una fuente controlada, tal como se muestra en la figura, donde $v_{c10}(t) = r_{10}i_x(t)$, $r_{10} = 600$.



Inicialmente tratamos la fuente controlada como si fuese una fuente independiente; entonces la ecuación de la malla α se convierte en

$$(R_1 + R_2 + R_3)i_\alpha(t) - R_2i_\gamma(t) - R_3i_\gamma(t) = -v_{c10}(t) \quad (3.10)$$

Naturalmente que no podemos dejar el modelo en esa forma porque entonces tendríamos tres ecuaciones en cuatro incógnitas (las tres corrientes de mallas más la tensión $v_{c10}(t)$). Necesitamos una cuarta ecuación, para agregar a las ya obtenidas, o para eliminar la nueva incógnita. En este caso, la información que no hemos utilizado es la expresión del Tercer Postulado para la fuente 10. Esa expresión es

$$v_{c10}(t) = r_{10}i_x(t) = -r_{10}i_\gamma(t) \quad (3.11)$$

Entonces, al reemplazar (3.11) en (3.10), se llega a

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & -R_2 - r_{10} \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{f8}(t) - v_{f9}(t) \\ -v_{f8}(t) + v_{f7}(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

y numéricamente

$$\begin{bmatrix} 3,8 & -2 & -1,4 \\ -2 & 3,5 & -0,5 \\ -0,8 & -0,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = -10^{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

a partir de lo cual se obtiene (usando MATHEMATICA)

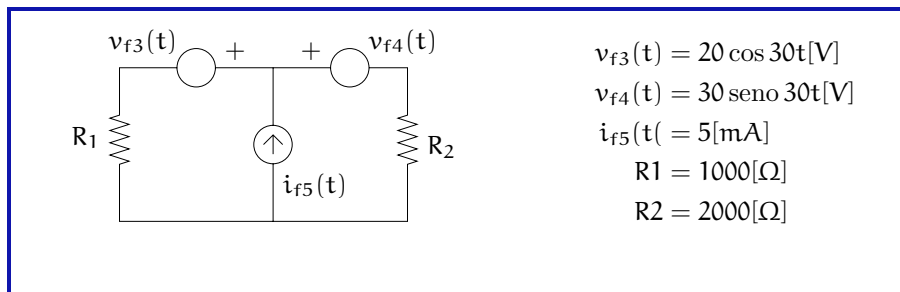
$$i_\alpha(t) = -2,862[\text{mA}]; \quad i_\beta(t) = -2,756[\text{mA}]; \quad i_\gamma(t) = -3,833[\text{mA}] \quad (3.14)$$

Es interesante observar la matriz de resistencias en (3.12); ya no es simétrica, como en el problema original. Ello se debe precisamente a la fuente controlada; sin embargo es conveniente tener presente que la asimetría sólo se puede presentar en redes con fuentes controladas; **pero no es suficiente**, es decir, hay redes que, teniendo fuentes controladas, mantienen la simetría en la matriz de resistencias del método de mallas.

3.2.2. Red resistiva con fuentes de tensión y de corriente.

Problema 3.2.

Considere la red resistiva de la figura. Determine las ecuaciones finales del método de mallas, exprese en forma matricial. Calcule la potencia instantánea recibida o entregada por la fuente de corriente.



Solución

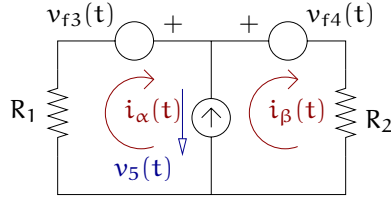
En este problema, la dificultad esencial es que, en una fuente ideal de corriente no existe una relación de Tercer Postulado que permita expresar la tensión en esa fuente, como función de la corriente de la fuente. Esta dificultad aparece de inmediato al aplicar método de mallas, porque allí se empieza por aplicar LVK, y luego se necesita reemplazar las tensiones en función de las corrientes o de funciones conocidas (en el caso de fuentes independientes de tensión). Una manera de resolver este problema, para una fuente con q fuentes independientes de corriente se desarrolla en tres pasos

Paso 1 Asigne a cada fuente independiente de corriente una tensión, se obtienen q tensiones suplementarias.

Paso 2 Formule el método de mallas, tratando esas tensiones suplementarias como si fuesen fuentes independientes. Esto genera un sistema de ecuaciones que tiene q incógnitas más que el número de ecuaciones.

Paso 3 Agregue las q ecuaciones de restricción que se generan al aplicar el Tercer Postulado para cada fuente independiente de corriente. Así se logra un conjunto consistente de ecuaciones.

Para aplicar la idea desarrollada previamente, consideremos la red con las variables definidas en la figura



Al aplicar el método de mallas se obtienen las siguientes ecuaciones

$$R_1 i_\alpha(t) = v_{f3}(t) + v_5(t) \quad (3.15)$$

$$R_2 i_\beta(t) = -v_{f4}(t) - v_5(t) \quad (3.16)$$

Así obtenemos dos ecuaciones, en tres incógnitas. Pues bien, falta utilizar la información que tenemos sobre la fuente de corriente, ella es

$$i_{f5}(t) = -i_\alpha(t) + i_\beta(t) \iff i_\beta(t) = i_{f5}(t) + i_\alpha(t) \quad (3.17)$$

Ahora podemos reemplazar $i_\beta(t)$, llegando a

$$R_1 i_\alpha(t) - v_5(t) = v_{f3}(t) \quad (3.18)$$

$$R_2 i_\alpha(t) + v_5(t) = -v_{f4}(t) - R_2 i_{f5}(t) \quad (3.19)$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en forma matricial, en la forma

$$\begin{bmatrix} R_1 & -1 \\ R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{f3}(t) \\ -v_{f4}(t) - R_2 i_{f5}(t) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Numéricamente

$$\begin{bmatrix} 1000 & -1 \\ 2000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \cos 30t \\ -30 \text{ seno } 30t[V] - 10 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Al resolver numéricamente, se obtiene

$$i_\alpha(t) = \frac{20}{3} \cos 30t - 10 \text{ seno } 30t - 10[\text{mA}]; \quad v_5(t) = -\frac{40}{3} \cos 30t - 10 \text{ seno } 30t - \frac{10}{3}[V] \quad (3.22)$$

y usando (3.17) se obtiene

$$i_\beta(t) = \frac{20}{3} \cos 30t - 10 \text{ seno } 30t + 5[\text{mA}] \quad (3.23)$$

Esta resolución merece los siguientes comentarios:

- La sustitución de una variable en función de las otras dos no es estrictamente necesaria, ya que se puede formular un sistema de tres ecuaciones linealmente independientes, en tres incógnitas. Así el modelo matemático resultaría

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -1 \\ 0 & R_2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{f3}(t) \\ -v_{f4}(t) \\ i_{f5}(t) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

- Dado que la fuente de corriente es el único elemento compartido, en las dos primeras ecuaciones no hay términos cruzados, es decir, en la ecuación de una malla no aparece explícitamente la corriente de la otra malla.
- La fuente de corriente establece una ecuación de restricción que afecta a las dos corrientes de mallas, ella es la tercera ecuación.

Errores

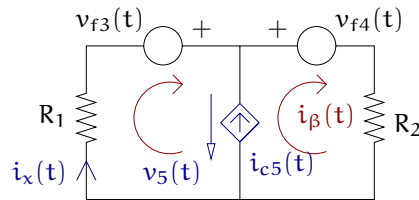
Error 1 Un error muy común es que, en forma axiomática se asigna tensión cero a la fuente de corriente. Ello puede ocurrir en algún caso particular; pero no es la situación general. Se puede visualizar lo erróneo que es esa asignación, en el caso general, si se considera que si fuese correcta, entonces las fuentes de corriente no entregarían ni recibirían potencia.

Error 2 Se suelen omitir, y/o cometer errores en los signos de las fuentes de tensión independientes.

Error 3 Errores numéricos. En todo caso, un chequeo básico es verificar que todas las señales del lazo deben ser una combinación lineal de todas las fuentes.

Una variante de interés

Supongamos que se sustituye la fuente de corriente independiente por una fuente de corriente controlada, tal como se muestra en la figura, donde $i_{c5}(t) = \beta_5 i_x(t)$, $\beta_5 = 3$.



En esta variante, lo único que cambia es la ecuación de restricción, la que ahora es

$$i_{c5}(t) = \beta_5 i_x(t) = \beta_5 i_\alpha(t) = -i_\alpha(t) + i_\beta(t) \iff (\beta_5 + 1)i_\alpha(t) = i_\beta(t) \quad (3.25)$$

Entonces el modelo matemático resultante es

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -1 \\ 0 & R_2 & 1 \\ \beta_5 + 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{f3}(t) \\ -v_{f4}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Al resolver numéricamente (usando MATHEMATICA) se obtiene

$$i_\alpha(t) = \frac{1}{450} \cos(30t) - \frac{1}{300} \text{seno}(30t) \quad (3.27)$$

$$i_\beta(t) = \frac{2}{225} \cos(30t) - \frac{1}{75} \text{seno}(30t) \quad (3.28)$$

$$v_5(t) = -\frac{160}{9} \cos(30t) - \frac{10}{3} \text{seno}(30t) \quad (3.29)$$

Este análisis tiene que ver con linealidad

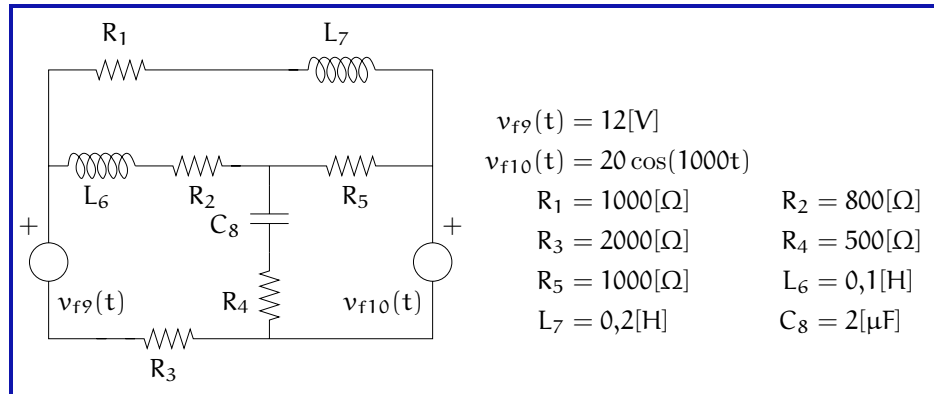
Observe que ninguna de estas señales tiene una componente constante, como ocurría en el problema original. Esta ausencia se debe a que ya no está la fuente independiente de corriente $i_{f5}(t)$ que forzaba la presencia de esa componente constante.

3.3. Método de mallas en redes dinámicas.

3.3.1. Red dinámica con fuentes de tensión.

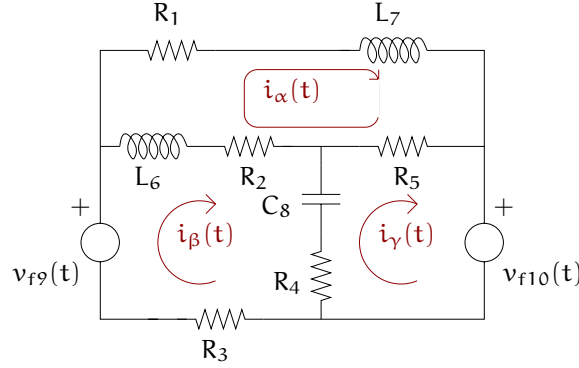
Problema 3.3.

Considere la red dinámica de la figura. Determine las ecuaciones finales del método de mallas, exprese en forma matricial.



Solución

Primero debemos definir las corrientes de mallas. Las elegimos todas en el mismo sentido, para facilitar la construcción del modelo matemático. El resultado de esta elección se muestra en la figura siguiente



Plantearémos la ecuación de tensiones (aplicación de LVK) para la malla α , reemplazando simultáneamente la tensión en cada elemento, por su valor conocido (si se trata de una fuente de tensión independiente) o por una expresión en las corrientes de malla, si se trata de un elemento pasivo (R, L o C). Consideraremos positivas aquellas tensiones que están en **referencia combinada** con la corriente de malla $i_\alpha(t)$; entonces resulta

$$R_1 i_\alpha(t) + L_7 D i_\alpha(t) + R_5 (i_\alpha(t) - i_\beta(t)) + R_2 (i_\alpha(t) - i_\beta(t)) + L_6 D (i_\alpha(t) - i_\gamma(t)) = 0 \quad (3.30)$$

Para la malla β se obtiene

$$L_6 D (i_\beta(t) - i_\alpha(t)) + R_2 (i_\beta(t) - i_\alpha(t)) + \frac{1}{C_8} D^{-1} (i_\beta(t) - i_\gamma(t)) + R_4 (i_\beta(t) - i_\gamma(t)) + R_3 i_\beta(t) - v_{f9}(t) = 0 \quad (3.31)$$

Finalmente, para la malla γ se llega a

$$R_5 (i_\gamma(t) - i_\alpha(t)) + R_4 (i_\gamma(t) - i_\beta(t)) + \frac{1}{C_8} D^{-1} (i_\gamma(t) - i_\beta(t)) + v_{f10}(t) = 0 \quad (3.32)$$

Podemos escribir matricialmente las tres ecuaciones precedentes, ello arroja como resultado

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_5 + L_6 D + L_7 D & -R_2 - L_6 D & -R_5 \\ -R_2 - L_6 D & R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{C_8} D^{-1} & -R_4 - \frac{1}{C_8} D^{-1} \\ -R_5 & -R_4 - \frac{1}{C_8} D^{-1} & R_4 + R_5 + \frac{1}{C_8} D^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{f9}(t) \\ -v_{f10}(t) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Reemplazando valores numéricos se llega a

$$\begin{bmatrix} 2800 + 0,3D & -800 - 0,1D & -1000 \\ -800 - 0,1D & 3300 + 5 * 10^5 D^{-1} & -500 - 5 * 10^5 D^{-1} \\ -1000 & -500 - 5 * 10^5 D^{-1} & 1500 + 5 * 10^5 D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -20 \cos(1900t) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Los resultados obtenidos merecen los siguientes comentarios

- Tal como se señaló en la introducción, en este curso no se han estudiado aún las herramientas para resolver el problema. Lo que sí podemos anticipar es que cada una de las corrientes de mallas se podría calcular a partir de una ecuación diferencial lineal, de coeficientes constantes, de tercer orden, no homogénea. Lo de tercer orden aparece porque hay tres componentes con capacidad de almacenar energía, y no hay restricción alguna para asignarles energía inicial arbitraria a cada uno.
- En el modelo (3.34), las condiciones iniciales están implícitas y sólo será necesario conocer sus valores numéricos si es que se ataca la tarea de resolver la ecuación diferencial para cada una de las señales incógnitas, es decir, las corrientes de mallas.
- Dada la elección de corrientes de mallas (todas en un mismo sentido) la matriz de coeficientes del método de mallas resulta simétrica.
- Los números que aparecen en (3.34) lucen muy diferentes unos de otros. Ello se debe a que se han usado componentes de valores razonables, en el Sistema Internacional de medidas (S.I.). Si en vez de usar el S.I., usáramos otras unidades, que forman un sistema consistente, esos números se verían comparable. En particular, para tiempo, frecuencia, voltaje, corriente, resistencia, capacitancia e inductancia podríamos usar [ms], [mHz], [V], [mA], [KΩ], [μF] y [H], respectivamente. Con esta selección de unidades, la ecuación (3.34) se convertiría en

$$\begin{bmatrix} 2,8 + 0,3D & -0,8 - 0,1D & -1 \\ -0,8 - 0,1D & 3,3 + 0,5D^{-1} & -0,5 - 0,5D^{-1} \\ -1 & -0,5 - 0,5D^{-1} & 1,5 + 0,5D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -20 \cos(1,9t) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Errores

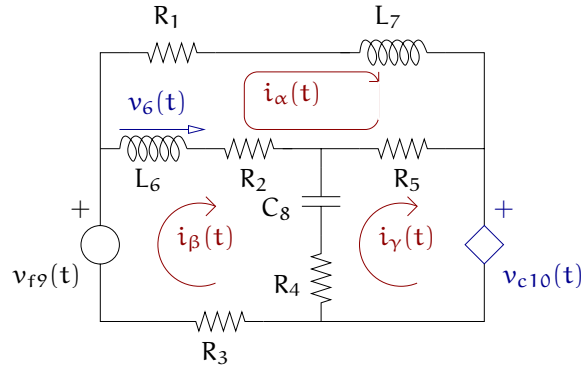
Error 1 Los errores más frecuentes aparecen al aplicar el Tercer Postulado para inductores y condensadores.

Error 2 Se suelen omitir, y/o cometer errores en los signos de las fuentes de tensión independientes.

Error 3 Se suelen omitir voltajes en la aplicación de LVK en cada malla

Una variante de interés

Supongamos que se sustituye la fuente de tensión independiente 10 por una fuente controlada de tensión, tal como se muestra en la figura, donde $v_{c10}(t) = \alpha_{10}v_6(t)$, $\alpha_{10} = 2$.



El cambio respecto del problema menor considera tres pasos, respecto de la ecuación matricial (3.33)

- Reemplace $v_{f10}(t)$ por $v_{c10}(t)$
- Exprese $v_{c10}(t)$ como

$$v_{c10}(t) = \alpha_{10}v_6(t) = \alpha_{10}L_6D(i_{\alpha}(t) - i_{\gamma}(t)) \quad (3.36)$$

- Reemplace la ecuación precedente, llevando el término al lado izquierdo de (3.33)

Siguiendo esos pasos se llega a

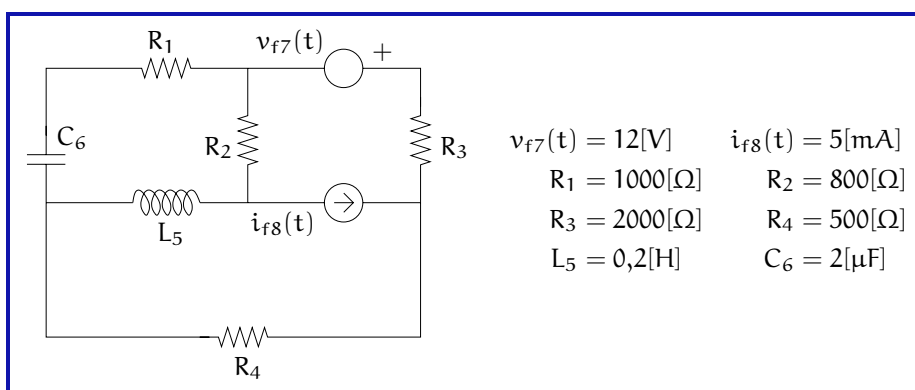
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_5 + L_6D + L_7D & -R_2 - L_6D & -R_5 \\ -R_2 - L_6D & R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{C_8}D^{-1} & -R_4 - \frac{1}{C_8}D^{-1} \\ -R_5 + \alpha_{10}L_6D & -R_4 - \frac{1}{C_8}D^{-1} & R_4 + R_5 + \frac{1}{C_8}D^{-1} - \alpha_{10}L_6D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha}(t) \\ i_{\beta}(t) \\ i_{\gamma}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{f9}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Es interesante observar que la fuente controlada rompe la simetría de la matriz de mallas, que se anotó en el problema original.

3.3.2. Red dinámica con fuente de corriente.

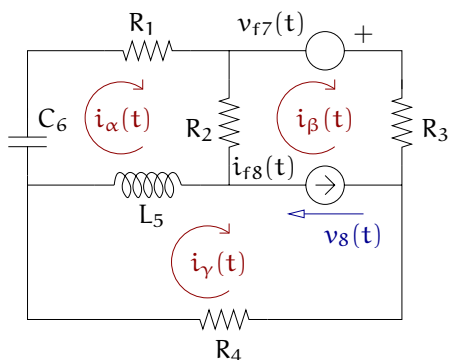
Problema 3.4.

Considere la red dinámica de la figura. Determine las ecuaciones finales del método de mallas, exprese en forma matricial.



Solución

Para la solución de este problema definimos las corrientes de mallas, como se muestra en la figura



La principal dificultad en este caso es que no existe una relación de Tercer Postulado que ligue directamente la corriente y la tensión en la fuente de

corriente; por ello no podemos expresar la tensión en ella, en función de la corriente. La estrategia a seguir es, inicialmente tratar el voltaje $v_8(t)$ como si fuese una fuente de tensión. Esta estrategia entrega como resultado un conjunto de tres ecuaciones linealmente independientes, en cuatro incógnitas: las tres corrientes de mallas más la tensión $v_8(t)$. Para obtener un sistema consistente de ecuaciones, debemos agregar otra ecuación l.i. sin agregar incógnitas; para ello, aplicamos el Tercer Postulado de la fuente de corriente.

Para la malla α se obtiene

$$\frac{1}{C_6}D^{-1}i_\alpha(t) + R_1i_\alpha(t) + L_5D(i_\alpha(t) - i_\gamma(t)) + R_2(i_\alpha(t) - i_\beta(t)) = 0 \quad (3.38)$$

Para la malla β se obtiene

$$R_2D(i_\beta(t) - i_\alpha(t)) + R_3i_\beta(t) - v_{f7}(t) - v_8(t) = 0 \quad (3.39)$$

Finalmente, para la malla γ se llega a

$$R_4i_\gamma(t) + L_5D(i_\gamma(t)) - i_\alpha(t) + v_8(t) = 0 \quad (3.40)$$

Podemos escribir matricialmente las tres ecuaciones precedentes, ello arroja como resultado

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + L_5D + \frac{1}{C_6}D^{-1} & -R_2 & -L_5D \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 \\ -L_5D & 0 & R_4 + L_5D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{f7}(t) + v_8(t) \\ -v_8(t) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

La ecuación que falta es

$$i_{f8(t)} = i_\gamma(t) - i_\beta(t) \quad (3.42)$$

Así, se obtiene un modelo consistente, el que se expresa matricialmente como

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + L_5D + \frac{1}{C_6}D^{-1} & -R_2 & -L_5D & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 & -1 \\ -L_5D & 0 & R_4 + L_5D & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \\ v_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{f7}(t) \\ 0 \\ i_{f8}(t) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Reemplazando valores numéricos se llega a

$$\begin{bmatrix} 1800 + 0,2D + 5 \cdot 10^5 D^{-1} & -800 & -0,2D & 0 \\ -800 & 2800 & 0 & -1 \\ -0,2D & 0 & 500 + 0,2D & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \\ v_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0,005 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Los resultados obtenidos merecen los siguientes comentarios

- La solución de este sistema de ecuaciones requiere conocer dos condiciones iniciales: la corriente inicial en L_5 y la tensión inicial en C_6 .
- El modelo matemático pudo haber se planteado, desde un comienzo, sólo para dos mallas. Por ejemplo se pueden analizar las mallas α y β , y la corriente $i_\gamma(t)$ se reemplaza por $i_{f8}(t) + i_\beta(t)$ en las ecuaciones (3.38) y (3.39).

Errores

Error 1 Los errores más frecuentes aparecen al aplicar el Tercer Postulado para inductores y condensadores.

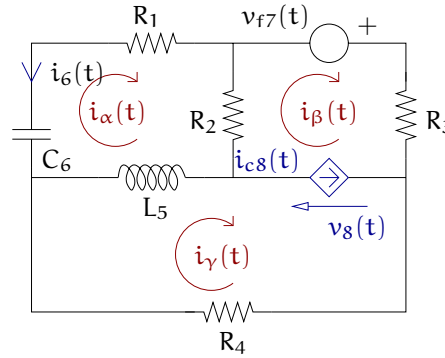
Error 2 Se suelen omitir, y/o cometer errores en los signos de las fuentes de tensión independientes.

Error 3 Se suelen omitir voltajes en la aplicación de LVK en cada malla

Error 4 Asignar, desde un comienzo, voltaje cero, $\forall t \geq 0$, a las fuentes de corriente.

Una variante de interés

Supongamos que se sustituye la fuente de corriente independiente 8 por una fuente controlada de corriente, tal como se muestra en la figura, donde $i_{c8}(t) = \beta_8 i_6(t)$, $\beta_8 = 3$.



El cambio respecto del problema menor considera tres pasos, respecto de la ecuación matricial (3.41)

- Expresé $i_{c8}(t)$ como $i_{c8}(t) = -\beta_8 i_\alpha(t)$
- Use la expresión anterior en (3.42) para llegar a

$$i_\gamma(t) - i_\beta(t) = -\beta_8 i_\alpha(t) \iff \beta_8 i_\alpha(t) - i_\beta(t) + i_\gamma(t) = 0 \quad (3.45)$$

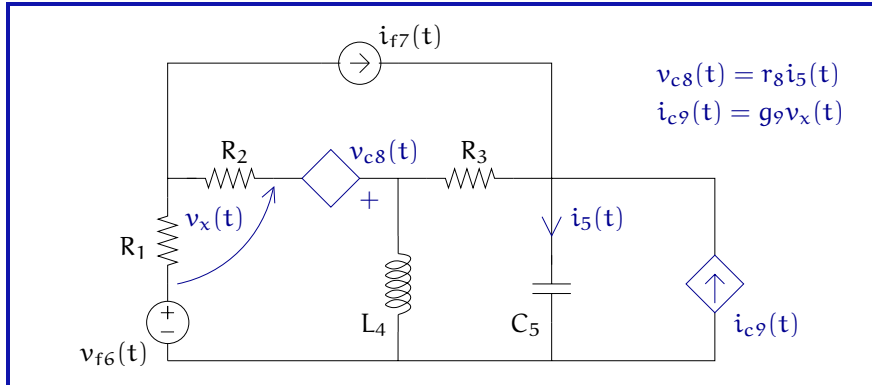
- Agregue la ecuación precedente en (3.41), con lo que se obtiene

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + L_5 D + \frac{1}{C_6} D^{-1} & -R_2 & -L_5 D & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 & -1 \\ -L_5 D & 0 & R_4 + L_5 D & 1 \\ \beta_8 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \\ v_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{f7}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

3.3.3. Red dinámica con fuentes de corriente, de tensión y con fuentes controladas.

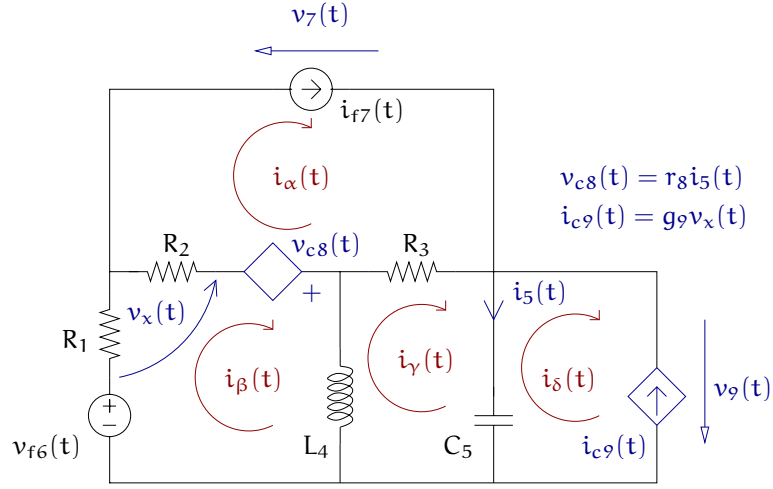
Problema 3.5.

La red dinámica de la figura incluye todos los elementos considerados en los problemas anteriores. Para esta red se pide determinar las ecuaciones finales del método de mallas, y expresarlas en forma matricial.



Solución

El tratamiento por mallas se hará en el predicamento que está subyacente en todo este capítulo: **interesa calcular todas las variables de la red, sin hacer ningún tipo de transformación previa, ni aplicar relación de equivalencia alguna.** Para ello definimos cuatro corrientes de mallas, como se indica en la figura. Además, para las dos fuentes de corriente (la independiente 7 y la controlada 9) se han definido los voltajes $v_7(t)$ y $v_9(t)$ respectivamente. Inicialmente, esos voltajes se tratarán como si fuesen fuentes de voltaje independientes; igual tratamiento se dará a la tensión $v_{c8}(t)$.



La ecuación asociada a la malla α es

$$R_2(i_\alpha(t) - i_\beta(t)) + v_7(t) + R_3(i_\alpha(t) - i_\gamma(t)) + v_{c8}(t) = 0 \quad (3.47)$$

A su vez, para la malla β

$$R_1 i_\beta(t) + R_2(i_\beta(t) - i_\alpha(t)) - v_{c8}(t) + L_4 D(i_\beta(t) - i_\gamma(t)) - v_{f6}(t) = 0 \quad (3.48)$$

Para la malla γ resulta

$$L_4 D(i_\gamma(t) - i_\beta(t)) + R_3(i_\gamma(t) - i_\alpha(t)) + C_5 D^{-1}(i_\gamma(t) - i_\delta(t)) = 0 \quad (3.49)$$

Finalmente, para la malla δ se obtiene

$$C_5 D^{-1}(i_\delta(t) - i_\gamma(t)) - v_9(t) = 0 \quad (3.50)$$

Ordenando matricialmente estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 & 0 \\ -R_2 & R_1 + R_2 + L_4 D & -L_4 D & 0 \\ -R_3 & -L_4 D & R_3 + L_4 D + C_5 D^{-1} & -C_5 D^{-1} \\ 0 & 0 & -C_5 D^{-1} & C_5 D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \\ i_\delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_7(t) - v_{c8}(t) \\ v_{f6}(t) + v_{c8}(t) \\ 0 \\ v_9(t) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Se observa que tenemos un sistema de cuatro ecuaciones linealmente independientes, en **siete** incógnitas. Necesitamos tres ecuaciones l.i. adicionales; ellas deben provenir de la información no usada: el Tercer Postulado para las dos fuentes controladas y para la fuente independiente de corriente. Estas ecuaciones son

$$i_{f7}(t) = i_{\alpha}(t) \quad (3.52)$$

$$v_{c8}(t) = r_8 i_5(t) = r_8 (i_{\gamma}(t) - i_{\delta}(t)) \quad (3.53)$$

$$i_{c9}(t) = -i_{\delta}(t) = g_9 v_x(t) = g_9 (R_2 i_{\alpha}(t) - R_2 i_{\beta}(t) - R_1 i_{\beta}(t)) \quad (3.54)$$

$$= g_9 R_2 i_{f7}(t) - g_9 (R_1 + R_2) i_{\beta}(t) \quad (3.55)$$

La primera ecuación permite eliminar una de las incógnitas, ya que $i_{\alpha}(t)$ se hace conocida; las otras dos agregan las ecuaciones que se necesitan para obtener un modelo matemático consistente. Al incorporar estas dos ecuaciones en (3.51), se llega a

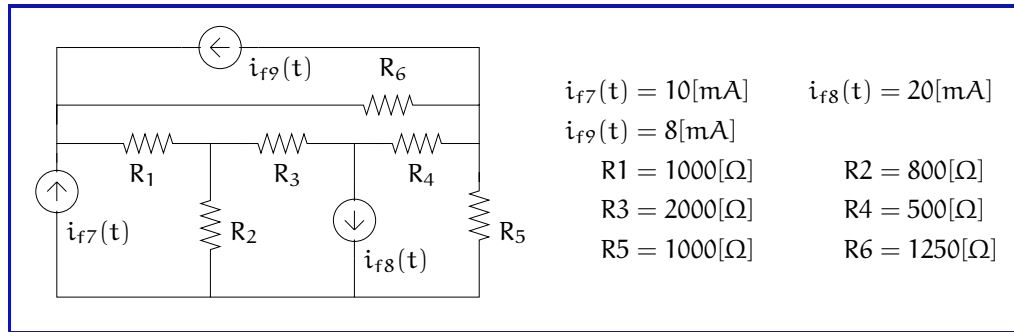
$$\begin{bmatrix} -R_2 & -R_3 + r_8 & -r_8 & 1 & 0 \\ R_1 + R_2 + L_4 D & -L_4 D - r_8 & r_8 & 0 & 0 \\ -L_4 D & R_3 + L_4 D + C_5 D^{-1} & -C_5 D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -C_5 D^{-1} & C_5 D^{-1} & 0 & -1 \\ g_9 (R_1 + R_2) & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\beta}(t) \\ i_{\gamma}(t) \\ i_{\delta}(t) \\ v_7(t) \\ v_9(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_2 + R_3) i_{f7}(t) \\ v_{f6}(t) + R_2 i_{f7}(t) \\ R_3 i_{f7}(t) \\ 0 \\ g_9 R_2 i_{f7}(t) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

3.4. Método de nodos en redes resistivas.

3.4.1. Red resistiva con fuentes de corriente.

Problema 3.6.

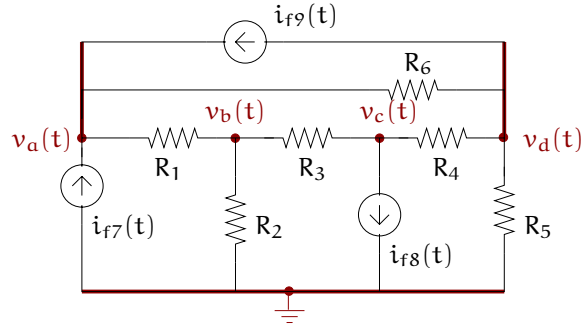
Considere la red resistiva de la figura. Determine las ecuaciones finales del método de nodos, exprese en forma matricial. Finalmente, resuelva para calcular la potencia disipada en cada resistor.



Solución

Primero elegimos un nodo de tierra, respecto del cual se definen las cuatro tensiones de nodos, $v_a(t)$, $v_b(t)$, $v_c(t)$ y $v_d(t)$. Ellas aparecen definidas en la figura siguiente

El color granate en algunos segmentos enfatiza que cada uno de ellos forman un nodo, porque a lo largo de todo el segmento la tensión es la misma.



Para plantear las ecuaciones, por simplicidad usaremos conductancias en vez de resistencias, así $G_k = R_k^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, 6$. La idea es, para cada nodo, aplicar LCK, seguida por Tercer Postulado (en este caso, la ley de Ohm). Al aplicar la ley de Ohm, se expresan corrientes en función de tensiones; todas estas últimas se pueden expresar como combinación lineal de las tensiones de nodos.

$$\text{nodo a: } G_1(v_a(t) - v_b(t)) + G_6(v_a(t) - v_d(t) - i_{f7}(t) - i_{f9}(t) = 0 \quad (3.57)$$

$$\text{nodo b: } G_1(v_b(t) - v_a(t)) + G_2 v_b(t) + G_3(v_b(t) - v_c(t)) = 0 \quad (3.58)$$

$$\text{nodo c: } G_3(v_c(t) - v_b(t)) + G_4(v_c(t) - v_d(t)) + i_{f8}(t) = 0 \quad (3.59)$$

$$\text{nodo d: } G_4(v_d(t) - v_c(t)) + G_5 v_d(t) + g_6(v_d(t) - v_a(t)) + i_{f9}(t) = 0 \quad (3.60)$$

Ordenando matricialmente se obtiene

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_6 & -G_1 & 0 & -G_6 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_6 & 0 & -G_4 & G_3 + G_4 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{f7}(t) + i_{f9}(t) \\ 0 \\ -i_{f8}(t) \\ -i_{f9}(t) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Si ahora usamos valores numéricos (con conductancias en [mS], corrientes en [mA] y tensiones en [V]), se obtiene

El conjunto de unidades [mS], [mA], [V] y [mW] forman un sistema de unidades consistente.

$$\begin{bmatrix} 1,8 & -1 & 0 & -0,8 \\ -1 & 1,75 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 & -2 \\ -0,8 & 0 & -2 & 3,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ -20 \\ -8 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Resolviendo numéricamente se obtiene

$$[v_a(t) \ v_b(t) \ v_c(t) \ v_d(t)] = [-1,28 \ -7,18 \ -22,56 \ -16,41] [V] \quad (3.63)$$

Para calcular la potencia disipada en cada resistencia, debemos calcular primero la tensión en cada una de las resistencias, ya que la potencia disipada en la resistencia R_k está dada por

$$p_k(t) = \frac{v_k(t)^2}{R_k} \quad (3.64)$$

donde $v_k(t)$ es la tensión en R_k . Es preciso enfatizar que el valor numérico de esta expresión no depende del signo de $v_k(t)$. Por ello podemos definir

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \\ v_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,90 \\ -7,18 \\ 15,38 \\ -6,15 \\ -16,41 \\ 15,13 \end{bmatrix} [V] \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \\ p_5(t) \\ p_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34,78 \\ 41,24 \\ 473,37 \\ 18,93 \\ 269,30 \\ 286,08 \end{bmatrix} [mW] \quad (3.65)$$

Este problema merece los siguientes comentarios

- La elección del nodo de tierra es arbitraria; se suele elegir el nodo más visible en el diagrama de la red, pero cualquier otro nodo es igualmente elegible. En la gran mayoría de los sistemas eléctricos, existe una conexión a la tierra física, a través de uno de los conductores del sistema de alimentación de energía; es por lo tanto la elección natural para nodo de tierra.
- La matriz de conductancias que multiplica las tensiones de nodos resultó simétrica. Esto es siempre así, cuando la red no contiene fuentes controladas, y siempre que todas las tensiones de nodo sean elegidas con la misma orientación, respecto de la tierra.
- El término (k,k) de la matriz de nodos corresponde a la suma de las conductancias conectadas al nodo k . El término (j,k) , $j \neq k$, corresponde al negativo de la suma de conductancias conectadas entre el nodo j y el nodo k .
- El uso de un sistema de unidades (derivado del S.I.) es, en el fondo un escalamiento que permite simplicidad en el cálculo numérico.

Hay una dualidad con el método de mallas y la elección de orientación de las corrientes de mallas.

Errores

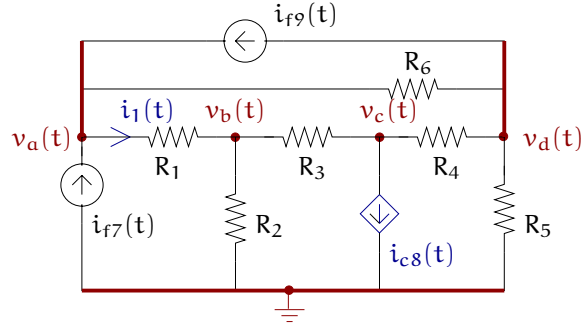
Error 1 Se suelen confundir numéricamente las resistencias con las conductancias.

Error 2 Se producen errores de signo de las fuentes independientes de corrientes

Error 3 Se omiten conductancias en la construcción de los términos de la matriz de nodos

Una variante de interés

Supongamos que se sustituye la fuente de corriente independiente 8 por una fuente controlada de corriente, tal como se muestra en la figura, donde $i_{c8}(t) = \beta_8 i_1(t)$, $\beta_8 = 3$.



En este caso, el análisis sigue los siguientes pasos, respecto de la ecuación matricial (3.61)

- Reemplazar $i_{f8}(t)$ por $i_{c8}(t)$
- Aplicar el Tercer Postulado de la fuente controlada

$$i_{c8}(t) = \beta_8 i_1(t) = \beta_8 G_1 (v_a(t) - v_b(t)) \quad (3.66)$$

- Reemplazar esta última ecuación en la ecuación matricial

Estos pasos conducen a

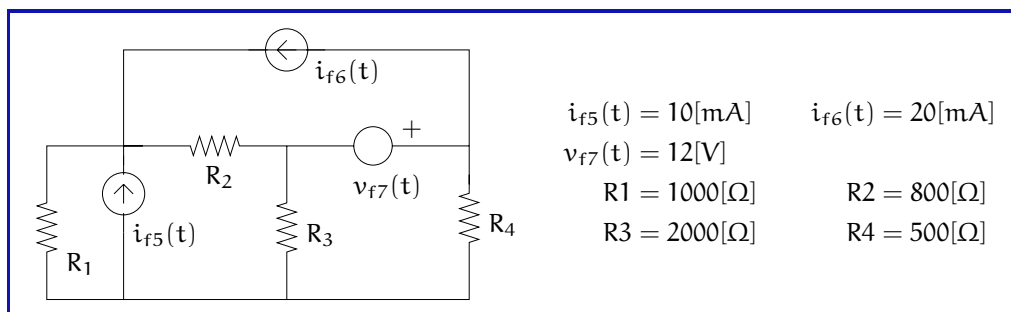
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_6 & -G_1 & 0 & -G_6 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 \\ \beta_8 G_1 & -\beta_8 G_1 - G_3 & G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_6 & 0 & -G_4 & G_3 + G_4 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{f7}(t) + i_{f9}(t) \\ 0 \\ 0 \\ -i_{f9}(t) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Un cambio notable es la asimetría que ahora tiene la matriz de nodos.

3.4.2. Red resistiva con fuentes con fuentes de corriente y de tensión.

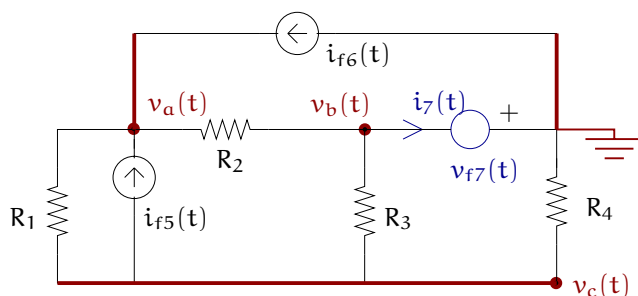
Problema 3.7.

Considere la red resistiva de la figura. Determine las ecuaciones finales del método de nodos, exprese en forma matricial.



Solución

Lo primero que hacemos es elegir un nodo de tierra. Para ilustrar la idea que esta elección es arbitraria, se ha elegido uno no convencional, tal como se ilustra en la figura.



Una vez elegido el nodo de tierra definimos las tensiones de nodo a tierra, $v_a(t)$, $v_b(t)$ y $v_c(t)$. La fuente independiente de tensión 7 genera una dificultad, ya que la corriente en ella no se puede expresar en función de la tensión en ella, vía Tercer Postulado. Por ello, inicialmente, la trataremos como si fuese una fuente independiente de corriente $i_7(t)$. Ahora podemos plantear las ecuaciones de LK para los nodos

$$\text{nodo a: } G_1(v_a(t) - v_c(t)) + G_2(v_a(t) - v_b(t) - i_{f5}(t) - i_{f6}(t)) = 0 \quad (3.68)$$

$$\text{nodo b: } G_2(v_b(t) - v_a(t)) + G_3(v_b(t) - v_c(t)) + i_7(t) = 0 \quad (3.69)$$

$$\text{nodo c: } G_1(v_c(t) - v_a(t)) + G_3(v_c(t) - v_b(t)) + G_4 v_c(t) + i_{f5}(t) = 0 \quad (3.70)$$

Al ordenar matricialmente se obtiene

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & -G_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{f5}(t) + i_{f6}(t) \\ -i_7(t) \\ -i_{f5}(t) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Este no es aún un sistema consistente porque tiene más incógnitas que ecuaciones. Para resolver ese defecto, debemos utilizar la información aún no usada: el Tercer Postulado de la fuente 7, lo que permite agregar la ecuación

$$v_b(t) = -v_{f7}(t) \quad (3.72)$$

Entonces, esta ecuación puede ser utilizada para eliminar una de las variables ($v_b(t)$) en la ecuación (3.71) la que se convierte en

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_1 & 0 \\ -G_2 & -G_3 & 1 \\ -G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_c(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{f5}(t) + i_{f6}(t) - G_2 v_{f7}(t) \\ (G_2 + G_3) v_{f7}(t) \\ -i_{f5}(t) + G_3 v_{f7}(t) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Hemos usado nuevamente el sistema de unidades [KS], [mA] y [V].

Al evaluar numéricamente se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2,25 & -1 & 0 \\ -1,25 & -0,5 & 1 \\ -1 & 3,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_c(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Al resolver esta ecuación matricial, se obtiene

$$\begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_c(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,05[\text{V}] \\ 0,87[\text{V}] \\ 30,25[\text{mA}] \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

La solución de este problema invita a hacer los siguientes comentarios

- Las fuentes de tensión independientes imponen una restricción a las tensiones de nodo a tierra. En este caso particular, esta restricción consiste en que la diferencia de dos de esas tensiones está determinada de antemano, por el valor de la fuente (12 [V])

Capítulo 4

REDES ELÉCTRICAS EQUIVALENTES.

4.1. Introducción

El problema de analizar una red eléctrica tiene, como objetivo general, calcular todas las corrientes y tensiones en la red. Con esos valores, se pueden calcular potencias, energías, cargas y flujos magnéticos. Sin embargo, suele ocurrir, con bastante frecuencia, que el interés del analista se reduce a un conjunto pequeño de corrientes y tensiones. Por ejemplo, nos puede interesar sólo lo que ocurre en un resistor que modela la carga alimentada por un complejo amplificador, el que a su vez es modelado por una también compleja red eléctrica. En esos casos cobra especial interés y utilidad el concepto de las redes equivalentes.

En este capítulo desarrollaremos ejemplos de construcción de redes equivalentes. Es importante recordar que la equivalencia que nos interesa es aquella que permite reemplazar una red por su equivalente, sin que el *resto del mundo*, se entere, cualquiera que él sea.

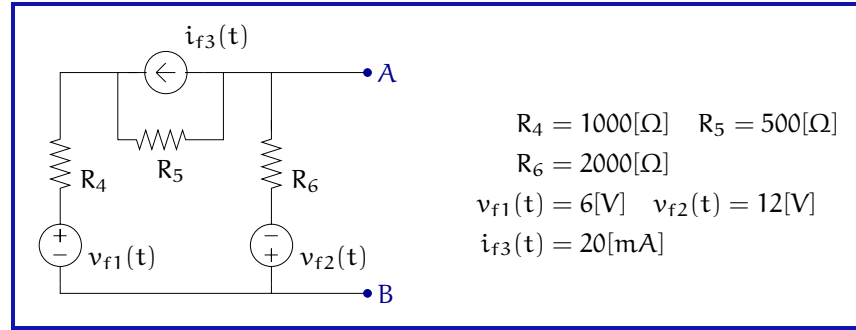
Las equivalencias de redes eléctricas tienen las tres propiedades de toda equivalencia: reflexividad (toda red es equivalente a si misma), simetría (si una red A es equivalente a una red B, entonces la red B es equivalente a la red A) y transitividad (si una red A es equivalente a una red B, y ésta es equivalente a una red C, entonces, la red A es equivalente a la red C).

4.2. Redes resistivas

4.2.1. Transformaciones y movilidad de fuentes

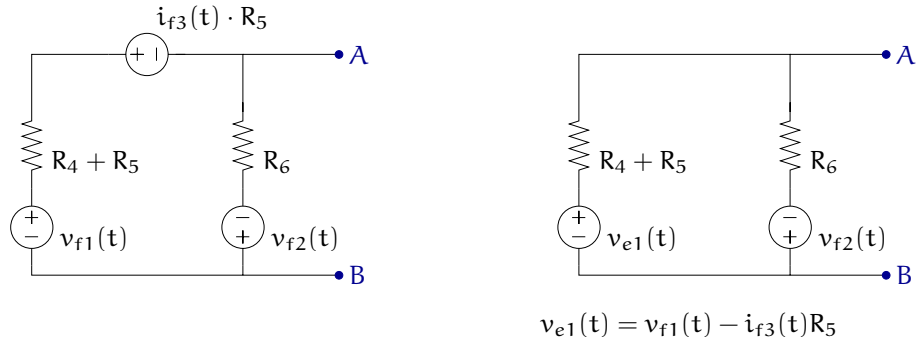
Problema 4.1.

En la red de la figura, se pide determinar la red equivalente más simple vista desde los terminales A-B.



Solución

La estrategia general consiste en transformar la fuente de corriente 3, con el resistor 5 en paralelo, en una fuente de tensión con el mismo resistor en serie. Luego esa fuente y su resistor, se combinan en serie con la fuente de tensión 1 y el resistor 4. Finalmente, lo que queda son dos fuentes de tensión, con su respectivo resistor en serie, conectadas en paralelo. Esta estructura resultante se puede simplificar, usando el teorema de Millman para fuentes de tensión. Los dos primeros pasos de esta solución se muestran en la figura



Ahora aplicando Millman se llega a una fuente de tensión $v_M(t)$ en serie con una resistencia R_M ; estas cantidades están dadas por

$$v_M(t) = \frac{(v_{f1}(t) - i_{f3}R_5)R_6 - v_{f2}(t)(R_4 + R_5)}{R_4 + R_5 + R_6}; R_M = (R_4 + R_5) // R_6 \quad (4.1)$$

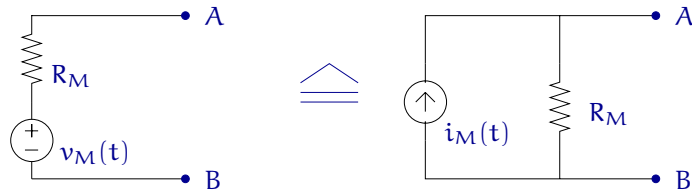
Una transformación de fuente adicional permite obtener un red equivalente constituida por fuente de corriente $i_M(t)$ y la misma resistencia en paralelo. En este caso

$$i_M(t) = \frac{v_M(t)}{R_M} \quad (4.2)$$

Al evaluar numéricamente, se obtiene

$$v_M(t) = -\frac{52}{7} \text{ [V]}; \quad R_M = \frac{6000}{7} \text{ [\Omega]}; \quad i_M(t) = -\frac{26}{3} \text{ [mA]} \quad (4.3)$$

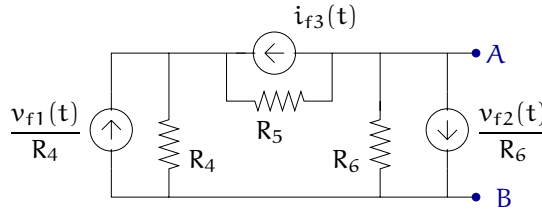
Las dos equivalencias que se construyen a través del procedimiento explicado, se muestran en la figura



Los comentarios y observaciones de mayor relevancia son

- Estas redes equivalentes pueden reemplazar a la red original, y el resto del mundo, conectado a los terminales A y B, no distinguirá entre la red original y sus equivalentes.
- Sin perjuicio de lo anterior, es clave percatarse que de estas redes equivalentes tan simples no se puede extraer información sobre la red original. En particular, no sabremos por ejemplo cuánta potencia entregaba o recibía cada una de las tres fuentes independientes, presentes en la red original.
- Una forma alternativa de construir el equivalente (por supuesto que llegando al mismo resultado que se muestra más arriba) es primero transformar la fuente de tensión 1 con su resistencia R_4 en serie, a una fuente de corriente en paralelo con la misma resistencia. Así se llega a una rama que conecta en serie dos fuentes de corriente, con su respectivas resistencias en

paralelo; ahí se puede aplicar Millman para fuentes de corriente. Por otro lado la fuente de tensión 2, con su resistencia en serie R_6 se transforma en fuente corriente con el mismo resistor en paralelo, resultando entonces dos fuentes de corriente en paralelo, con sus respectivas resistencias, también en paralelo. Esto se muestra en la figura



- Se puede verificar que R_M se puede calcular en forma independiente del cálculo de la fuente Millman. En efecto, si en la red original se hacen cero las fuentes de tensión y la fuente de corriente, entonces la resistencia Millman es el paralelo de R_6 con el combinado serie de R_4 y R_5 .
- Los equivalentes obtenidos corresponden al equivalente Thevenin (fuente de tensión $v_M(t)$ con R_M en serie) y al equivalente Norton (fuente de corriente $i_M(t)$ con R_M en paralelo).

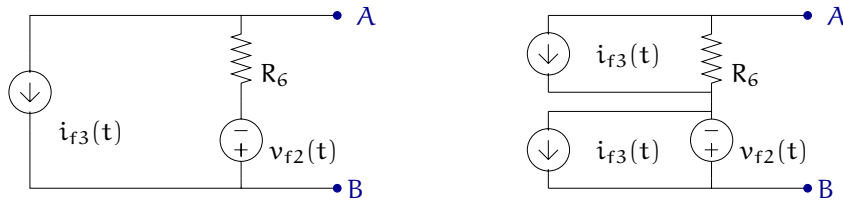
Errores

Los errores mas frecuentes que se someten al resolver problemas de este tipo son:

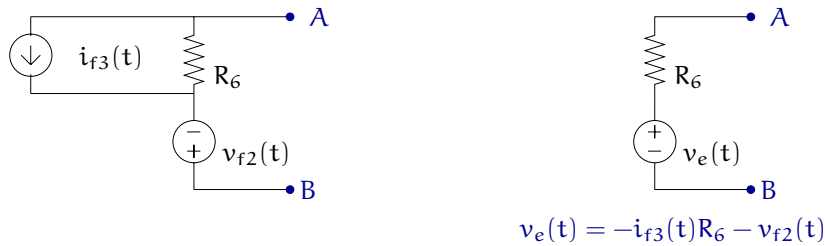
- Error 1** Usar fórmulas equivocadas para transformar fuentes de corriente. Nótese que este error es similar a aplicar mal la ley de Ohm.
- Error 2** Cometer errores de signo, por mala consideración de las orientaciones de las fuentes.
- Error 3** Aplicar mal las fórmulas de Millman. Se sugiere desarrollar siempre la fórmulas en forma literal, y verificar la consistencia de unidades; se puede detectar así una cantidad significativa de errores.

Una variante de interés

Considere la red original, en la que se supone que $R_5 \rightarrow \infty$. Entonces, la fuente de corriente queda directamente en serie con la fuente de tensión 1 y con R_4 . Aplicando redundancia serie, podemos entonces reemplazar, tanto $v_{f1}(t)$ como R_4 por un cortocircuito. Luego, aplicamos movilidad de fuentes de corriente para obtener la red que se muestra en la figura



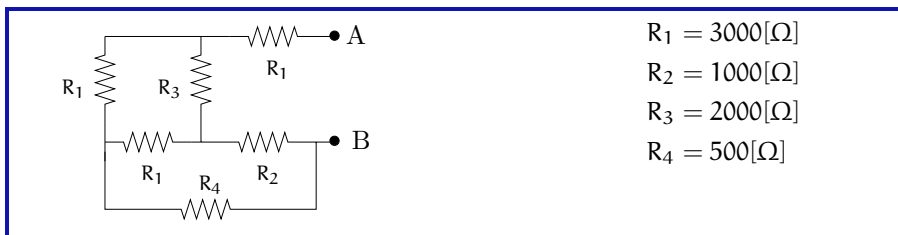
En la red de la derecha se aprecia que se puede aplicar redundancia paralelo al conjunto fuente de tensión 2 y fuente de corriente 3. Esto lleva a la eliminación de la fuente de corriente, resultando los pasos que se muestran en la figura



4.2.2. Red resistiva con y sin fuentes controladas

Problema 4.2.

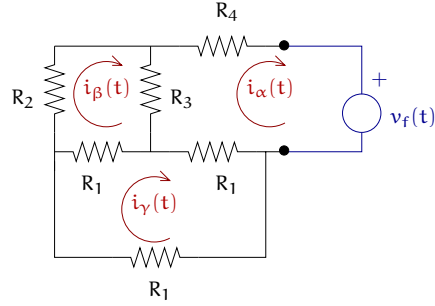
En la red de la figura, se pide determinar la red equivalente más simple vista desde los terminales A-B.



Solución

Dado que no se reconoce una estructura serie o paralelo, no podemos usar esas combinaciones para resolver el problema; por ello, el método más , el que consiste en usar una fuente de excitación arbitraria, como se muestra en la figura

Dos resistores están en serie (en paralelo) cuando tienen la misma corriente (tensión) con independencia del resto del mundo.



Luego, se analiza esta red por el método de mallas y se determina que esta red es equivalente a un resistor con resistencia R_{eq} dada por

El signo - aparece porque $v_f(t)$ e $i_\alpha(t)$ no están en referencia combinada.

$$R_{eq} = -\frac{v_f(t)}{i_\alpha(t)} \quad (4.4)$$

En consecuencia procedemos al análisis de mallas de la red, con las corrientes definidas. Por formulación directa, obtenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_1 \\ -R_3 & R_1 + R_2 + R_3 & -R_1 \\ -R_1 & -R_1 & 3R_1 \end{bmatrix}}_{[R_M]} \underbrace{\begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix}}_{[I]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -v_f(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[E]} \quad (4.5)$$

Entonces, lo único que interesa es calcular el término $(1,1)$ de la matriz $[R_M]^{-1}$, ya que

$$[I] = [R_M]^{-1}[E] \Rightarrow i_\alpha(t) = -[R_M]_{(1,1)}^{-1} v_f(t) \quad (4.6)$$

Por lo tanto,

$$R_{eq} = \frac{1}{[R_M]_{(1,1)}^{-1}} \quad (4.7)$$

Usando MAPLE o MATHEMATICA se puede calcular el inverso algebraico de $[R_M]$, y extraer el elemento $(1,1)$ de esa matrix inversa, el que lleva a

$$R_{eq} = -\frac{\det\{[R_M]\}}{R_1(2R_1 + 3R_2 + 3R_3)} \quad (4.8)$$

donde

$$\det\{[R_M]\} = R_1^3 + 2R_1^2R_2 + 2R_3R_1^2 + 2R_4R_1^2 + 3R_4R_1R_2 + 3R_4R_3R_1 + 3R_3R_1R_2$$

Usando los valores numéricos dados, finalmente se obtiene

$$R_{eq} = 2700 [\Omega] \quad (4.9)$$

El procedimiento desarrollado merece los siguientes comentarios

- El método utilizado requiere que la red contenga sólo resistores y fuentes controlados (como se ilustrará en la variante de interés).
- El valor de la fuente de tensión aplicada no juega ningún rol, porque al ser la red lineal toda corriente de malla sera proporcional a esa tensión.
- Dependiendo de la topología de la red, puede ser mas sencillo calcular la resistencia equivalente, conectando una fuente independiente de corriente y aplicando método de nodos.
- Una comprobación básica de la expresión literal para R_{eq} consiste en verificar la dimensión resultante, la cual debe arrojar, como unidad $[\Omega]$. Se observa que eso se cumple porque la dimensión del determinante es $[\Omega^3]$, y el denominador en (4.8) tiene dimensión $[\Omega^2]$.

Errores

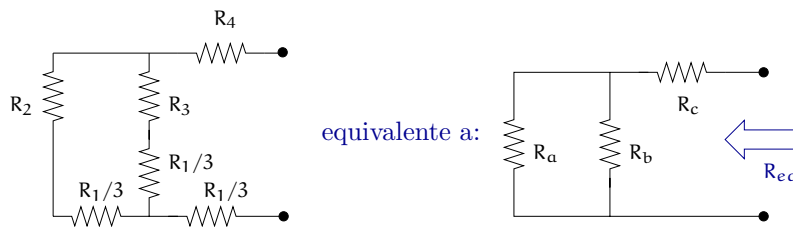
Los errores mas frecuentes que se someten al resolver problemas de este tipo son:

Error 1 Al calcular la resistencia equivalente, se usa el recíproco de la ley de Ohm, calculando así, la conductancia equivalente, en vez de la resistencia equivalente.

Error 2 El valor numérico obtenido es negativo. Ello sólo es posible (pero no necesario) si hay fuentes controladas.

Error 3 El valor calculado de la resistencia equivalente depende del valor de la fuente agregada de valor $v_f(t)$. Ello no es correcto, porque la red es lineal y tiene una única excitación; en consecuencia, toda corriente o tensión en la red es proporcional a $v_f(t)$. Así cualquier cociente de dos de esas variables es independiente de $v_f(t)$.

Una manera alternativa para calcular la resistencia equivalente es transformar en estrella, el triángulo formado por los tres resistores de resistencia R_1 . Si hacemos eso, usando los resultados del Apéndice A, se llega a la red de la figura



donde

$$R_a = \frac{R_1 + 3R_2}{3}; \quad R_b = \frac{R_1 + 3R_3}{3}; \quad R_c = \frac{R_1 + 3R_4}{3} \quad (4.10)$$

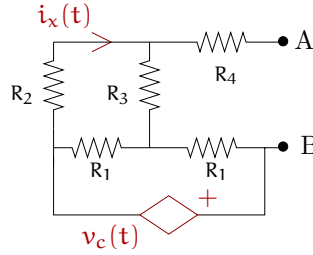
Así, se obtiene

$$R_{eq} = R_c + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} \quad (4.11)$$

Evaluando numéricamente, se llega al mismo valor anterior, es decir, $R_{eq} = 2700 \text{ } [\Omega]$.

Una variante de interés

Considere la red original, en la que se ha reemplazado un resistor por una fuente controlada, tal como se muestra en la figura



donde $v_c(t) = R_x i_x(t)$, con $R_x = 800 \text{ } [\Omega]$.

Entonces la resistencia equivalente se puede calcular con el mismo enfoque utilizado, pero introduciendo el cambio debido a la fuente controlada. Así la ecuación (4.5) se transforma en

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_1 \\ -R_3 & R_1 + R_2 + R_3 & -R_1 \\ -R_1 + R_x & -R_1 & 2R_1 \end{bmatrix}}_{[R_N]} \underbrace{\begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix}}_{[I]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -v_f(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[E]} \quad (4.12)$$

Se han indicado en color granate, los cambios producidos al sustituir la resistencia R_1 por la fuente controlada. Entonces,

$$[I] = [R_N]^{-1} [E] \Rightarrow i_\alpha(t) = -[R_N]_{(1,1)}^{-1} v_f(t) \quad (4.13)$$

Por lo tanto,

$$R_{eq} = \frac{1}{[R_N]_{(1,1)}^{-1}} \quad (4.14)$$

Usando MATHEMATICA se obtiene

$$R_{eq} = \frac{2R_x R_3 + R_1 R_2 + R_x R_1 + R_x R_2 + 2R_3 R_2 + R_4 R_1 + 2R_4 R_2 + 2R_4 R_3}{R_1 + 2R_2 + 2R_3} \quad (4.15)$$

Evaluando , se obtiene

$$R_{eq} = 1989 [\Omega] \quad (4.16)$$

Observamos lo siguiente

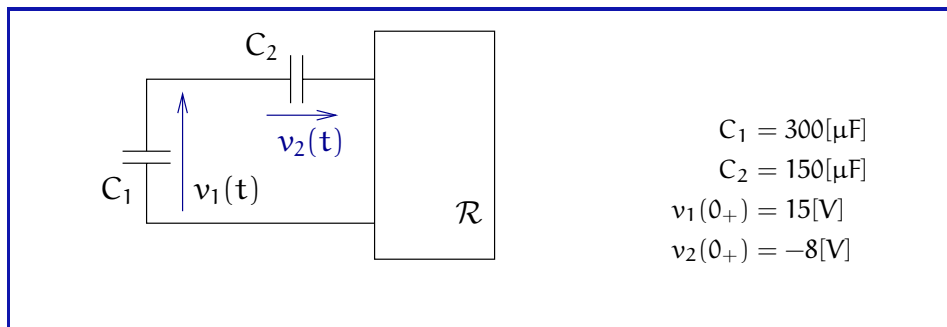
- La presencia de una fuente controlada genera una asimetría en la matriz de mallas (tal como se vio en los problemas del capítulo de métodos generales de análisis).
- Es posible que la resistencia R_{eq} tuviese un valor negativo, para ello es necesario que R_x sea negativo. Más específicamente, es necesario y suficiente que $R_x < -1437,5 [\Omega]$.

4.3. Redes dinámicas

4.3.1. Equivalencias con condiciones iniciales

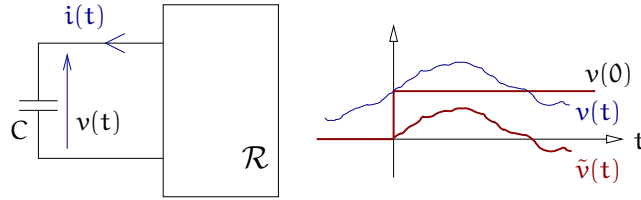
Problema 4.3.

En la red de la figura, se pide determinar una red equivalente que sólo incluya un condensador y una fuente de corriente.



Solución

Para empezar, conviene analizar primero el caso de un único condensador, tal como se muestra en la figura siguiente



De esta figura vemos que, para $t \geq 0$, podemos expresar $v(t)$ en función de $\tilde{v}(t)$ y de $v(0)\mu(t)$, ya que

$$v(t) = \tilde{v}(t) + v(0)\mu(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.17)$$

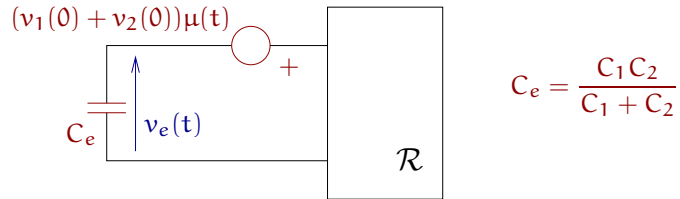
Esta relación permite sostener que el condensador con tensión inicial $v(0)$ puede ser reemplazado por otro condensador de igual valor, con condición inicial **cero**, en serie con una fuente de tensión del valor $v(0)\mu(t)$. Entonces, podemos escribir

$$v(t) = v(0)\mu(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (4.18)$$

Derivando esta ecuación, y despejando $i(t)$ se llega a

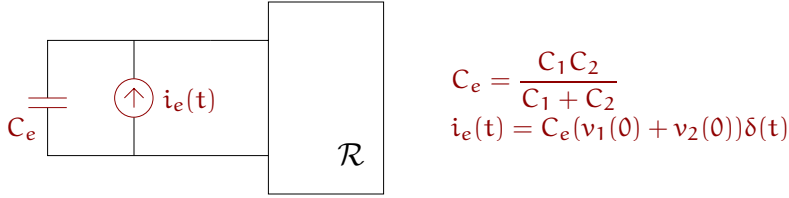
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} - Cv(0)\delta(t) \quad (4.19)$$

Este resultado se puede aplicar ahora a la red original. Previamente debemos representar los dos condensadores por un condensador equivalente en serie con la fuente de tensión equivalente, esto lleva a la red de la siguiente figura



El sentido de la fuente de corriente es consistente con la dirección dada para la tensión en el condensador.

donde el condensador equivalente tiene **tensión inicial igual a cero**. Al aplicar luego este resultado a la red original se llega a la red equivalente de la figura.



Numéricamente, se obtiene $C_e = 10^{-4}$ [μF] e $i_e(t) = 700$ [μA].

Es conveniente dejar expresados algunos comentarios y observaciones

- Todas las equivalencias desarrolladas en este problema son válidas estrictamente para $t \geq 0$.
- La capacidad equivalente de dos o más condensadores en serie es siempre menor, a lo sumo igual, que la menor capacidad. En particular, si hay n condensadores de igual capacidad, C , conectados en serie, entonces la capacidad equivalente es $C_{eq} = C/n$.
- Si se conectan n condensadores en serie, con condiciones iniciales $v_k(0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, entonces el condensador equivalente tiene una tensión inicial equivalente

$$v_{eq}(0) = \sum_{k=1}^n v_k(0) \quad (4.20)$$

con la debida consideración de las polaridades de cada tensión.

- Es importante usar con rigor el principio de conservación de la energía; si no se hace así, se pueden alcanzar resultados erróneos o puede ser difícil entender los resultados usando la óptica de la conservación. Por ejemplo, si las condiciones iniciales dadas cumplen con $v_1(0) = -v_2(0) \neq 0$, entonces $i_e(t) = 0$. Ello significa que la energía inicialmente almacenada en el condensador equivalente, C_e , es cero. Eso es aparentemente contradictorio con el hecho que en la red original, la energía inicial almacenada es

$$w(0) = \frac{1}{2} (C_1 v_1(0)^2 + C_2 v_2(0)^2) \quad (4.21)$$

En realidad, lo que este resultado indica es que la energía disponible inicial para ser entregada al resto del mundo $\mathcal{R}$ es cero; la implicancia de ello es que ninguna fracción de las energías almacenadas en C_1 y C_2 puede ser entregada a ese resto del mundo. Para dar una forma concreta a este razonamiento, puede imaginarse que el resto del mundo es un simple resistor de resistencia R , entonces se aprecia de inmediata que la tensión en ambos condensadores es constante $\forall t \geq 0$, por lo que la corriente en el resistor es cero $\forall t \geq 0$.

Errores

Los errores más comunes son

Error 1 Errores en la ecuación de Tercer Postulado del condensador. Se debe recordar la convención de referencia combinada.

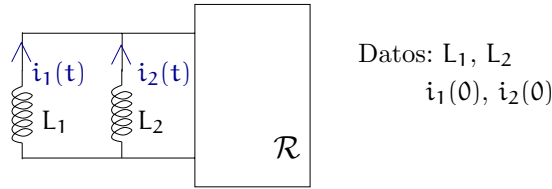
Error 2 Transformación errónea de fuente de tensión a fuente de corriente.

Error 3 Cálculo erróneo del condensador equivalente de dos condensadores en serie.

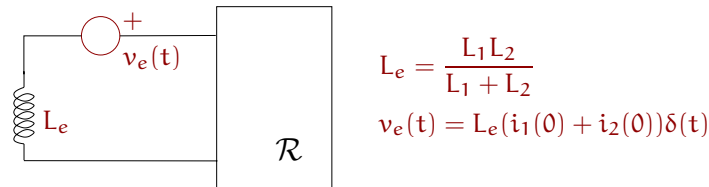
Error 4 Omisión del escalón unitario en la fuente equivalente de tensión. Este error llevaría, al derivar la ecuación (4.18), a una fuente de corriente equivalente de valor cero. Este último resultado está en clara contradicción con la naturaleza conceptual del problema.

Una variante de interés

Suponga que construimos la red dual de la original, es decir, la nueva red resulta formada por dos inductores en paralelo, con corriente iniciales, tal como se muestra en la figura



Haciendo una análisis dual de aquél realizado para la red capacitiva, se llega a la red equivalente que se muestra en la figura siguiente



Es interesante anotar que la inductancia equivalente de dos o más inductores en paralelo es menor, a lo sumo igual, que la menor de las inductancias individuales.

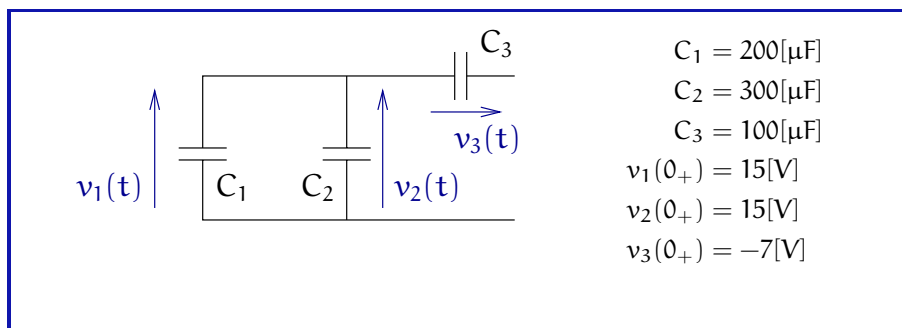
Además, si se conectan n inductores en paralelo, con condiciones iniciales $i_k(0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, entonces la condición inicial equivalente está dada por

$$i(0) = \sum_{k=1}^n i_k(0) \quad (4.22)$$

con la debida consideración de las orientaciones de esas corrientes.

Problema 4.4.

En la red de la figura, se pide determinar el condensador y su condición inicial que es equivalente a la red de la figura, vista desde los terminales A-B, y para todo $t \geq 0$.

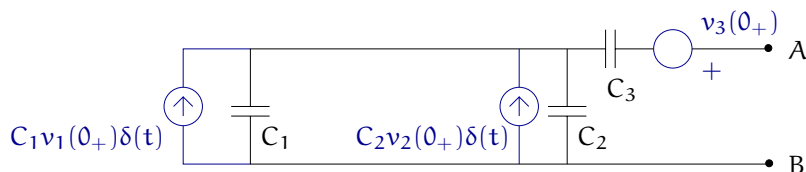


Note que $v_1(0_+) = v_2(0_+)$, ya que C_1 y C_2 están en paralelo. No hay datos sobre lo que ocurrió en $t = 0_-$, pero si esas tensiones eran diferentes (suponiendo que los condensadores no estaban conectados en paralelo), entonces debió existir una corriente tipo delta de Dirac en $t = 0$, de modo que las tensiones se igualaran al conectar los condensadores en paralelo.

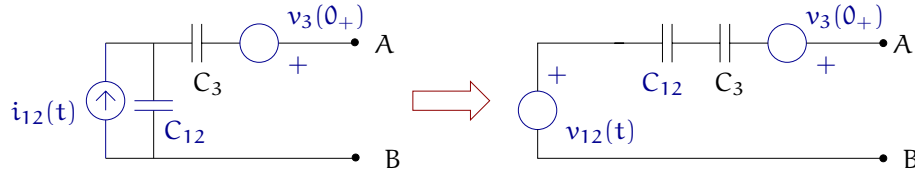
Solución

El primer paso es representar explícitamente la condición inicial en cada uno de los condensadores. Dada la topología de la red, se uso fuentes de corriente para los condensadores 1 y 2, y fuente de tensión, para el tercer condensador. Así, se obtiene la siguiente red

Se necesitan los resultados del Problema 4.3.



El siguiente paso es combinar las capacidades C_1 y C_2 por un lado, y las fuentes de corriente, por otro. Luego, se combina la capacidad y la fuente de corriente resultantes, para transformarlos en una red equivalente formada por un condensador y una fuente de tensión. El paso final es combinar esto con C_3 y su fuente de tensión. El resultado se muestra en la figura



donde

$$i_{12}(t) = (C_1 v_1(0_+) + C_2 v_2(0_+)) \delta(t); \quad C_{12} = C_1 + C_2 \quad (4.23)$$

$$v_{12}(t) = \frac{C_1 v_1(0_+) + C_2 v_2(0_+)}{C_1 + C_2} \quad (4.24)$$

Así, el condensador equivalente tiene capacidad C_{eq} y condición inicial $v_{eq}(0_+)$, donde

$$C_{eq} = \frac{C_{12} C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{C_3 (C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (4.25)$$

$$v_{eq}(0_+) = v_3(0_+) + \frac{C_1 v_1(0_+) + C_2 v_2(0_+)}{C_1 + C_2} \quad (4.26)$$

$$= v_3(0_+) + v_1(0_+) \quad (4.27)$$

Un primer análisis del problema y sus solución permite hacer las siguientes afirmaciones.

- La capacidad equivalente de dos o más condensadores en paralelo es siempre mayor que la mayor capacidad individual.
- La red capacitiva puede ser reemplazada por un condensador equivalente C_{eq} con tensión inicial $v_{eq}(0_+)$. Esta equivalencia es válida para cualquier otra red que se conecte a los terminales A-B.
- Sin perjuicio de lo anterior, no se debe esperar que suma de las energías inicialmente almacenadas en los tres condensadores, sea igual a la energía almacenada en el condensador equivalente. Para entender ello basta imaginarse el caso cuando $v_1(0_+) = v_2(0_+) = -v_3(0_+)$; entonces la energía almacenada inicialmente en el condensador equivalente sería cero, con independencia del valor de esas tensiones, y por lo tanto con independencia de la suma de las energías almacenadas inicialmente en los tres condensadores.
- Si $v_1(0_-) \neq v_2(0_-)$, entonces en $t = 0$ habría una corriente delta de Dirac, con area (carga) tal que $v_1(0_+) = v_2(0_+)$.
- La importancia de este tipo de equivalencias es que permite analizar lo que ocurre en el *resto del mundo*, disminuyendo la complejidad del análisis, al reemplazar tres condensadores, con sus respectivas condiciones iniciales, por uno solo, con una condición inicial equivalente.

Reemplazando los valores numéricos dados se obtiene:

$$C_{eq} = \frac{500}{6} [\mu F]; \quad v_{eq}(0_+) = 8 [V] \quad (4.28)$$

Errores

Los errores más comunes son

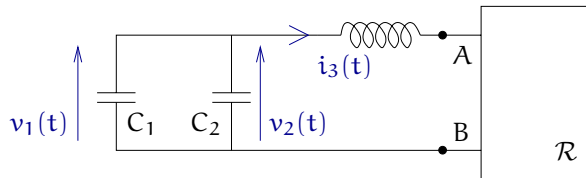
Error 1 Errores al calcular la combinación paralelo de los dos condensadores; en esta conexión, las capacidades se suman directamente.

Error 2 Errores al calcular la combinación serie de C_{12} y C_3 , en esta conexión, las capacidades se combinan como las resistencias en paralelo.

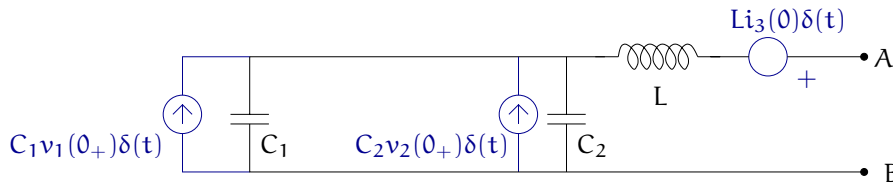
Error 3 Errores numéricos. Se debe verificar que la capacidad equivalente sea numéricamente menor que C_3 .

Una variante de interés

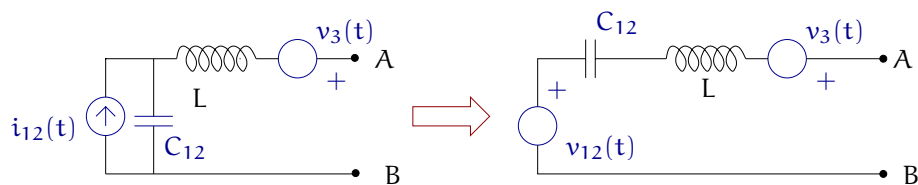
Considere el problema original y suponga que el condensador de capacitancia C_3 es reemplazado por una inductancia $L = 0,3 [H]$, como se muestra en la figura, con corriente inicial $i_3(0) = 0,5 [A]$.



El cambio, respecto del problema original, reside en el inductor y su condición inicial. Esta última puede ser representada como fuente de corriente, constante $\forall t \geq 0$, o como una fuente de tensión de tipo delta de Dirac, tal como se muestra en la figura siguiente



Finalmente, podemos combinar las capacitancias en paralelo, así como sus condiciones iniciales, lo cual nos lleva a



donde

$$i_{12}(t) = (C_1 v_1(0_+) + C_2 v_2(0_+)) \delta(t); \quad C_{12} = C_1 + C_2 \quad (4.29)$$

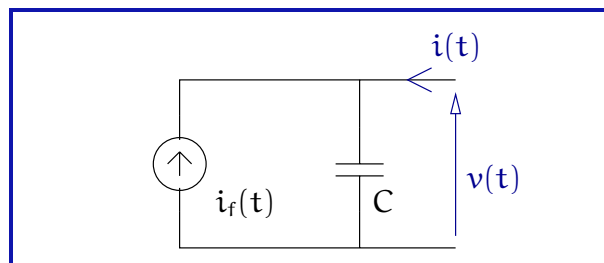
$$v_{12}(t) = \frac{C_1 v_1(0_+) + C_2 v_2(0_+)}{C_1 + C_2} \quad (4.30)$$

$$v_3(t) = L i_3(0) \delta(t) \quad (4.31)$$

4.3.2. Redes dinámicas con fuentes independientes

Problema 4.5.

En la red de la figura, se pide determinar una red equivalente formada por una fuente independiente y un condensador en serie

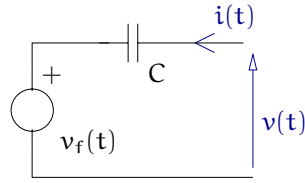


Solución

Para obtener el equivalente requerido, debemos construir la relación entre $v(t)$ e $i(t)$, lo que se hace aplicando los postulados de análisis

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_f(\tau) + i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_f(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

De la expresión precedente se puede ver que la red original es equivalente a la que se muestra a continuación



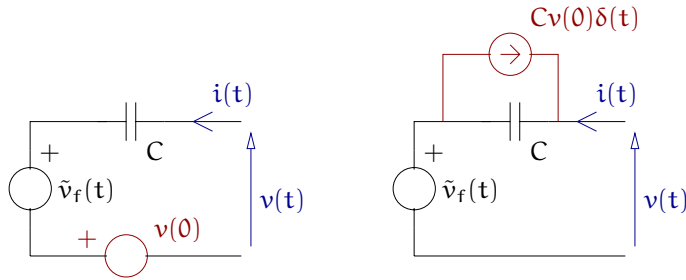
donde la fuente de tensión independiente está dada por

$$v_f(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_f(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

Si se desea dejar explícita la condición inicial del condensador, entonces debemos escribir

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_f(\tau) d\tau = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_f(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (4.34)$$

Podemos entonces considerar dos fuentes: una que captura la condición inicial, y la otra representa la contribución de la fuente independiente. El resultado se muestra en la siguiente figura, donde aparecen las dos representaciones posibles para la condición inicial: fuente de tensión y fuente de corriente. En este caso, la red que se muestra a continuación es equivalente a lo original sólo para $t \geq 0$.

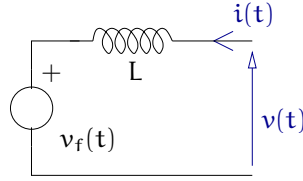


donde

$$\tilde{v}_f(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_f(\tau) d\tau \quad (4.35)$$

Una variante de interés

El problema dual del anterior consiste en transformar la red serie

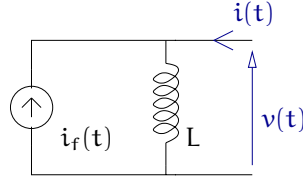


en una red equivalente paralelo.

En este caso, para obtener la red equivalente, la ecuación básica es

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t -v_f(\tau) + v(\tau) d\tau = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_f(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (4.36)$$

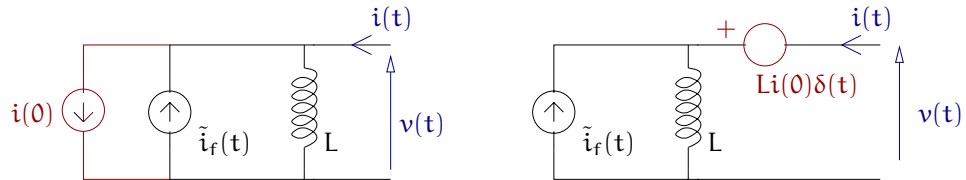
A partir de esta expresión se puede justificar el siguiente equivalente paralelo



donde la fuente de corriente resulta dada por

$$i_f(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_f(\tau) d\tau \quad (4.37)$$

También, si se desea dejar explícita la contribución de la condición inicial del inductor, se debe agregar una fuente independiente, de tensión o de corriente. En la figura se muestran ambos casos



Esta red es equivalente a la original, sólo para $t \geq 0$, y se cumple que

$$\tilde{i}_f(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_f(\tau) d\tau \quad (4.38)$$

Capítulo 5

ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO Y TRANSFORMADOR IDEAL

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan problemas que involucran redes donde se modelan el acoplamiento magnético y, en particular, el transformador ideal (como caso límite). Como es sabido, el fenómeno del acoplamiento magnético ha sido extensamente explotado para crear aplicaciones, sin las cuales no reconoceríamos el actual nivel de desarrollo tecnológico de la civilización.

Una de las aplicaciones más relevantes del acoplamiento magnético es el transformador, que permite modificar los niveles de tensiones y corrientes. Se trata de una red de dos puertas (primario y secundario) de carácter pasivo, es decir no amplifica potencia, aunque se diseña para que, idealmente, la potencia entregada al primario salga por el secundario sin pérdida. Lo interesante de la naturaleza del transformador es que las potencias en primario y secundario, siendo idealmente las mismas se logran con distintos niveles de voltaje y corriente. La aspiración de tener un sistema pasivo-conservativo no es alcanzable en la realidad, y el modelo de red de un transformador real debe incluir resistencias para modelar las pérdidas por disipación. Sin perjuicio de ello, en este capítulo nos enfocamos, más que en el modelo de los transformadores, en el fenómeno puro del acoplamiento.

Por su parte, el transformador ideal (T.I.) es precisamente una idealización del transformador real. La motivación para su uso como parte del modelo de este último, se puede apreciar por la equivalencia que se muestra en la figura siguiente

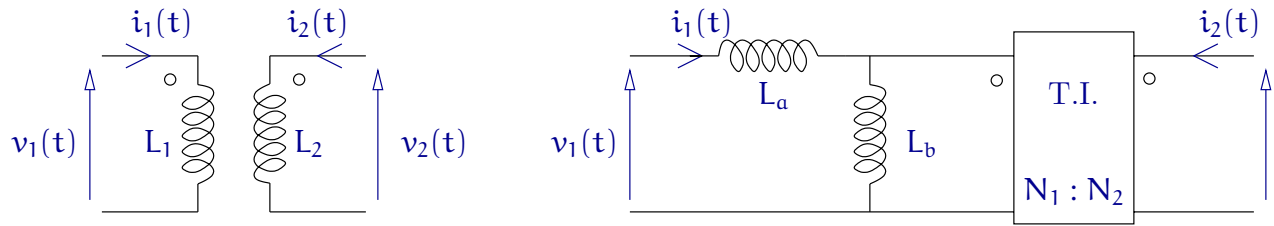


Figura 5.1: Equivalencia del acoplamiento con una red sin acoplamiento pero con transformador ideal.

Las dos redes de la figura son equivalentes si se cumplen las siguientes relaciones

$$L_a = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2}, \quad L_b = \frac{M^2}{L_2}, \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{M}{L_2}.$$

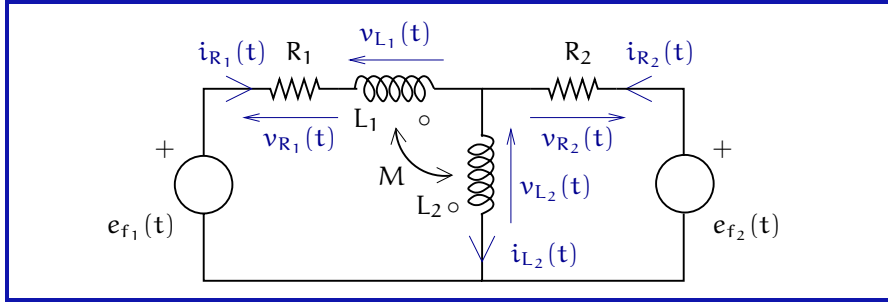
El acoplamiento es perfecto si $M = \sqrt{L_1 L_2}$, lo cual sólo se puede lograr si L_1 y L_2 son enormes inductancias ($\rightarrow \infty$). En ese caso, la red de la izquierda tiende a ser sólo un transformador ideal, ya que $L_a \rightarrow 0$ y $L_b \rightarrow \infty$.

5.2. Acoplamiento Magnético

5.2.1. Red de dos mallas con Acoplamiento Magnético

Problema 5.1.

Para este problema, es de interés el estudio de la red mostrada a continuación, la cual posee dos inductores acoplados magnéticamente.



Suponiendo que en la red de la figura, son conocidos los valores de R_1 , R_2 , L_1 , L_2 , $e_{f_1}(t)$ y $e_{f_2}(t)$, determine un sistema consistente de ecuaciones, en las incógnitas i_{R_1} y i_{R_2} .

Solución

Observando la red bajo estudio, mediante la LVK, podemos obtener la relación entre las tensiones para ambas mallas de la red. Así, tenemos que

$$e_{f_1}(t) = v_{R_1}(t) + v_{L_1}(t) + v_{L_2}(t), \quad (5.1a)$$

$$e_{f_2}(t) = v_{R_2}(t) + v_{L_2}(t). \quad (5.1b)$$

Notamos además, que según la relación de acoplamiento entre L_1 y L_2 , existe un **acoplamiento magnético aditivo** (considerando las corrientes $i_{R_1}(t)$ y $i_{L_2}(t)$) entre estos componentes. Por lo tanto, los valores para las tensiones de los inductores en (5.1) está dada por

$$v_{L_1}(t) = L_1 Di_{R_1}(t) + MDi_{L_2}(t), \quad (5.2a)$$

$$v_{L_2}(t) = L_2 Di_{L_2}(t) + MDi_{R_1}(t). \quad (5.2b)$$

Sabemos también, utilizando la LCK en el nodo en el que inciden ambos inductores, que

$$i_{L_2}(t) = i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t). \quad (5.3)$$

Utilizando (5.3) en (5.2), podemos reescribir las ecuaciones de LVK en (5.1), como

$$e_{f_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t) + (L_1 + L_2 + 2M) Di_{R_1}(t) + (L_2 + M) Di_{R_2}(t), \quad (5.4)$$

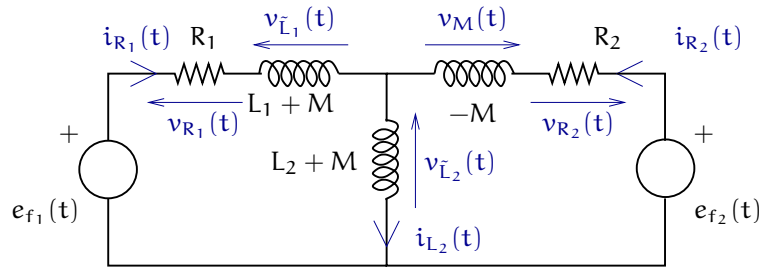
$$e_{f_2}(t) = (L_2 + M) Di_{R_1}(t) + R_2 i_{R_2}(t) + L_2 Di_{R_2}(t). \quad (5.5)$$

Así, podemos plantear un sistema consistente de ecuaciones en las incógnitas i_{R_1} y i_{R_2} , escribiendo los resultados en (5.4) y (5.5) en forma matricial

$$\begin{bmatrix} R_1 + (L_1 + L_2 + 2M)D & (L_2 + M)D \\ (L_2 + M)D & R_2 + L_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_1} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{f_1}(t) \\ e_{f_2}(t) \end{bmatrix}$$

Con los resultados obtenidos, es posible hacer los siguientes comentarios:

- De las ecuaciones obtenidas en (5.4) y (5.5) podemos deducir, que para esta configuración de inductores con acoplamiento magnético aditivo, un posible equivalente es el que se muestra a continuación



De esta figura, podemos ver que el equivalente se ha utilizado para obtener una red en la cual no hay acoplamiento entre los inductores considerados en el problema original. Así, es posible estudiar la red con las herramientas básicas de análisis de redes eléctricas, sin la utilización de los conceptos de acoplamiento magnético. Un ejemplo de esto es demostrar que la red equivalente tiene las mismas ecuaciones de mallas que la red con acoplamiento. Podemos plantear la LKV para cada una de las mallas, obteniendo

$$e_{f_1}(t) = v_{R_1}(t) + v_{L_1}(t) + v_{L_2}(t), \quad (5.6)$$

$$e_{f_2}(t) = v_{R_2}(t) + v_M(t) + v_{L_2}(t). \quad (5.7)$$

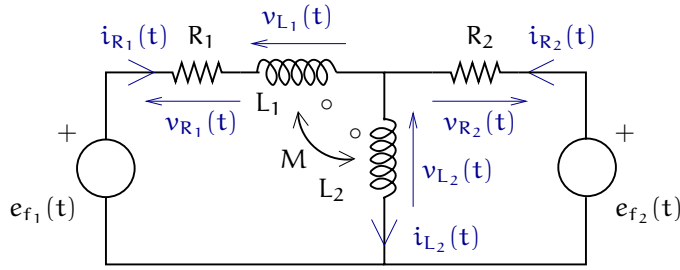
Utilizando el Tercer Postulado para cada componente, junto a la LCK correspondiente al nodo que contiene a los tres inductores, tenemos que (5.6) y (5.7) quedan como

$$e_{f_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t) + (L_1 + M)D i_{R_1}(t) + (L_2 + M)D i_{L_2}(t),$$

$$e_{f_2}(t) = R_2 i_{R_2}(t) - M D i_{R_2}(t) + (L_2 + M)D i_{L_2}(t).$$

las cuales, al ser simplificadas, se reducen a las ecuaciones encontradas en (5.4) y (5.5).

- Un punto que merece ser comentado, es el tipo de acoplamiento existente entre L_1 y L_2 . En (5.2) podemos ver que para la tensión en cada inductor, el segundo término (correspondiente al acoplamiento) contribuye de forma aditiva a la tensión en este. El caso contrario a este fenómeno es el **acoplamiento magnético sustractivo**, el cual podemos ejemplificar mediante la siguiente red



donde hemos modificado la referencia del acoplamiento ($\circ$) en L_2 , respecto a la red original. Dado este cambio, las ecuaciones que ahora rigen el comportamiento de la tensión en cada inductor están dadas por

$$v_{L_1}(t) = L_1 \frac{di_{R_1}(t)}{dt} - M \frac{di_{L_2}(t)}{dt} \quad \text{y} \quad v_{L_2}(t) = L_2 \frac{di_{L_2}(t)}{dt} - M \frac{di_{R_1}(t)}{dt}.$$

Errores

Dada la simplicidad de la red, la mayor parte de los errores que se cometen, son de tipo conceptual. Señalamos a continuación aquellos más frecuentes.

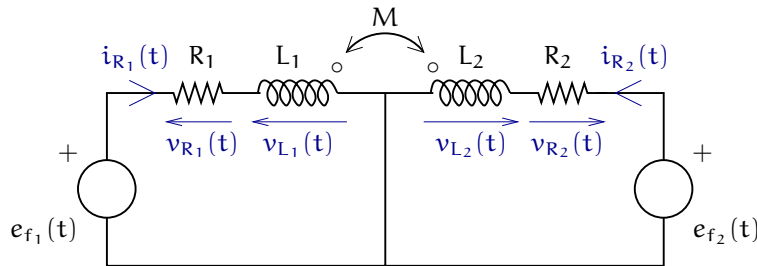
Error 1 Errores en la formulación de LVK y LCK.

Error 2 Considerar un acoplamiento magnético sustractivo, cuando es aditivo.

Esto lleva a utilizar un signo que no corresponde en el término correspondiente al acoplamiento, en las ecuaciones para las tensiones en los elementos acoplados.

Una variante de interés

Una variante de interés para este problema, es estudiar que ocurre con el equivalente mostrado anteriormente, si ahora consideramos una configuración para dos inductores acoplados magnéticamente como muestra la siguiente figura



Para esta nueva red, podemos ver que existe un acoplamiento magnético aditivo entre L_1 y L_2 (al igual que en problema principal). Por lo tanto, las ecuaciones correspondientes a la LVK, aplicada en cada malla, son

$$e_{f_1}(t) = v_{R_1} + v_{L_1}(t), \quad (5.8a)$$

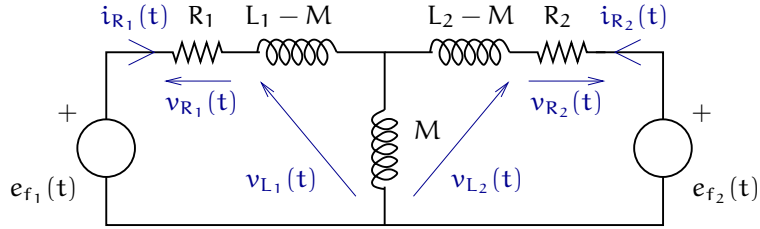
$$e_{f_2}(t) = v_{R_2} + v_{L_2}(t). \quad (5.8b)$$

Considerando el tercer postulado para cada componente, junto al acoplamiento aditivo existente entre los inductores, las ecuaciones en (5.8a) pueden ser escritas como

$$e_{f_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t) + L_1 D i_{R_1}(t) + M D i_{R_2}(t), \quad (5.9a)$$

$$e_{f_2}(t) = R_2 i_{R_2}(t) + L_2 D i_{R_2}(t) + M D i_{R_1}(t). \quad (5.9b)$$

Con las ecuaciones en (5.9) podemos deducir que una posible red equivalente para este esquema de acoplamiento, es la que se muestra a continuación



de donde podemos obtener las siguientes ecuaciones, utilizando la LVK

$$e_{f_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t) + (L_1 - M) D i_{R_1}(t) + M D (i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t)), \quad (5.10a)$$

$$e_{f_2}(t) = R_2 i_{R_2}(t) + (L_2 - M) D i_{R_2}(t) + M D (i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t)). \quad (5.10b)$$

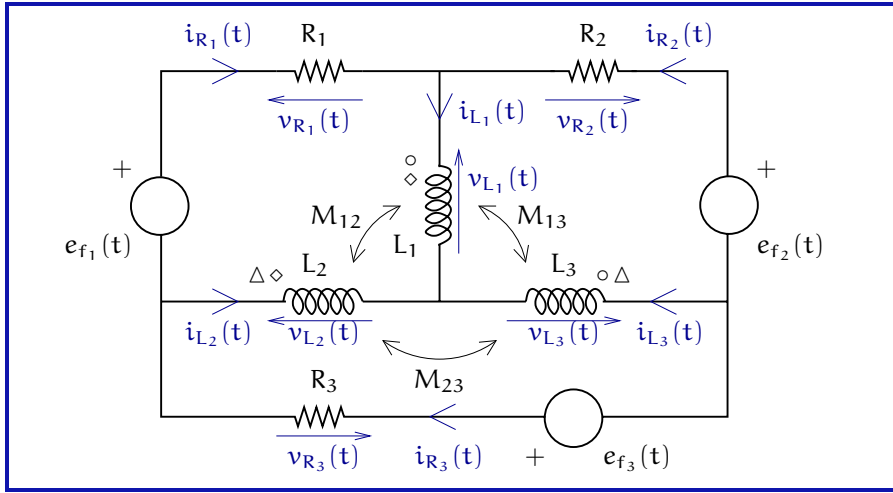
Notamos así, que las ecuaciones en (5.10) pueden ser reducidas a las mostradas en (5.9), demostrando que ambas redes son equivalentes.

De lo anterior, podemos concluir que la equivalencia propuesta para algún tipo de acoplamiento magnético, depende de la configuración que presenten los elementos bajo acoplamiento. Esto queda ejemplificado con el problema principal y la variante analizada, donde hemos visto que para dos esquemas donde existe acoplamiento magnético aditivo, las posibles redes equivalentes presentadas son diferentes.

5.2.2. Acoplamiento Magnético entre tres inductores

Problema 5.2.

Considere la siguiente figura, la cual muestra tres inductores acoplados magnéticamente, en una red de tres mallas.



Suponiendo conocidos los valores de R_1 , R_2 , R_3 , L_1 , L_2 , L_3 , $e_{f_1}(t)$, $e_{f_2}(t)$ y $e_{f_3}(t)$, plantee un sistema consistente de ecuaciones en las incógnitas $i_{R_1}(t)$, $i_{R_2}(t)$ y $i_{R_3}(t)$.

Solución

Para buscar un sistema de ecuaciones que permita resolver el problema planteado, comencemos planteando las ecuaciones que resultan al aplicar la LVK en cada malla de la red. Así, tenemos que

$$e_{f_1}(t) = v_{R_1}(t) + v_{L_1}(t) - v_{L_2}(t), \quad (5.11a)$$

$$e_{f_2}(t) = v_{R_2}(t) + v_{L_1}(t) - v_{L_3}(t), \quad (5.11b)$$

$$e_{f_3}(t) = v_{R_3}(t) + v_{L_2}(t) - v_{L_3}(t). \quad (5.11c)$$

Utilizando el tercer postulado para cada inductor, podemos escribir las ecuaciones en (5.11) como

$$e_{f_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t) + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M_{12} \frac{di_{L_2}}{dt}(t) + M_{13} \frac{di_{L_3}}{dt}(t) - (L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}(t) + M_{12} \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M_{23} \frac{di_{L_3}}{dt}(t)), \quad (5.12a)$$

$$e_{f_2}(t) = R_2 i_{R_2}(t) + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M_{12} \frac{di_{L_2}}{dt}(t) + M_{13} \frac{di_{L_3}}{dt}(t) - (L_3 \frac{di_{L_3}}{dt}(t) + M_{13} \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M_{23} \frac{di_{L_2}}{dt}(t)), \quad (5.12b)$$

$$e_{f_3}(t) = R_3 i_{R_3}(t) + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}(t) + M_{12} \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M_{23} \frac{di_{L_3}}{dt}(t) - (L_3 \frac{di_{L_3}}{dt}(t) + M_{13} \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M_{23} \frac{di_{L_2}}{dt}(t)). \quad (5.12c)$$

donde, además, hemos utilizado el hecho que existe **acoplamiento magnético aditivo** entre los tres inductores, considerando las referencias de las corrientes i_{L_1} , i_{L_2} y i_{L_3} indicadas en la figura.

Sabemos también que las corrientes por cada inductor pueden ser expresadas en función de las corrientes $i_{R_1}(t)$, $i_{R_2}(t)$ y $i_{R_3}(t)$, que son las variables de interés

en este problema. Por lo tanto, aplicando la LCK en los nodos que contienen a L_1 , L_2 y L_3 tenemos que

$$i_{L_1}(t) = i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t), \quad (5.13a)$$

$$i_{L_2}(t) = i_{R_3}(t) - i_{R_1}(t), \quad (5.13b)$$

$$i_{L_3}(t) = -i_{R_2}(t) - i_{R_3}(t). \quad (5.13c)$$

Con este resultado, podemos reescribir las ecuaciones en (5.12) solo en función de términos de valor conocido. Obtenemos entonces

$$e_{f_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t) + (L_1 + L_2 - 2M_{12}) \frac{di_{R_1}}{dt}(t) + (L_1 - M_{13} - M_{12} + M_{23}) \frac{di_{R_2}}{dt}(t) + (-L_2 + M_{12} - M_{13} + M_{23}) \frac{di_{R_3}}{dt}(t) \quad (5.14)$$

$$e_{f_2}(t) = R_2 i_{R_2}(t) + (L_1 - M_{12} - M_{13} + M_{23}) \frac{di_{R_1}}{dt}(t) + (L_1 + L_3 - 2M_{13}) \frac{di_{R_2}}{dt}(t) + (L_3 + M_{12} - M_{13} - M_{23}) \frac{di_{R_3}}{dt}(t) \quad (5.15)$$

$$e_{f_3}(t) = R_3 i_{R_3}(t) + (-L_2 + M_{12} - M_{13} + M_{23}) \frac{di_{R_1}}{dt}(t) + (L_3 + M_{12} - M_{13} - M_{23}) \frac{di_{R_2}}{dt}(t) + (L_2 + L_3 - 2M_{23}) \frac{di_{R_3}}{dt}(t) \quad (5.16)$$

Errores

La principal dificultad al momento de resolver la mayor parte de los errores que se cometen, son de tipo conceptual al proponer las ecuaciones que consideran los acoplamientos entre los inductores. Señalamos a continuación aquellos más frecuentes.

Error 1 Errores en la formulación de LVK.

Error 2 Considerar un acoplamiento magnético sustractivo, cuando es aditivo. Esto lleva a utilizar un signo que no corresponde en el término correspondiente al acoplamiento, en las ecuaciones para las tensiones en los elementos acoplados.

Una variante de interés

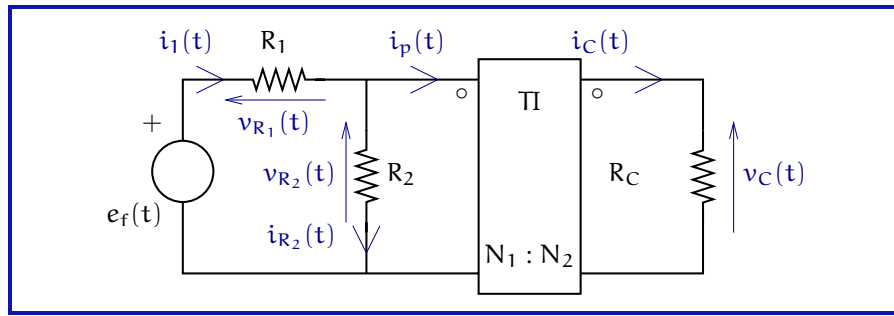
Como una variante al problema principal, es interesante saber como cambian los resultados obtenidos anteriormente, si cambiamos algunas relaciones de acoplamiento. Así, consideremos la siguiente red

5.3. Redes con Transformador Ideal

5.3.1. Máxima transferencia de potencia

Problema 5.3.

Considere la red de la figura, la cual cuenta con un transformador ideal a través del cual se alimenta la resistencia de carga R_C . Nos interesa estudiar la potencia disipada en la resistencia de carga, en función de los parámetros de la red, y del valor que toman los distintos componentes de ésta.



Para la red anterior, analice:

5.3.1 Suponiendo conocidos los valores de R_1 , R_2 , (N_1, N_2) , y que la fuente de tensión es de la forma $e_f(t) = E_0 \text{seno}(\omega t)$, ¿qué valor debe tener la resistencia de carga R_C para que la potencia media disipada en ésta sea máxima?

5.3.2 Suponga que los valores para los elementos de la red son: $R_1 = 2000 [\Omega]$, $R_2 = 3000 [\Omega]$, $N_1 = 1$, $N_2 = 5$ y $E_0 = 220$. Verifique el resultado obtenido en el punto anterior, calculando la potencia disipada en el resistor para $R_C = 20000, 30000, 40000 [\Omega]$.

Solución

Para comenzar a resolver el problema, podemos notar que, como los parámetros N_1 y N_2 están fijos, la resistencia de carga R_C puede ser **reflejada** al lado primario del transformador ideal. Para lograr esto, debemos establecer primero las relaciones de transformación de tensión y corriente para el TI, las que están dadas por

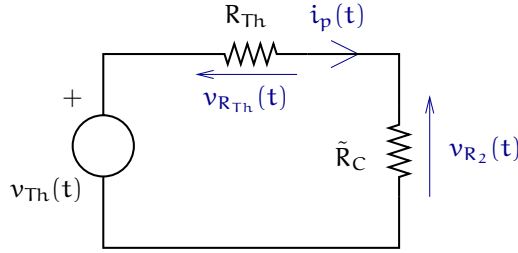
$$v_{R_2}(t) = \frac{N_1}{N_2} v_C(t) \quad \text{e} \quad i_p(t) = \frac{N_2}{N_1} i_C(t). \quad (5.18)$$

Con las relaciones en (5.18) podemos ver el equivalente de R_C visto desde el

primario del TI, $\tilde{R}_C$, como

$$\tilde{R}_C = \frac{v_{R_C}(t)}{i_p(t)} = \frac{\frac{N_1}{N_2} v_C(t)}{\frac{N_2}{N_1} i_C(t)} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_C. \quad (5.19)$$

Podemos ver además, que la red conectada al lado primario del transformador ideal, puede ser reemplazada por un equivalente Thevenin, con el fin de simplificar los cálculos posteriores. Con este equivalente, y junto al resultado en (5.19) la red simplificada a ser analizada será como la que se muestra a continuación



donde

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{y} \quad v_{Th} = e_f(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5.20)$$

Al utilizar esta red equivalente, aún estaremos considerando el problema de maximizar la potencia en R_C . Esto se puede explicar dado que en el transformador ideal la suma de las potencias instantáneas que entran al primario y al secundario es cero. Por esto, y dado que R_C es el único elemento conectado al TI, la potencia transferida desde el primario (potencia en $\tilde{R}_C$) será efectivamente la potencia disipada en R_C .

Considerando el comentario anterior, calculemos la potencia media en $\tilde{R}_C$. Ésta puede ser representada como

$$\bar{P} = \frac{v_{R_2(RMS)}^2}{\tilde{R}_C} = \frac{\hat{v}_{R_2}^2}{2\tilde{R}_C}, \quad (5.21)$$

donde $\hat{v}_{R_2}$ es parte de $v_{R_2} = \hat{v}_{R_2} \text{seno}(\omega t)$. Por lo tanto, debemos buscar el valor de $v_{R_2}(t)$ para poder utilizar la expresión en (5.21).

Planteando la LVK en la red equivalente tenemos que

$$v_{Th}(t) = v_{R_{Th}}(t) + v_{R_2}(t),$$

donde podemos utilizar el Tercer Postulado para $\tilde{R}_C$ y R_{Th} con el fin de obtener $v_{R_2}(t)$. Así

$$\begin{aligned} v_{Th}(t) &= v_{R_{Th}}(t) + v_{R_2}(t) \\ v_{Th}(t) &= R_{Th} i_p(t) + v_{R_2}(t) \\ v_{Th}(t) &= R_{Th} \frac{v_{R_2}(t)}{\tilde{R}_C} + v_{R_2}(t) \end{aligned}$$

$$v_{R_2}(t) i_p(t) = v_C(t) i_C(t)$$

con lo que obtenemos finalmente

$$v_{R_2}(t) = v_{Th}(t) \frac{\tilde{R}_C}{\tilde{R}_C + R_{Th}}. \quad (5.22)$$

Ahora que tenemos la expresión para $v_{R_2}(t)$ en función de los elementos de la red, es necesario saber el valor de $\hat{v}_{R_2}$ para poder calcular la potencia media descrita en (5.21). Como $v_{R_2}(t)$ depende de $v_{Th}(t)$, debemos saber el valor máximo que toma esta señal. De la expresión para $e_f(t)$ en el enunciado, y para $v_{Th}(t)$ en (5.20), deducimos que

$$\hat{v}_{R_2} = E_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{\tilde{R}_C}{\tilde{R}_C + R_{Th}}. \quad (5.23)$$

A partir de (5.21), junto al valor obtenido en (5.23), podemos escribir la potencia media en $\tilde{R}_C$ como

$$\overline{P} = K \frac{\tilde{R}_C}{\left(\tilde{R}_C + R_{Th}\right)^2}, \quad (5.24)$$

donde

$$K = \frac{E_0^2}{2} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2.$$

Si consideramos $\overline{P}$ como una función de $\tilde{R}_C$, podemos notar de (5.24) que $\lim_{\tilde{R}_C \rightarrow 0, \infty} \overline{P} = 0$. Por lo tanto, es razonable considerar que $\overline{P}$ tiene su máximo valor para $\tilde{R}_C \in]0, \infty[$. Así, teniendo la expresión para la potencia media en $\tilde{R}_C$, basta encontrar el valor de este componente para el cual la expresión para la potencia media tiene su valor máximo. Para encontrar este valor, utilicemos la primera derivada de la potencia media respecto a $\tilde{R}_C$. Realizando este cálculo, tenemos que

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \tilde{R}_C} = K \frac{R_{Th} - \tilde{R}_C}{\left(\tilde{R}_C + R_{Th}\right)^3}. \quad (5.25)$$

Igualando a cero la expresión obtenida en (5.25), podemos encontrar el valor buscado de $\tilde{R}_C$, tal que el valor de la potencia dada por (5.24) sea máximo. Realizando este procedimiento, tenemos que lo anterior se cumple para

$$\tilde{R}_C = R_{Th}. \quad (5.26)$$

Con el resultado en (5.26) podemos calcular el valor de R_C , a través de la relación (5.19), para el cual la potencia transferida por la red a este elemento es máxima. Su valor es

$$R_C = R_{Th} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2. \quad (5.27)$$

Tal como comentamos anteriormente, toda la potencia que entra al TI, es transferida instantáneamente a la red conectada al secundario. Es por esto, que calcular la potencia media a través de la expresión en (5.24), será equivalente a calcular la potencia media en R_C , es decir $\bar{P}_{R_C} = \bar{P}$. Por lo tanto, considerando los valores del enunciado para los elementos de la red y la fuente de tensión, obtenemos los siguientes valores para $\bar{P}_{R_C}$

$$\bar{P}_{R_{C1}} = 1,742 [W], \quad \bar{P}_{R_{C2}} = 1,815 [W] \quad \bar{P}_{R_{C3}} = 1,778 [W],$$

donde los subíndices R_{C1} , R_{C2} y R_{C3} corresponden, respectivamente, a la potencia media para $R_C = 20000 [\Omega]$, $R_C = 30000 [\Omega]$ y $R_C = 40000 [\Omega]$.

Con los resultados en (5.28) podemos corroborar que el valor para R_C calculado en (5.27) ($R_C = 30000 [\Omega]$ para los datos del enunciado) maximiza efectivamente la potencia media en este componente.

Errores

Error 1 Errores en la formulación de LVK y LCK.

Error 2 Error en el cálculo de la potencia entregada (o recibida) en algún componente, debido a la utilización de referencias erróneas para las variables de tensión y corriente.

Error 3 Establecer una relación de transformación errónea para las variables del TI. Un ejemplo de este error es haber considerado la siguiente relación de transformación para las corrientes

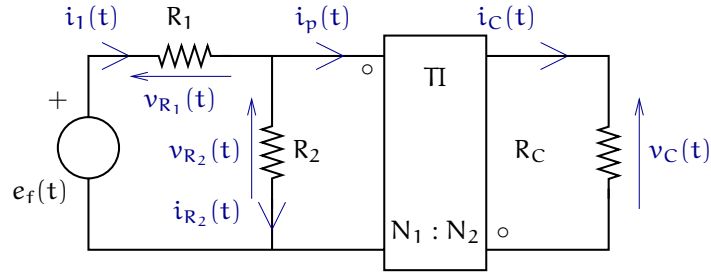
$$i_p(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_C(t),$$

lo cual no es correcto, ya que dadas las referencias de corriente de la figura correspondiente al problema principal, las relaciones de transformación del TI están dadas por (5.18).

Error 4 Suponer, de antemano, que alguna de las variables en el TI es cero.

Una variante de interés

Una variante para este problema, es analizar que ocurre con el cálculo de la potencia si se cambia la polaridad de la transformación del TI, como se muestra en la siguiente figura



De la figura deducimos que con el cambio realizado, las relaciones de tensión y corriente del TI serán ahora

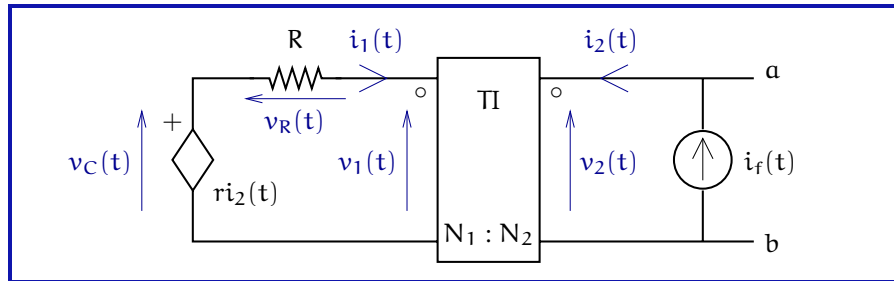
$$v_{R_2}(t) = -\frac{N_1}{N_2}v_C(t) \quad \text{y} \quad i_p(t) = -\frac{N_2}{N_1}i_C(t). \quad (5.28)$$

Con estas nuevas relaciones vemos que la única expresión que contenía cálculos con las relaciones en (5.28), (5.19), no cambia. Así, tanto el cálculo de la potencia como el del valor de R_C para el cual ésta es máxima, se mantienen sin variación. Esto demuestra que, independientemente de la polaridad de acoplamiento que tenga el transformador ideal, la potencia media en alguna carga conectada en su lado secundario no tendrá cambios.

5.3.2. Red con transformador ideal y fuente controlada

Problema 5.4.

Para este problema, consideraremos la siguiente red. Ésta posee un transformador ideal, y una fuente controlada de tensión, cuya variable de control se encuentra aislada a través del TI.



5.4.1 Calcule el equivalente Thevenin visto desde los terminales $a - b$, en función de R , r y $(N_1 : N_2)$.

5.4.2 Calcule la expresión para la potencia entregada por la fuente controlada de tensión, si en los terminales $a - b$ se conecta un resistor R_C .

Solución

Para resolver este problema, debemos obtener una red equivalente a la conectada al lado primario del transformador ideal. Para lograr esto, consideremos las relaciones de transformación del TI

$$v_1(t) = \frac{N_1}{N_2} v_2(t) \quad \text{e} \quad i_1 = -\frac{N_2}{N_1} i_2. \quad (5.29)$$

Planteando la LVK para la malla conectada al lado primario del TI, obtenemos

$$v_1(t) = r i_2 + v_R(t). \quad (5.30)$$

Considerando la LVK en (5.30), podemos utilizar la relación de tensiones en (5.29), para escribir $v_2(t)$ como

$$v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} (r i_2(t) - v_R(t)). \quad (5.31)$$

Sabiendo que, por el Tercer Postulado, la relación entre tensión y corriente para el resistor cumple con $v_R(t) = R i_1(t)$, podemos escribir (5.31) como

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \frac{N_2}{N_1} (r i_2(t) - R i_1(t)) \\ &= \frac{N_2}{N_1} \left(r i_2(t) - R \frac{N_2}{N_1} i_2(t) \right) \\ &= \frac{N_2}{N_1} \left(r + R \frac{N_2}{N_1} \right) i_2(t), \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde hemos utilizado la relación de transformación para las corrientes del TI, mostrada en (5.29).

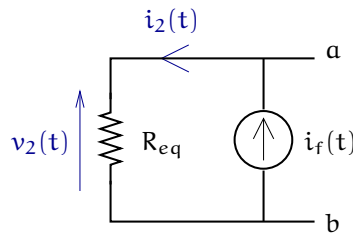
Del resultado en (5.32), podemos notar que la relación obtenida entre $v_2(t)$ y $i_2(t)$ puede escribirse como

$$v_2(t) = R_{eq} i_2(t), \quad (5.33)$$

donde

$$R_{eq} = \frac{N_2}{N_1} \left(r + R \frac{N_2}{N_1} \right), \quad (5.34)$$

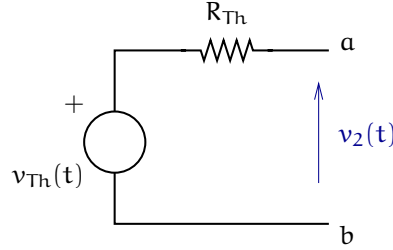
con lo que estaremos modelando al TI, y la red conectada a su lado primario, como un resistor cuyo valor depende de la relación de transformación del transformador y de los valores de R y r . Por lo tanto, obtenemos la siguiente red equivalente



Podemos ver que esta red corresponde al equivalente Norton, visto desde los terminales a – b.

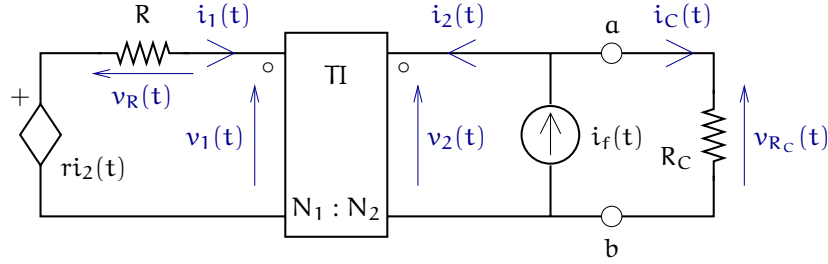
La corriente a través de R_{Th} no corresponde a $i_2(t)$, sino a una combinación entre $i_f(t)$ y la corriente de la red conectada a los terminales $a - b$.

de la cual, es inmediata la obtención del equivalente Thevenin visto desde los terminales $a - b$



donde $R_{Th} = R_{eq}$ y $v_{Th}(t) = R_{eq}i_f(t)$.

Consideremos ahora la siguiente red, la cual considera la conexión de un resistor R_C , en los terminales $a - b$ de la red vista anteriormente



Para calcular la expresión para la potencia entregada por la fuente controlada, bajo esta nueva configuración, podemos comenzar por calcular la tensión y la corriente en R_C utilizando el equivalente Thevenin encontrado anteriormente. Así, utilizando la LVK y el Tercer Postulado para R_{Th} , tenemos que

$$v_{Th}(t) = R_{Th}i_C(t) + R_Ci_C(t).$$

De esta ecuación podemos obtener el valor de $i_C(t)$

$$i_C(t) = \frac{v_{Th}}{R_{Th} + R_C}. \quad (5.35)$$

Además, al aplicar la LCK en el nodo a , obtenemos una relación entre $i_C(t)$ e $i_2(t)$, la cual resulta

$$i_2(t) = i_f(t) - i_C(t),$$

donde podemos escribir $i_2(t)$ en función de términos conocidos, usando (5.35), como

$$i_2(t) = i_f(t) - \frac{v_{Th}}{R_{Th} + R_C}. \quad (5.36)$$

Usando las relaciones de transformación para la corriente en el TI, mostradas en (5.29), es posible calcular $i_1(t)$ a partir de (5.36). Estos valores corresponden a

$$i_1(t) = -\frac{N_1}{N_2} \left(i_f(t) - \frac{v_{Th}}{R_{Th} + R_C} \right), \quad (5.37)$$

Sabemos que la potencia entregada por la fuente controlada de tensión, $p_{fc}(t)$, está dada por

$$p_{fc}(t) = e_{fc}(t)i_1(t),$$

donde $e_{fc} = ri_2(t)$. Por lo tanto, utilizando los resultados obtenidos en (5.37) y (5.36), tenemos que

$$p_{fc}(t) = -r \frac{N_1}{N_2} \left(\frac{R_C}{R_{Th} + R_C} \right)^2 i_f(t)^2,$$

donde hemos considerado el hecho que $v_{Th}(t) = R_{eq}i_f(t) = R_{Th}i_f(t)$.

Del análisis anterior, sabemos que

$$i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1}i_2(t),$$

y

$$v_C(t) = ri_2(t) = -r \frac{N_1}{N_2}i_1(t).$$

Por lo tanto, la fuente controlada es equivalente a un resistor de resistencia igual a rN_1/N_2 . Por esto concluimos que la fuente controlada sólo puede recibir potencia.

Errores

Dada la simplicidad de la red, la mayor parte de los errores que se cometen, son de tipo conceptual. Señalamos a continuación aquellos más frecuentes.

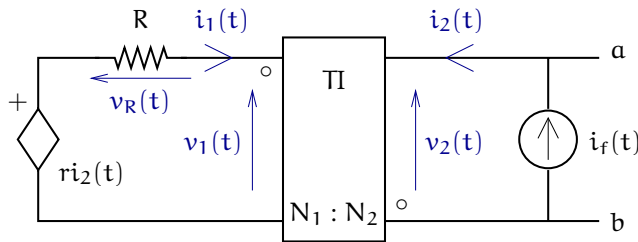
Error 1 Errores en la formulación de LVK.

Error 2 Establecer de forma errónea las relaciones de transformación de tensión y corriente, en el transformador ideal.

Error 3 Error en el cálculo de la potencia entregada (o recibida) en algún componente, debido a la utilización de referencias erróneas para las variables de tensión y corriente.

Una variante de interés

Una variante de interés al problema analizado antes, es ver que cambio introduce en los resultados obtenidos, el cambio en la polaridad de acoplamiento del TI. Para esto, consideremos la siguiente red, la cual muestra el cambio mencionado



Como las referencias de las variables de tensión y corriente no han sufrido cambios, solo la relación de tensiones y corrientes del TI tendrán cambios. Así, las nuevas ecuaciones que rigen el comportamiento del TI son

$$v_1(t) = -\frac{N_1}{N_2}v_2(t) \quad \text{e} \quad i_1 = \frac{N_2}{N_1}i_2. \quad (5.38)$$

Por lo tanto, en la obtención del equivalente Thevenin, los cálculos que se verán afectados por los cambios mostrados en (5.38) son los realizados en (5.31) y (5.32). Así, tenemos que con el cambio en la relación de acoplamiento del TI, $v_2(t)$ será

$$v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} \left(R \frac{N_2}{N_1} - r \right) i_2(t).$$

Con esto, tenemos que el equivalente Thevenin estará dado por

$$R_{Th} = R_{eq} = \frac{N_2}{N_1} \left(R \frac{N_2}{N_1} - r \right) \quad \text{y} \quad v_{Th} = R_{eq} i_f(t). \quad (5.39)$$

Otro cambio importante de notar, es el que ocurre en el cálculo de la potencia entregada por la fuente controlada. Esto se ve reflejado en (5.37), donde hemos utilizado la relación de transformación para las corrientes del TI. Es por esto que la nueva expresión para $i_1(t)$ es

$$i_1(t) = \frac{N_1}{N_2} \left(i_f(t) - \frac{v_{Th}}{R_{Th} + R_C} \right),$$

y por lo tanto la potencia entregada por la fuente controlada de tensión estará dada por

$$p_{fc}(t) = r \frac{N_1}{N_2} \left(\frac{R_C}{R_{Th} + R_C} \right)^2 i_f(t)^2,$$

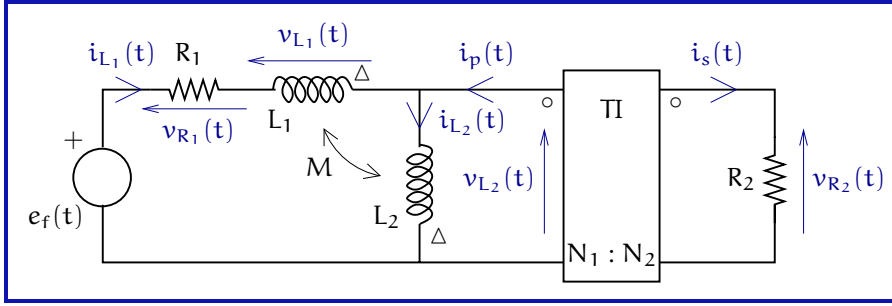
donde R_{Th} es como la definida en (5.39).

Podemos notar que, a diferencia de la red considerada en el problema principal, la fuente controlada es equivalente a un resistor de valor negativo, dado por $-rN_1/N_2$. Por lo tanto, en la red considerada en esta variante, la fuente controlada sólo puede entregar potencia.

5.3.3. Red con Transformador Ideal y Acoplamiento Magnético

Problema 5.5.

Considere la red de la siguiente figura, la cual cuenta con dos inductores acoplados magnéticamente y un transformador ideal. Además, suponemos conocidos los valores de L_1 , L_2 , M , R_2 , R_1 y $e_f(t)$.



Si consideramos que la fuente independiente de tensión $e_f(t)$ es una fuente de valor variable, no necesariamente sinusoidal, determine un conjunto consistente de dos ecuaciones, en la incógnitas $i_{L_1}(t)$ e $i_s(t)$.

Solución

Considere la red bajo estudio, al aplicar la LVK en la malla que contiene a la fuente de tensión, tenemos que

$$e_f(t) = R_1 i_{L_1}(t) + v_{L_1}(t) + v_{L_2}(t). \quad (5.40)$$

Podemos observar de la figura, que entre los inductores existe un acoplamiento magnético aditivo dado que sus corrientes están definidas bajo la misma referencia respecto al símbolo Δ . Así, las tensiones en estos elementos se pueden escribir como

$$v_{L_1}(t) = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M \frac{di_{L_2}}{dt}(t), \quad (5.41a)$$

$$v_{L_2}(t) = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}(t) + M \frac{di_{L_1}}{dt}(t). \quad (5.41b)$$

Utilizando (5.41a) en (5.40) obtenemos

$$e_f(t) = R_1 i_{L_1}(t) + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}(t) + M \frac{di_{L_2}}{dt}(t) + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}(t) + M \frac{di_{L_1}}{dt}(t). \quad (5.42)$$

Por otro lado, aplicando la LCK en el nodo que contiene a los inductores tenemos que

$$i_{L_2}(t) = i_{L_1}(t) + i_p(t) \quad (5.43)$$

y, usando la definición del transformador ideal,

$$i_p(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_s(t), \quad (5.44)$$

(5.43) se puede escribir como

$$i_{L_2}(t) = i_{L_1}(t) - \frac{N_2}{N_1} i_s(t). \quad (5.45)$$

Así, reemplazando (5.45) en (5.42), se obtiene la primera ecuación del sistema buscado:

$$e_f(t) = R_1 i_{L_1}(t) + (L_1 + L_2 + 2M) D i_{L_1}(t) - \frac{N_2}{N_1} (L_2 + M) D i_s(t). \quad (5.46)$$

Para obtener la segunda ecuación buscada, usemos la ecuación de tensiones en el TI,

$$v_{R_2}(t) = \frac{N_2}{N_1} v_{L_2}(t) \quad (5.47)$$

y notemos, además, que las variables de tensión involucradas en esta relación están dadas por

$$v_{L_2}(t) = L_2 i_{L_2}(t) + M D i_{L_1}(t) = (L_2 + M) D i_{L_1}(t) - \frac{N_2}{N_1} L_2 D i_s(t), \quad (5.48)$$

$$v_{R_2}(t) = i_s(t) R_2, \quad (5.49)$$

donde hemos utilizado la relación (5.45) en (5.48).

Así, utilizando (5.48) y (5.49) en (5.47), la segunda ecuación buscada está dada por

$$(L_2 + M) D i_{L_1}(t) - \frac{N_2}{N_1} L_2 D i_s(t) = \frac{N_1}{N_2} i_s(t) R_2 \quad (5.50)$$

Considerando los resultados obtenidos, podemos comentar lo siguiente:

- El conjunto de ecuaciones (5.46) y (5.50) muestra que, dentro de la descripción obtenida, la red puede ser descrita como si ésta fuera una red con solo dos mallas. Esto es posible por la relación que impone el transformador ideal entre las señales $v_{L_2}(t)$ ($i_p(t)$) y $v_{R_2}(t)$ ($i_s(t)$). Así, es posible establecer una equivalencia para el TI y R_2^1 , quedando una red de solo dos mallas.
- Considerando el comentario anterior, podemos escribir las ecuaciones (5.46) y (5.50) de forma matricial. Esta forma de escribirlas correspondería a una formulación directa utilizando el **método de mallas**. Así, tenemos que

$$\begin{bmatrix} R_1 + (L_1 + L_2 + 2M)D & -\frac{N_2}{N_1} (L_2 + M)D \\ (L_2 + M)D & -\frac{N_2}{N_1} L_2 D - \frac{N_1}{N_2} R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1}(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Errores

En este tipo de problemas, la mayor cantidad de errores que se cometen, son conceptuales. Señalamos a continuación aquellos más frecuentes.

¹En el Problema 5.3 se considera el estudio de este tipo de equivalencia.

Error 1 Errores en la formulación de LVK y LCK.

Error 2 Utilizar una relación de transformación errónea en el transformador ideal. Un ejemplo de esto, es haber utilizado la relación

$$i_p(t) = -\frac{N_1}{N_2}i_s(t)$$

en (5.44).

Error 3 Utilizar una relación de transformación errónea en el transformador ideal, respecto a la referencia de las variables de tensión y corriente. Un ejemplo de esto, es haber utilizado la relación

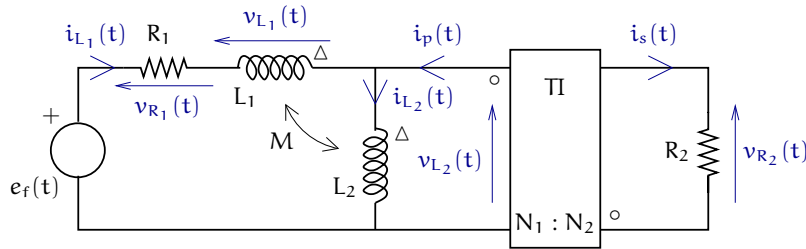
$$i_p(t) = \frac{N_2}{N_1}i_s(t)$$

en (5.44).

Error 4 Considerar un acoplamiento magnético sustractivo, cuando es aditivo.

Una variante de interés

Como una variante al problema desarrollado anteriormente, analicemos que ocurre con los resultados obtenidos anteriormente, considerando la siguiente red



donde hemos cambiado la polaridad del acoplamiento en el TI, y entre L_1 y L_2 , respecto a la red original.

Como un primer paso, veamos que efectos tiene el cambio en la relación de acoplamiento entre los inductores, en la búsqueda de la primera ecuación. Observando la figura, podemos deducir que ahora existe un acoplamiento magnético sustractivo entre L_1 y L_2 . Este cambio se verá reflejado en (5.41a), en el signo correspondiente al acoplamiento. Así, tenemos que

$$v_{L_1}(t) = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}(t) - M \frac{di_{L_2}}{dt}(t) \quad \text{y} \quad v_{L_2}(t) = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}(t) - M \frac{di_{L_1}}{dt}(t). \quad (5.51)$$

Como segundo paso, veamos que efectos tiene el cambio en la relación de acoplamiento en el TI, en la búsqueda de la primera ecuación. De la red, podemos ver que este cambio afecta en la relación de transformación utilizada en (5.44), con lo que obtenemos para este caso

$$i_p(t) = \frac{N_2}{N_1}i_s(t). \quad (5.52)$$

Con (5.51) y (5.52) obtenemos que la primera ecuación buscada es

$$e_f(t) = R_1 i_{L_1}(t) + (L_1 + L_2 - 2M)D i_{L_1}(t) - \frac{N_2}{N_1}(M - L_2)D i_s(t).$$

Para la obtención de la segunda ecuación, vemos que el cambio en la relación de acoplamiento en el TI, modifica la ecuación (5.47) quedando

$$v_{R_2}(t) = \frac{N_2}{N_1} v_{L_2}(t). \quad (5.53)$$

Con (5.53), junto a la nueva relación para $v_{L_2}(t)$ en (5.51), tenemos que la segunda ecuación buscada queda

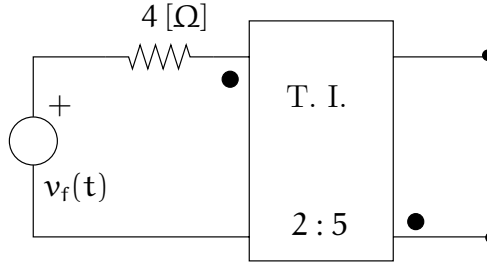
$$(L_2 - M)D i_{L_1}(t) + \frac{N_2}{N_1} L_2 D i_s(t) = -\frac{N_1}{N_2} i_s(t) R_2.$$

Así, podemos resumir estos resultados escribiendo las ecuaciones buscadas en forma matricial

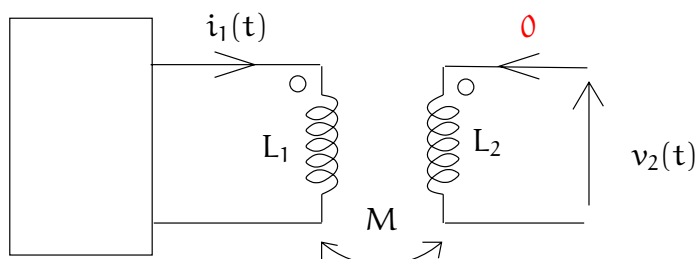
$$\begin{bmatrix} R_1 + (L_1 + L_2 - 2M)D & \frac{N_2}{N_1}(L_2 - M)D \\ (L_2 - M)D & \frac{N_2}{N_1}L_2 D + \frac{N_1}{N_2}R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1}(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4. Ejercicios suplementarios

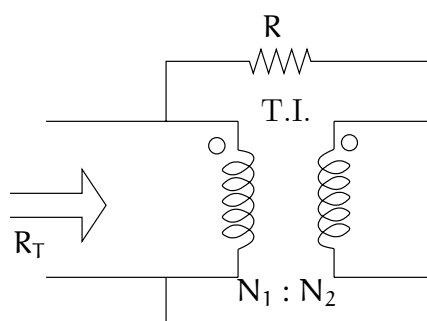
Problema 5.6. Calcule la corriente Norton de la red de la figura, si se sabe que $v_f(t) = 20 \cos(5t)$



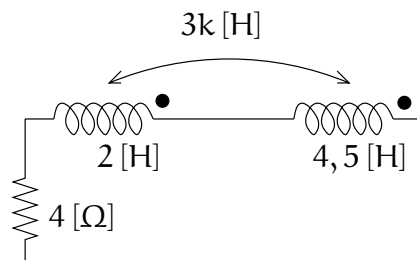
Problema 5.7. Calcule la tensión $v_2(t)$, si $L_1 = 3$ [H], $L_2 = 6$, [H], $M = 4$ [H], $i_1(t) = 5e^{-2t} + 3 \cos(5t)$ [A].



Problema 5.8. Calcule la resistencia Thevenin de la red de la figura



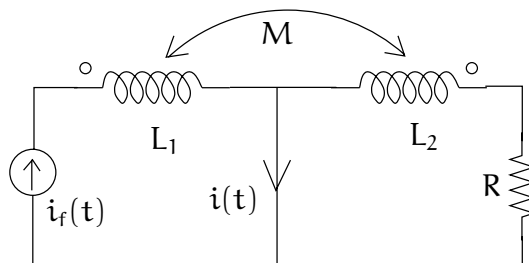
Problema 5.9. Considere la red de la figura



Para resolver este problema debe haber estudiado el capítulo de redes sujetas a excitación sinusoidal y en estado estacionario.

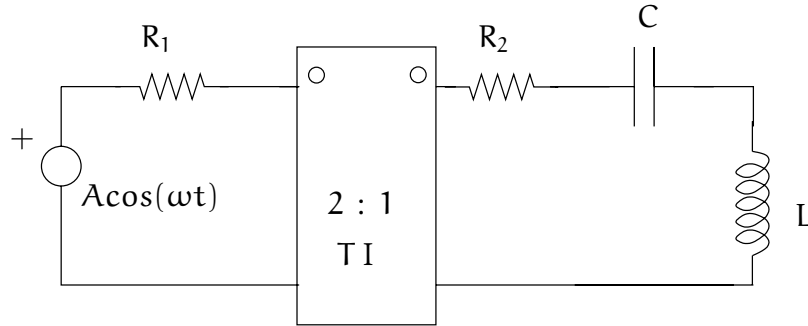
Si $\omega = 1$ [rad/s], ¿entre qué valores varía el FP de la red si el factor de acoplamiento k varía entre 0 y 1?

Problema 5.10. Considere la red de la figura.



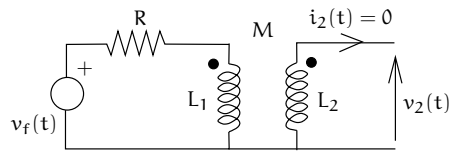
En la red $i_f(t) = 3 \cos(5t)$ [A], $L_1 = L_2 = 2/5$ [H], $M = 1/5$ [H] y $R = 1$ [Ω]. Obtenga una expresión para calcular $i(t) \forall t \geq 0$.

Problema 5.11. Considere la red de la figura.

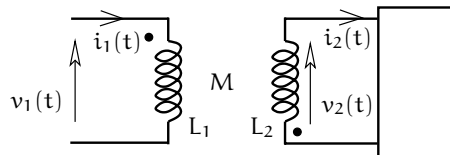


Calcule la potencia media entregada por la fuente de tensión si $C = 10$ [μ F], $C = 1$ [mH], $R_2 = 2$ [Ω] y $R_1 = 1$ [Ω].

Problema 5.12. Suponga la red de la figura, donde $R_1 = 2$, $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $M = 1$ y $v_f(t) = \cos(2t)$. Obtenga una expresión, si es posible, para tensión $v_2(t) \forall t \geq 0$.

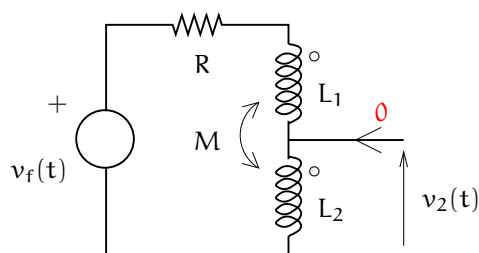


Problema 5.13. Considere la red de la figura



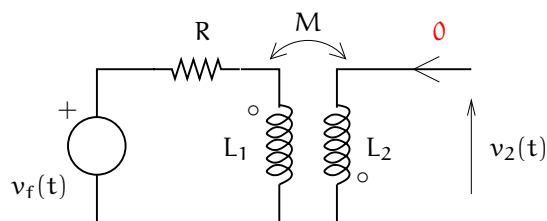
Se sabe que $i_1(t) = 0$, $v_2(t) = 5 \cos(314t)$, $\forall t \geq 0$
 $L_1 = 3$ [H], $L_2 = 2$ [H] y $M = 1$ [H]. Calcule $v_1(t)$, $\forall t \geq 0$.

Problema 5.14. Considere la red de la figura, donde $R = 10$ [Ω], $L_1 = 2$ [H], $L_2 = 1$ [H], $M = 1$ [H].



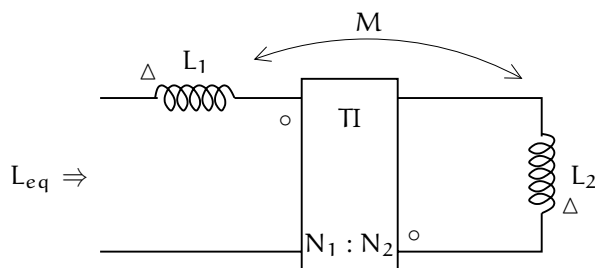
Analizar la red para $v_f(t) = 4\text{seno}(5t)$. Formule el modelo matemático, resuelva usando MATHEMATICA y simule con LTSPICE.

Problema 5.15. Considere la red de la figura, donde $R = 1[\text{K}\Omega]$, $L_1 = 0,8[\text{H}]$, $L_2 = 0,2[\text{H}]$, $M = 0,3[\text{H}]$, $v_f(t) = 40(\mu(t) - \mu(t - \tau))$.

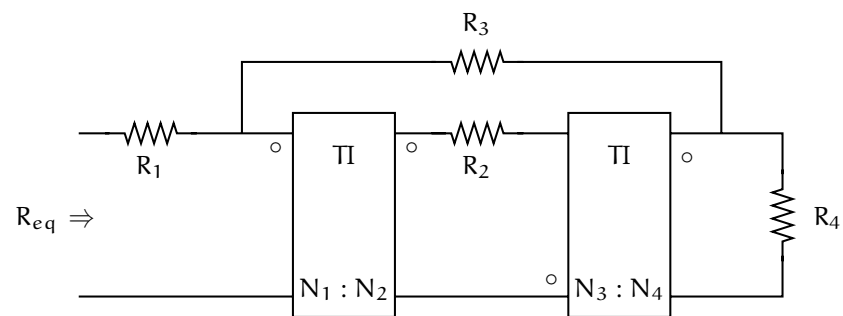


Calcule y grafique $v_2(t)$ para $\tau = 0, 1, 10[\text{ms}]$. Resuelva usando MATHEMATICA y simule con LTSPICE.

Problema 5.16. Calcule la inductancia equivalente L_{eq} . Exprese L_{eq} en función de L_1 , L_2 , M y $(N_1 : N_2)$.



Problema 5.17. Suponga la red de la figura, donde $R_1 = 1[\text{K}\Omega]$, $R_2 = 2[\text{K}\Omega]$, $R_3 = 3[\text{K}\Omega]$, $R_4 = 3[\text{K}\Omega]$, $N_1 : N_2 = 1 : 2$ y $N_3 : N_4 = 3 : 2$.



Calcule la resistencia equivalente R_{eq} . Resuelva usando MATHEMATICA .

Capítulo 6

REDES ELÉCTRICAS CON EXCITACIONES SINUSOIDALES Y EN ESTADO ESTACIONARIO.

6.1. Introducción

El análisis de redes en estado estacionario y con excitaciones sinusoidales constituye uno de los problemas de mayor ocurrencia y de mayor trascendencia en el campo de la ingeniería eléctrica y electrónica. Las razones para ello son muchas y muy variadas; sin embargo, lejos la más importante guarda relación con el hecho que un porcentaje muy elevado de la energía se genera a través de tensiones y corrientes sinusoidales. Este hecho, a su vez, se origina en que los generadores eléctricos son máquinas que, en su inmensa mayoría transforman energía mecánica de rotación en energía eléctrica. Es precisamente la rotación en campos magnéticos la que genera la presencia de sinusoides.

Cuando una red eléctrica lineal es excitada con fuentes de tensión y/o de corriente sinusoidales, responde con señales sinusoidales que tiene la misma frecuencia de las excitaciones, pero con amplitudes y fases que dependen de la red en particular. Sin embargo, las respuestas de la red contienen otras señales, denominadas modos naturales. **En este capítulo supondremos que esos modos naturales, tienden asintóticamente a cero.** En la teoría de sistemas lineales esta suposición es equivalente a suponer que **la red es estable.**

Para ser mas específico, supongamos pues que la única excitación en una red es

una senoide de frecuencia angular ω_1 . Entonces, la señal elegida como respuesta contiene una senoide, también de frecuencia ω_1 , más una combinación lineal de los modos naturales de la red. Como la red es estable, esos modos decaen asintóticamente a cero, en consecuencia, como nos interesa únicamente el estado estacionario, sólo observaremos la respuesta estacionaria. Note además que, en este marco de análisis, las condiciones iniciales de la red no afectan el resultado, ya que sólo aparecen en la respuesta dando mayor o menor magnitud a los modos naturales. El estado en el que lo único que se observa en la red son señales sinusoidales, porque los modos naturales se han extinguido, se conoce como **estado estacionario**.

Para poder seguir los desarrollos presentados en este capítulo, es necesario que el estudiante esté familiarizado con los conocimientos básicos del análisis de redes eléctricas. Este conjunto de conocimientos previos incluyen los métodos generales de análisis. Adicionalmente, se supone que el estudiante tiene conocimiento y habilidad en el cálculo con números complejos. Se ha incluido un apéndice que resume los resultados de la aritmética de números complejos que tienen el mayor interés para este capítulo.

En este texto de ejercicios, se usará el siguiente par que define la transformada fasorial

$$\mathcal{P}\{C \cos(\omega t + \gamma)\} = \frac{C}{\sqrt{2}} e^{j\gamma} = \frac{C}{\sqrt{2}} (\cos \gamma + j \operatorname{seno} \gamma)$$

$$\mathcal{P}^{-1}\{D e^{j\delta}\} = \sqrt{2} D \cos(\omega t + \delta) = \sqrt{2} D \cos(\delta) \cos(\omega t) - \sqrt{2} D \operatorname{seno}(\delta) \operatorname{seno}(\omega t)$$

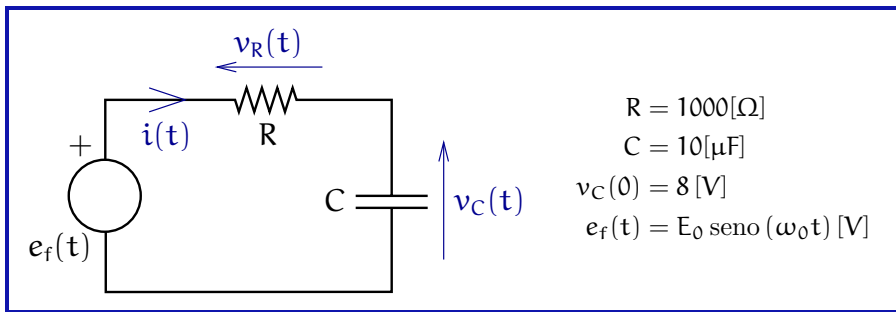
En estas definiciones, $\mathcal{P}\{\circ\}$ denota la transformada fasorial y $\mathcal{P}^{-1}\{\circ\}$ se usa para definir la transformada fasorial inversa.. Naturalmente que para obtener la transformada fasorial inversa de un número complejo, se debe conocer la frecuencia angular ω .

6.2. Conceptos básicos en redes con excitaciones sinusoidales.

6.2.1. Red RC con un condensador. Análisis de los fenómenos transitorios.

Problema 6.1.

Considere la red RC de la figura. Se trata de analizarla dadas la condición inicial en el condensador y la excitación sinusoidal, con los datos de la red que se indican. Dentro de este análisis, se considera el estudio de la respuesta transitoria que exhibe la red. Con esto, se busca presentar los alcances que tiene la transformada fasorial en el análisis de redes en estado estacionario.



Utilizando $E_0 = 10$ y $\omega_0 = 314 [\text{rad s}^{-1}]$:

6.1.1 Calcule $v_C(t)$ e $i(t)$, $\forall t \geq 0$.

6.1.2 Para la red en estado estacionario, calcule $v_C(t)$ e $i(t)$.

6.1.3 ¿Cuál es el efecto de la condición inicial del condensador en la respuesta de la red?

Solución

Considerando la red bajo análisis, debemos encontrar una expresión que relacione las características fundamentales de las señales de excitación de la red, como es la frecuencia ω_0 , las características propias de los elementos de la red, y la condición inicial de condensador $v_C(0)$. Para lograr esto, utilicemos las leyes básicas para el análisis de redes.

Observando la figura, al aplicar la LVK, deducimos que las tensiones en los componentes están relacionadas por

$$e_f(t) = v_R(t) + v_C(t). \quad (6.1)$$

A su vez, el Tercer Postulado nos dice que la relación entre las variables de tensión y corriente en los elementos de esta red están dadas por

$$v_R(t) = Ri(t), \quad i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}. \quad (6.2)$$

Reduciendo el sistema de ecuaciones y reemplazando (6.2) en (6.1), obtenemos la ecuación diferencial

$$e_f(t) = \tau \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t), \quad (6.3)$$

Para obtener esta solución, se sugiere usar MAPLE o MATHEMATICA . con $\tau = RC$. Esta ecuación, tiene como solución general

$$v_C(t) = K_1 \text{seno}(\omega_0 t - \theta) + (K_2 \tau + v_C(0)) e^{-t/\tau}, \quad (6.4)$$

donde

$$K_1 = K_2 K_3, \quad K_2 = \frac{E_0 \omega_0}{1 + \omega_0^2 \tau^2}, \quad K_3 = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2}, \quad \theta = \text{seno}^{-1}\left(\frac{\tau}{K_3}\right).$$

Con (6.4) podemos calcular $i(t)$, utilizando el Tercer Postulado para el condensador vista en (6.2). Así, la corriente por la red es

$$i(t) = C \omega_0 K_1 \cos(\omega_0 t - \theta) - C \left(K_2 + \frac{v_C(0)}{\tau} \right) e^{-t/\tau}. \quad (6.5)$$

Al existir esta combinación de términos, notamos que habrá transiente aunque la c.i. del condensador fuese cero.

Para apreciar de mejor forma el comportamiento de la red, determinada por la expresiones (6.4) y (6.5), la figura 6.1 muestra estas señales en el tiempo, junto a la tensión en el resistor, $v_R(t)$. En esta figura, podemos observar el lapso donde la respuesta está en estado transitorio (entre $t = 0$ [s] y $t \approx 0,04$ [s]) en el cual se advierten los términos exponenciales presentes en (6.4) y (6.5), los cuales corresponden a una combinación de los modos naturales del sistema (los que tienden asintóticamente a cero) mencionados en la introducción a este capítulo, y a la condición inicial del condensador. Además, a partir de $t \approx 0,04$ [s], deducimos que la red está en estado estacionario, ya que la respuesta está compuesta solo de señales sinusoidales.

También, podemos apreciar que el desfase que existe entre la corriente y la tensión en el resistor es cero, lo cual concuerda con el Tercer Postulado de este elemento. Por el contrario, observamos que el desfase entre $i(t)$ y $v_C(t)$ es de 90° . Esto se explica por el comportamiento dinámico del condensador, representado a través de la derivada presente en el Tercer Postulado correspondiente a este elemento.

Es simple notar que la expresión numérica obtenida para $v_C(t)$, cumple con la condición inicial para la tensión en el condensador, $v_C(0) = 8$ [V], al evaluar la expresión para $v_C(t)$ en $t = 0$ [s].

Se verifica además, que las expresiones (6.4) y (6.5), describen lo presentado en la figura, considerando los valores numéricos

$$v_C(t) = 3,03 \text{seno}(\omega_0 t - 1,26) + 10,89 e^{-t/\tau} \text{ [V]}, \quad (6.6)$$

$$i(t) = 9,53 \cos(\omega_0 t - 1,26) + 10,89 e^{-t/\tau} \text{ [mA]}.$$

La metodología de la transformada fasorial para el cálculo de las variables de interés en este problema, considera solo la parte estacionaria de éstas. De

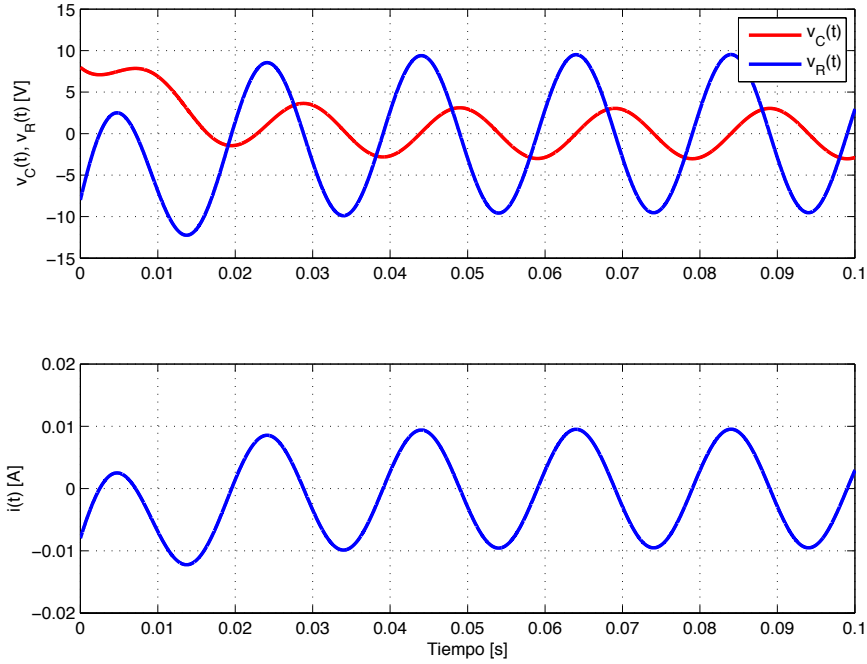
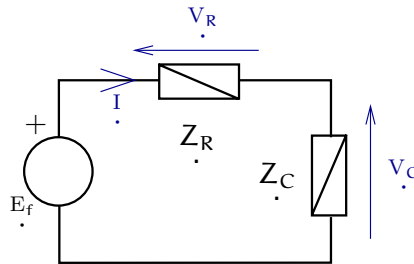


Figura 6.1: Señales $v_C(t)$, $v_R(t)$ e $i(t)$, para la red RC con condiciones iniciales y excitación sinusoidal.

esta forma, podemos realizar el análisis de la red de la siguiente manera. Reescribamos las relaciones dadas en (6.2), en el dominio fasorial

$$\dot{V}_R = \dot{Z}_1 \dot{I}, \quad \dot{V}_C = \dot{Z}_2 \dot{I}, \quad (6.7)$$

donde $\dot{I} = \mathcal{P}\{i(t)\}$, $\dot{V}_R = \mathcal{P}\{v_R(t)\}$ y $\dot{V}_C = \mathcal{P}\{v_C(t)\}$. Así, podemos analizar la red, utilizando el equivalente en el dominio fasorial que muestra la siguiente figura



donde $\dot{E}_f = \mathcal{P}\{e_f(t)\}$. Además, $\dot{Z}_R$ y $\dot{Z}_C$, representan las **impedancias** del resistor

y el condensador respectivamente, para las cuales se sabe que

$$\dot{Z}_R = R, \quad \dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega_0 C}. \quad (6.8)$$

Aplicando la LVK a la red anterior, y utilizando las relaciones definidas en (6.7), obtenemos

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_f}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C}. \quad (6.9)$$

Podemos reducir (6.9), utilizando las definiciones mostradas en (6.8) para las impedancias, y considerando la transformada fasorial de la fuente de tensión

$$\dot{E}_f = \mathcal{P}\{e_f(t)\} = \mathcal{P}\{E_0 \text{ seno}(\omega_0 t)\} = \mathcal{P}\left\{E_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/2}.$$

Así, tenemos que el fasor asociado a la corriente $i(t)$ está dado por

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_f}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = \frac{\frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/2}}{\dot{Z}} = \frac{\frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/2}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}e^{j(\varphi - \pi/2)} \quad (6.10)$$

donde se ha utilizado $\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_C$, para lo cual

$$\hat{I} = \frac{E_0}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega_0 RC}\right).$$

Con el resultado anterior, resulta simple calcular la expresión temporal, en estado estacionario, para $i(t)$. Para ello aplicamos la transformada fasorial inversa a (6.10), obteniendo

$$i(t) = \mathcal{P}^{-1}\left\{\dot{I}\right\} = \hat{I} \cos\left(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.11)$$

Para saber la tensión en el condensador, $v_C(t)$, deduzcamos la expresión para el fasor asociado a esta variable usando el Tercer Postulado para este elemento, definido en (6.7), y la expresión (6.9) para la corriente por la red. Obtenemos así

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C}\dot{I} = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega_0 C}\dot{I} = \frac{\hat{V}_C}{\sqrt{2}}e^{j(\varphi - \pi)}, \quad (6.12)$$

con $\hat{V}_C = \hat{I}/(\omega_0 C)$.

A partir de (6.12) podemos conocer la expresión temporal para la tensión en el condensador, aplicando la transformada fasorial inversa a $\dot{V}_C$. Realizando este cálculo obtenemos

$$v_C(t) = \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{V}_C \right\} = -\hat{V}_C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (6.13)$$

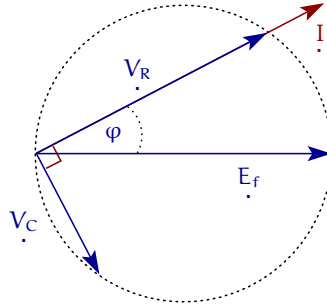
Las expresiones obtenidas para $i(t)$ y $v_C(t)$ a través de la solución de la ecuación diferencial, y del análisis fasorial, merecen los siguientes comentarios:

- La principal diferencia entre las soluciones obtenidas por ambos métodos, radica en la existencia de un término exponencial en la solución entregada por la ecuación diferencial. Es esta componente en la solución, que tiende asintóticamente a cero, la que asociamos a la existencia del fenómeno transitorio en el comportamiento de la red.

Con lo anterior, verificamos que la transformada fasorial solo incluye la respuesta estacionaria de la red bajo análisis, ya que la solución mostrada en (6.11) y (6.13), omite los términos exponenciales mencionados anteriormente.

- Observamos que las soluciones, obtenidas con ambos métodos, poseen señales sinusoidales de la misma frecuencia que la señal de excitación de la red. Además, las señales de tensión y corriente presentan diferencias en sus amplitudes y desfases (en función de los elementos que componen la red) lo cual es propio de una sistema lineal excitado por señales sinusoidales.
- Las señales de tensión y corriente, en estado estacionario, pueden ser graficadas en un diagrama fasorial como el mostrado a continuación. En él, se observa claramente la relación angular entre las señales de interés. Además, podemos visualizar a $\dot{V}_R$, $\dot{V}_C$ y $\dot{E}_f$ como los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\dot{E}_f$.

El diagrama fasorial solo muestra una relación cualitativa entre las señales de corriente y tensión, por tener éstas distintas unidades de medida.

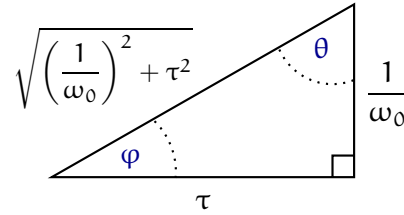


- Como una forma alternativa a la solución planteada anteriormente, $v_C(t)$ puede ser obtenida aplicando el **divisor de tensión**, a la red equivalente en el dominio fasorial. Por lo tanto, podemos expresar $\dot{V}_C$ de forma directa como

$$\dot{V}_C = \dot{E}_f \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C},$$

para el posterior cálculo de $v_C(t)$, a través de la transformada fasorial inversa.

- Comprobamos también la equivalencia entre las soluciones obtenidas por ambos métodos (considerando solo la parte correspondiente a la respuesta estacionaria) deduciendo que la siguiente relación entre los ángulos φ y θ



- Las impedancias no son transformadas fasoriales de ninguna señal, y no tienen equivalente en el dominio del tiempo. Ellas corresponden al cociente de dos transformadas fasoriales.
- Podemos verificar que la solución obtenida mediante el análisis fasorial, entrega la misma solución que la obtenida al resolver la ecuación diferencial (6.3), excepto por los términos que describen la componente transitoria de las señales. De esta forma, podemos mostrar los alcances que tiene el análisis fasorial, el cual no incorpora la respuesta transitoria de la red, en la solución que entrega. Al utilizar los valores numéricos de los elementos del circuito, obtenemos

$$v_C(t) = 3,03 \cos(\omega_0 t + 0,31) \text{ [V]},$$

$$i(t) = 9,53 \cos(\omega_0 t - 1,26) \text{ [mA]},$$

lo cual corresponde a los términos que no decaen a cero, en (6.6).

Con los resultados obtenidos anteriormente, podemos identificar la influencia que tiene la condición inicial del condensador, en el comportamiento de la red. Observando la solución obtenida mediante la ecuación diferencial, (6.4), notamos que $v_C(0)$ influye solamente en el factor que acompaña al término exponencial que decae a cero. Por lo tanto, las condiciones iniciales de la red influyen solamente en el comportamiento transitorio de la red, y no comprometen de forma alguna la respuesta estacionaria de las señales. Esto último es lo que justifica la utilización del análisis fasorial, ya que éste omite el efecto transiente y solo considera las señales en estado estacionario.

Errores

Error 1 Errores numéricos al realizar cálculos con números complejos.

Error 2 Aplicar de forma errónea la LVK, obteniendo una ecuación diferencial de la forma

$$e_f(t) = -\tau \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t), \quad (6.14)$$

con $\tau = RC$, la cual tiene por solución

$$v_C(t) = K_1 \text{seno}(\omega_0 t - \theta) + (K_2 \tau + v_C(0)) e^{t/\tau}. \quad (6.15)$$

En esta solución, observamos que el término exponencial diverge, es decir que los modos naturales del sistema no tienden asintóticamente a cero, lo cual representaría una **red inestable**. Por lo tanto, la solución encontrada no representa el real comportamiento de la red.

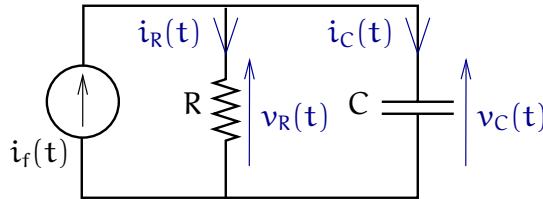
Error 3 Realizar de forma errónea la transformación de la forma cartesiana a la exponencial, en la impedancia Z_C , correspondiente al condensador.

$$Z_C = \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{-j}{\omega_0 C} \neq \frac{e^{j\pi/2}}{\omega_0 C}$$

Error 4 Olvidar multiplicar por $\sqrt{2}$ al obtener la señal temporal, utilizando la transformada fasorial inversa, $\mathcal{P}^{-1}\{\circ\}$.

Una variante de interés

Una variante al problema principal, considera una red RC conectada en paralelo a una fuente de corriente, como muestra la siguiente figura



donde $i_f(t) = I_o \text{seno}(\omega_0 t)$.

La principal diferencia de esta configuración, respecto a la analizada en el problema principal, radica en que para esta red, la tensión es la misma para todos los elementos de la red. Así, por la LCK tenemos que

$$i_f(t) = i_R(t) + i_C(t). \quad (6.16)$$

Junto a esto sabemos, por las leyes de Tercer Postulado, que

$$i_R(t) = \frac{v_C(t)}{R} \quad i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (6.17)$$

donde se ha utilizado que $v_R(t) = v_C(t)$, al aplicar la LVK.

A partir de (6.16) y (6.17), deducimos la ecuación diferencial que modela la red estudiada

$$Ri_f(t) = \tau \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t),$$

la cual tiene como solución

$$v_C(t) = K_1 \text{seno}(\omega_0 t - \alpha) + (K_2 \tau + v_C(0)) e^{-t/\tau}, \quad (6.18)$$

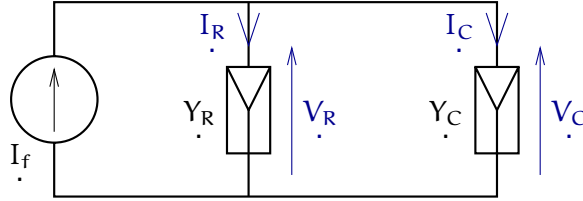
con $\tau = RC$, y

$$K_1 = K_2 K_3, \quad K_2 = \frac{I_0 R \omega_0}{1 + \omega_0^2 \tau^2}, \quad K_3 = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2}, \quad \alpha = \text{seno}^{-1}\left(\frac{\tau}{K_3}\right).$$

Podemos notar, que (6.18) es similar a la solución obtenida en (6.4), para la red con los elementos conectados en serie con la fuente de tensión.

A partir de (6.18), el cálculo del resto de las variables de la red se puede desarrollar de forma simple, utilizando (6.16) y (6.17).

Para encontrar las expresiones que describen las variables de interés, en estado estacionario, utilicemos el equivalente en el dominio fasorial de la red. Una representación que hace más simple el cálculo, es utilizar las **admitancias** de los elementos de la red, como muestra la siguiente figura



donde

$$Y_R = \frac{1}{R}, \quad Y_C = j\omega_0 C.$$

Al aplicar la LCK a la red equivalente en el dominio fasorial mostrada anteriormente, y considerando que la relación para la tensión y corriente en los elementos está dada por

$$I_R = Y_R V_R \quad e \quad I_C = Y_C V_C,$$

tenemos que

$$V_C = \frac{I_f}{Y_R + Y_C} = \frac{I_0}{Y\sqrt{2}} e^{-j(\pi/2 + \beta)}, \quad (6.19)$$

donde hemos utilizado la equivalencia entre la forma cartesiana y exponencial, para representar la suma de las admitancias $Y = Y_R + Y_C$, sabiendo que

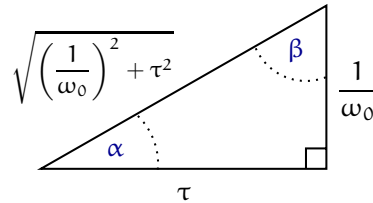
$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega_0 C)^2}, \quad \beta = \tan^{-1}(\omega_0 RC). \quad (6.20)$$

Finalmente, podemos calcular $v_C(t)$ aplicando la transformada fasorial inversa a (6.19), obteniendo

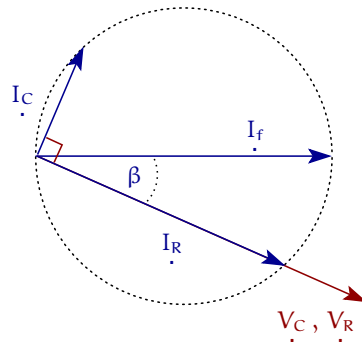
$$v_C(t) = \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{V}_C \right\} = \frac{I_0}{Y} \cos(\omega_0 t - \beta - \pi/2) \quad (6.21)$$

Las expresiones (6.18) y (6.21) merecen los siguientes comentarios:

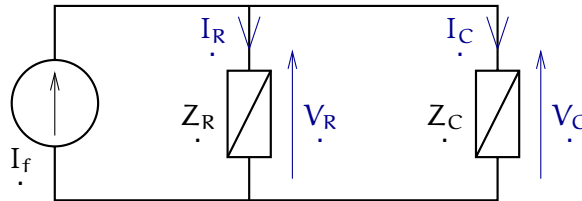
- Las soluciones obtenidas al resolver la ecuación diferencial, y al utilizar la transformada fasorial, son equivalentes si consideramos la relación



- Al desarrollar el cálculo de (6.21), deducimos que la relación entre las señales de tensión y corriente de la red, pueden ser graficadas como muestra el siguiente diagrama fasorial. En él, observamos la relación angular que existe entre las variables de interés, lo que permite visualizar a $\dot{I}_R$, $\dot{I}_C$ e $\dot{I}_f$ como los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\dot{I}_f$.



- Un camino alternativo, y análogo a lo comentado en el problema principal, es utilizar el **divisor de corriente** para realizar el cálculo anterior. Así, si consideramos el siguiente equivalente con **impedancias**,



donde éstas son como las definidas en (6.8), tenemos que el fasor asociado a la corriente en el condensador queda expresado como

$$\dot{I}_C = \dot{I}_f \frac{\dot{Z}_R}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C}. \quad (6.22)$$

Por lo tanto, utilizando el Tercer Postulado en el dominio fasorial para el condensador, obtenemos la tensión en este elemento

$$\dot{V}_C = \dot{Z}_C \dot{I}_C = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \frac{R}{\sqrt{1^2 + (\omega_0 RC)^2}} e^{-j(\pi/2 + \phi)}. \quad (6.23)$$

Es simple verificar que (6.23) es equivalente a (6.19), por lo que la solución para $v_C(t)$ obtenida utilizando el divisor de corriente, es la misma que la obtenida en (6.21).

Además, utilizando la relación para las impedancias y admitancias

$$\dot{Z}_R = \frac{1}{\dot{Y}_R} \quad \text{y} \quad \dot{Z}_C = \frac{1}{\dot{Y}_C},$$

en (6.22), obtenemos el **divisor de corriente** utilizando el equivalente fasorial con admitancias

$$\dot{I}_C = \dot{I}_f \frac{\dot{Y}_C}{\dot{Y}_R + \dot{Y}_C}.$$

- Al observar la expresión (6.19), notamos que al utilizar el equivalente fasorial con admitancias, en una red en que todos sus elementos están conectados en paralelo, el cálculo de la tensión (común entre todos éstos) se simplifica bastante respecto a la utilización de un equivalente utilizando las impedancias correspondientes.

En general, para una red de la forma mostrada anteriormente, con n elementos conectados en paralelo, la tensión en estos está dada por

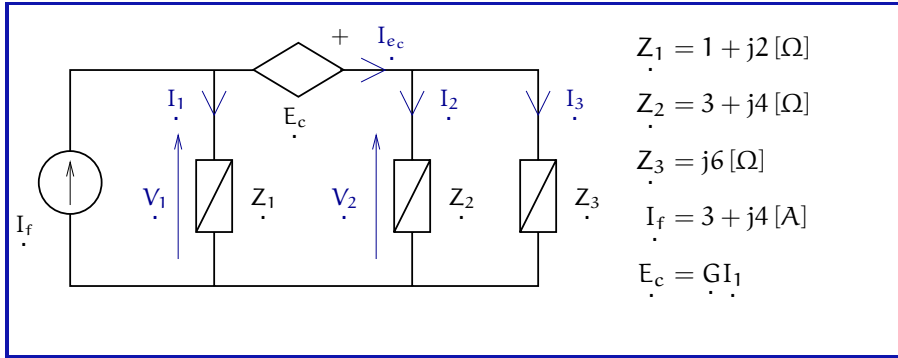
$$\dot{V}_C = \frac{\dot{I}_f}{\sum_{k=1}^n \dot{Y}_k} \quad (6.24)$$

6.2.2. Red RLC con fuentes controladas.

Problema 6.2.

En este problema, se analiza una red que contiene una fuente de tensión controlada por corriente. En la figura, se muestra el equivalente fasorial de la red, para la cual se entrega el valor de cada impedancia.

Al analizar esta red, se espera obtener las expresiones necesarias para entender el comportamiento de ésta, en función del parámetro que define la fuente controlada.



En la fuente controlada utilizada en esta red, el parámetro complejo $G = Ge^{j\gamma}$ representa una relación de amplitud (G) y desfase (γ) entre las sinusoides asociadas a E_c y I_1 . Así, con los datos del enunciado:

- 6.2.1** Calcule la potencia aparente entregada por I_f , si $G = 0,5 [\Omega]$.
- 6.2.1** Para $G = 0,5 [\Omega]$, calcule el factor de potencia visto por I_f .
- 6.2.1** Calcule $G \in \mathbb{R}$, para que el factor de potencia visto por I_f sea 0,9 IND.
- 6.2.1** Qué condición debe cumplir G , para que la potencia aparente entregada por E_c sea cero.

Solución

De la red mostrada en el enunciado, vemos que para saber la potencia aparente entregada por la fuente de corriente I_f , debemos calcular la tensión V_1 . Con este fin, deduzcamos las expresiones correspondientes a la LVK, LCK y Tercer Postulado. Así, por la LVK tenemos que

$$V_1 + E_c = V_2, \quad (6.25)$$

y por la LCK

$$I_f = I_1 + I_{ec}. \quad (6.26)$$

Además, podemos saber la tensión $\dot{V}_2$, a partir del **divisor de corriente** y el Tercer Postulado para $\dot{Z}_2$. De esta forma, obtenemos

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{e_c} \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3},$$

y

$$\dot{V}_2 = \dot{Z}_2 \dot{I}_2 = \dot{I}_{e_c} \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}. \quad (6.27)$$

Con este resultado, y sabiendo además el Tercer Postulado para $\dot{Z}_1$ y $\dot{E}_c$, podemos utilizar la LVK (6.25) para el cálculo de $\dot{I}_1$ como sigue a continuación

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + \dot{E}_c &= \dot{V}_2 \\ \dot{Z}_1 \dot{I}_1 + \dot{G} \dot{I}_1 &= \dot{V}_2 \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{G}} \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_{e_c} \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} \frac{1}{\dot{Z}_1 + \dot{G}} \end{aligned} \quad (6.28)$$

De (6.28) y (6.26) obtenemos

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_f \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_{eq} + \dot{G}}{\dot{Z}_{eq}}, \quad (6.29)$$

donde

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}$$

Teniendo $\dot{I}_1$, y utilizando el Tercer Postulado para $\dot{Z}_1$, es posible calcular la potencia aparente entregada por la fuente de corriente, ya que ésta se define por

$$P_{ap_{I_f}} = \dot{V}_1 \dot{I}_f^* = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 \dot{I}_f^*. \quad (6.30)$$

Según lo anterior, y con los datos del enunciado, tenemos que

$$P_{ap_{I_f}} = 103,43 e^{j0,97} [\text{KVA}].$$

(6.31)

Para calcular el factor de potencia que ve la fuente de corriente, podemos escribir la expresión (6.31) en la forma cartesiana

$$P_{ap_{I_f}} = 103,43 \cos(0,97) + j103,43 \operatorname{seno}(0,97) \text{ [KVA]},$$

de la cual podemos ver que el factor de potencia visto por la fuente de corriente es

$$\boxed{FP_{I_f} = \cos(0,97) = 0,56 \text{ IND.}}$$

Si consideramos que φ_{V_1} y φ_{I_f} son los ángulo de V_1 y I_f respectivamente, a partir de la expresión (6.30) deducimos que el factor de potencia que ve la fuente de corriente se puede escribir como

$$FP_{I_f} = \cos(\varphi_{V_1} - \varphi_{I_f}),$$

por lo que el valor buscado para el ángulo de V_1 , ya que φ_{I_f} es conocido, está dado por

$$\varphi_{V_1} = \varphi_{I_f} + \cos^{-1}(FP_{I_f}). \quad (6.32)$$

Con este valor para φ_{V_1} , debemos calcular el valor de $G \in \mathbb{R}$ para el cual se cumpla que este valor, corresponda efectivamente al ángulo de V_1 .

Utilizando el Tercer Postulado para Z_1 , y la expresión (6.29), tenemos que

$$V_1 = \underbrace{Z_1 I_f}_{X+jY} \frac{Z_1 + Z_{eq}}{Z_{eq}} + \underbrace{\frac{Z_1 I_f}{Z_{eq}}}_{X'+jY'} G \quad (6.33)$$

donde X, X' e Y, Y' representan las correspondientes componentes reales e imaginarias de los términos que forman V_1 . Además, hemos utilizado la definición para G donde, en este caso, tenemos $G = G$, ya que buscamos un valor real para este parámetro. Así, el ángulo de V_1 estará dado por

$$\varphi_{V_1} = \tan^{-1} \left(\frac{Y + Y'G}{X + X'G} \right), \quad (6.34)$$

con lo que podremos calcular G , siguiendo el siguiente procedimiento, considerando que φ_{V_1} fue calculado en (6.32). De (6.34) tenemos que

$$\tan(\varphi_{V_1}) = \frac{Y + Y'G}{X + X'G},$$

siendo posible obtener la variable buscada como

$$G = \frac{Y - X \tan(\varphi_{v_1})}{X' \tan(\varphi_{v_1}) - Y'}.$$

Utilizando los datos del enunciado para las impedancias y la fuente de corriente, el valor de G que logra que el factor de potencia de la fuente de corriente sea 0,9 inductivo es

$$G = 5,4578 [\Omega].$$

Considerando que para la red bajo análisis, la potencia aparente entregada por la fuente controlada está dada por

$$P_{ap_{E_c}} = E_c I_{e_c}^*, \quad (6.35)$$

para que ésta sea cero, es necesario que:

- I_{e_c} sea cero y/o
- E_c sea cero.

Para ver si es posible conseguir la primera condición, busquemos la expresión para I_{e_c} . A partir de (6.28) y (6.26) obtenemos

$$I_{e_c} = \frac{Z_1 + G}{Z_1 + G + Z_{eq}} I_f.$$

De esta expresión deducimos que la condición para que se cumpla $I_{e_c} = 0$, es

$$G = -Z_1. \quad (6.36)$$

Para analizar la segunda condición, $E_c = 0$, consideremos la ecuación que define a la fuente controlada

$$E_c = G I_1. \quad (6.37)$$

De (6.37), podemos decir que para cumplir con $E_c = 0$, G ó I_1 debe ser cero. Para analizar la segunda opción, tomemos el resultado obtenido en (6.29) para I_1 , de donde deducimos que la condición $E_c = 0$ se cumple solo para

$$G = 0. \quad (6.38)$$

De las soluciones encontradas en (6.36) y (6.38), elegimos solo la solución mostrada en (6.36), ya que $\dot{G} = 0$ es una solución trivial que equivale a que no exista la fuente controlada.

De los resultados obtenidos, es posible generar los siguientes comentarios:

- Es importante notar que la condición buscada para lograr $P_{ap} = 0$, considera solo que el producto entre E_c e I_{e_c} sea cero, ya que, independiente del ángulo de desfase que exista entre estas señales, la potencia aparente entregada por la fuente controlada no puede ser cero si estas cantidades son distintas de cero. Lo anterior se puede notar de forma simple, si reescribimos P_{ap} de la forma

$$P_{ap_{E_c}} = E_c I_{e_c} \cos(\varphi_{e_c}) + j E_c I_{e_c} \text{seno}(\varphi_{e_c}), \quad (6.39)$$

donde φ_{e_c} es el ángulo de desfase entre E_c e I_{e_c} .

Sabemos que no hay valor de φ_{e_c} tal que $\cos(\varphi_{e_c})$ y $\text{seno}(\varphi_{e_c})$ sean simultáneamente cero, por lo que, a partir de (6.39), deducimos que P_{ap} será cero solo si E_c e I_{e_c} son cero.

- Otro punto importante a considerar es el efecto que tiene la naturaleza de G . Cuando esta ganancia es real, introduce solo un cambio en la magnitud de la variable de control de E_c . Sin embargo, cuando la ganancia es compleja, introduce además un desfase en la variable de control.
- Según el comentario anterior, deducimos que la potencia aparente entregada por la fuente controlada, para el caso en que $\dot{G}$ es solo una ganancia real, tiene solo componente real (potencia activa) siendo su potencia reactiva igual a cero, ya que el ángulo de desfase entre E_c y I_{e_c} es cero. Para el caso en que la ganancia es compleja, el ángulo de desfase entre estas dos variables corresponde al de $\dot{G}$, por lo que la potencia aparente de la fuente controlada tendrá componentes activa y reactiva dependiendo del ángulo de $\dot{G}$.

Errores

Error 1 Errores numéricos al realizar cálculos con números complejos.

Error 2 No utilizar, en el cálculo de la potencia aparente, el conjugado de la variable correspondiente a la corriente. Una muestra de este error, sería haber calculado P_{ap} en (6.35) de la forma

$$P_{ap_{E_c}} = E_c I_{e_c},$$

lo cual es erróneo.

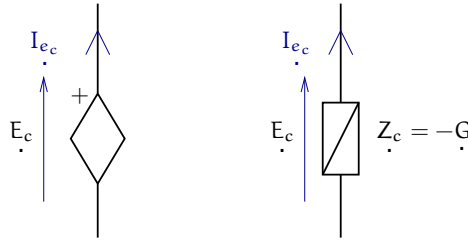
Error 2 Aplicar superposición de la fuente independiente y la fuente controlada.

Una variante de interés

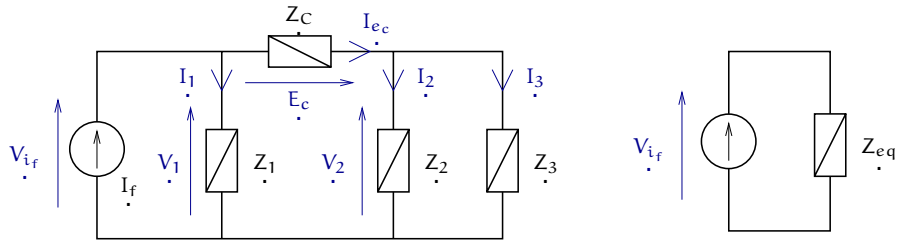
Como una variante al problema principal, cambiemos la variable de control de la fuente controlada de tensión. Supongamos ahora que $\dot{E}_c$ cumple con

$$\dot{E}_c = \dot{G} \dot{I}_{e_c}.$$

Al tener esta nueva relación para la fuente controlada, es posible obtener una red simplificada. Para esto, la fuente controlada puede ser modelada como una impedancia, como muestra la figura



Por lo tanto, tenemos que la red está compuesta solo por impedancias, por lo que podemos encontrar un equivalente para ésta. Así, utilizando las equivalencias estudiadas en el **Capítulo X-EQUIVALENCIAS**, podemos reducir la red como se muestra a continuación



donde la impedancia equivalente $\dot{Z}_{eq}$ está dada por

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z} \dot{Z}_1}{\dot{Z} + \dot{Z}_1}, \quad \dot{Z} = \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} - \dot{G}.$$

Del equivalente obtenido, notamos que el factor de potencia visto por la fuente de corriente $\dot{I}_f$, corresponde a

$$FP = \cos(\varphi_{eq}),$$

donde φ_{eq} corresponde al ángulo de la impedancia Z_{eq} , el que puede ser calculado como

$$\varphi_{eq} = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im} \{ Z_{eq} \}}{\text{Re} \{ Z_{eq} \}} \right\}. \quad (6.40)$$

Con estos resultados, y utilizando el Tercer Postulado para Z_{eq} , podemos escribir la potencia aparente entregada por la fuente de corriente como

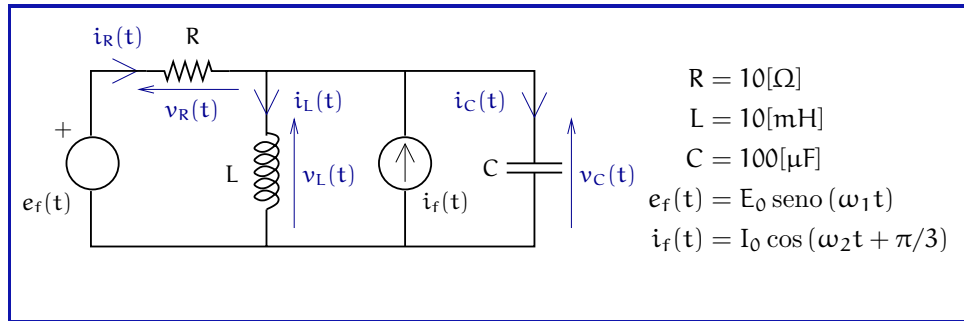
$$P_{ap} = V_{i_f} I_f^* = Z_{eq} I_f I_f^* = Z_{eq} |I_f|^2,$$

donde el valor para la potencia activa (y reactiva) dependerán del valor de φ_{eq} calculado en (6.40).

6.2.3. Red con fuentes de distinta frecuencia. Principio de superposición.

Problema 6.3.

Con el objetivo de analizar que ocurre cuando una red es excitada por fuentes sinusoidales de distinta frecuencia, consideremos la red de la siguiente figura. Para el estudio de este problema utilizaremos la transformada fasorial, ya que es de interés conocer el comportamiento de la red solamente en estado estacionario. Es por esto, que dados los datos adjuntos a la figura, las condiciones iniciales del inductor y condensador no se mencionan, ya que estos no son relevantes en el análisis de la red en estado estacionario, tal como se estudió en el problema 6.1 de la página 127.



Utilizando $E_0 = 10 [\text{V}]$, $I_0 = 5 [\text{A}]$, $\omega_1 = 200 [\text{rad s}^{-1}]$ y $\omega_2 = 400 [\text{rad s}^{-1}]$:

6.3.1 Calcule $i_R(t)$ y $v_C(t)$, en estado estacionario.

6.3.2 Si la frecuencia de la fuente de corriente cumple con

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

¿Qué ocurre con las variables calculadas anteriormente?.

Solución

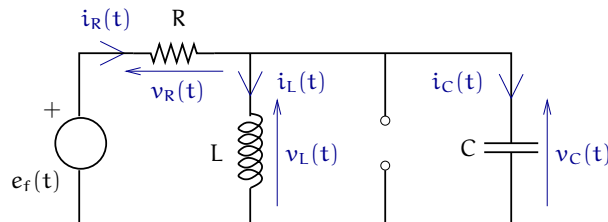
Para resolver los problemas planteados es necesario considerar, como característica principal de esta red, la existencia de dos fuentes de excitación de distinta frecuencia. Es por esto, que debemos separar al análisis de la red en dos partes.

La primera parte a desarrollar, considera solo la fuente de tensión como excitación de la red, mientras la fuente de corriente permanece *apagada*. De esta forma, calcularemos el valor que toman las variables de interés correspondientes a la frecuencia ω_1 . Por el contrario, la segunda parte considera el cálculo de las variables de interés utilizando solo la fuente de corriente como excitación de la red, mientras la fuente de tensión permanece *apagada*. Finalmente, el valor que tomen las variables en estado estacionario, corresponderá a la suma de los valores calculados en forma independiente, asociados a cada frecuencia de excitación.

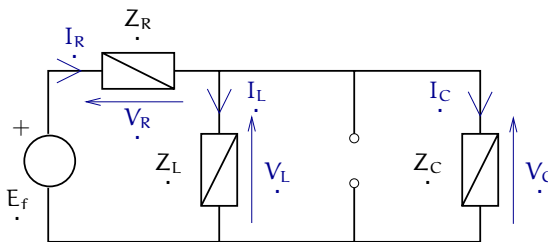
Para apagar una fuente de corriente independiente, se debe reemplazar ésta por un circuito abierto

Al realizar el procedimiento anterior, estaremos aplicando el principio de **superposición**, lo cual es posible, ya que la red en estudio es lineal.

Para llevar a cabo la primera parte descrita anteriormente, consideremos la red de la siguiente figura.



En ella, podemos identificar que hemos *apagado* la fuente de corriente ($i_f(t) = 0$), por lo que la fuente de tensión es la única fuente de excitación de la red. Calculemos entonces, las variables $i_R(t)$ y $v_C(t)$, utilizando el equivalente fasorial que se muestra a continuación.



De la figura, podemos deducir que las impedancias asociadas a los componentes de la red son

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = j\omega_1 L, \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega_1 C}. \quad (6.41)$$

Además, aplicando la LVK en las dos mallas de la red, obtenemos

$$\underline{E}_F = \underline{V}_R + \underline{V}_L \quad \text{y} \quad \underline{V}_L = \underline{V}_C, \quad (6.42)$$

donde esta última ecuación, se asocia a la conexión en paralelo entre $\underline{Z}_L$ y $\underline{Z}_C$.

También, aplicando la LCK en el nodo que contiene a los tres componentes, se tiene que

$$\underline{I}_R = \underline{I}_L + \underline{I}_C. \quad (6.43)$$

Al observar la red bajo estudio, podemos notar que es posible calcular la corriente por el condensador (ó por el inductor) utilizando el **divisor de corriente**, si sabemos $\underline{I}_R$. Por esto, calculemos $\underline{I}_R$ de la siguiente forma. Con (6.42) y sabiendo las ecuaciones de Tercer Postulado para $\underline{Z}_L$ y $\underline{Z}_C$, (6.43) puede escribirse como

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{V}_L}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{V}_L}{\underline{Z}_{eq1}}, \quad (6.44)$$

donde

$$\underline{Z}_{eq1} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

Utilizando $\underline{V}_L$, a partir de la LVK en (6.42) correspondiente a la malla que contiene a $\underline{Z}_R$ y $\underline{Z}_L$, de (6.44) se obtiene el fasor asociado a la corriente por el resistor, correspondiente a la frecuencia de excitación ω_1 ¹

$$\boxed{\underline{I}_{R \omega_1} = \frac{\underline{E}_F}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{eq1}}}, \quad (6.45)$$

donde se ha utilizado la siguiente transformada fasorial para la fuente de tensión

$$\underline{E}_f = \mathcal{P}\{e_f(t)\} = \mathcal{P}\{E_0 \text{ seno}(\omega_1 t)\} = \mathcal{P}\left\{E_0 \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/2}.$$

Con el resultado anterior, podemos calcular el fasor asociado a la corriente por el condensador, utilizando directamente el divisor de corriente. De esta forma

¹Se ha utilizado el subíndice ω_1 para distinguir entre los fasores calculados para las distintas frecuencias de excitación.

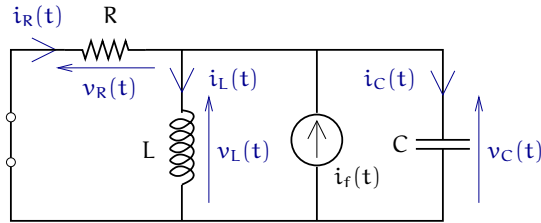
se obtiene

$$\dot{I}_{C_{\omega_1}} = \dot{I}_{R_{\omega_1}} \frac{\dot{Z}_L}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_C},$$

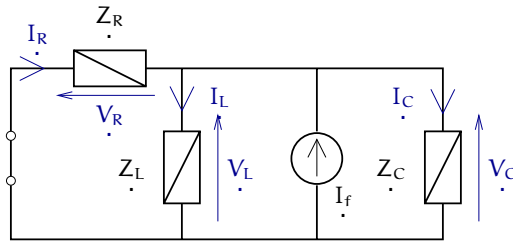
con lo cual, usando el Tercer Postulado para este elemento, se obtiene el fasor correspondiente a la tensión en el condensador para la frecuencia de excitación ω_1

$$\dot{V}_{C_{\omega_1}} = \dot{Z}_C \dot{I}_{C_{\omega_1}} = \dot{E}_f \frac{\dot{Z}_{eq1}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_{eq1}}. \quad (6.46)$$

Para continuar con la segunda parte del procedimiento para calcular las variables de interés, consideremos ahora, solo la fuente de corriente como excitación de la red. La siguiente figura muestra la red resultante, donde se observa que hemos *apagado* la fuente de tensión ($e_f(t) = 0$).



Al igual que en la primera parte, desarrollada anteriormente, utilizemos la transformada fasorial para calcular las variables $i_R(t)$ y $v_C(t)$. Para esto, consideremos el siguiente equivalente fasorial.



donde las impedancias de los elementos están ahora en función de ω_2 , lo cual implica que

$$\dot{Z}_R = R, \quad \dot{Z}_L = j\omega_2 L, \quad \dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega_2 C}. \quad (6.47)$$

Al observar la red equivalente para $e_f(t) = 0$, notamos que todos los componentes de la red quedan conectados en paralelo, por lo que la tensión de éstos se relaciona según

$$\dot{V}_C = \dot{V}_L = -\dot{V}_R, \quad (6.48)$$

al aplicar la LVK.

A su vez, la LCK nos dice que la relación entre las corrientes está dada por

$$\dot{I}_R + \dot{I}_f = \dot{I}_L + \dot{I}_C,$$

la cual, utilizando (6.48) y el Tercer Postulado para cada elemento, se puede escribir como

$$-\frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}_R} + \dot{I}_f = \frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}_L} + \frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}_C}, \quad (6.49)$$

De (6.49), deducimos la expresión del fasor asociado a la tensión en el condensador, correspondiente a la frecuencia de excitación ω_2

$$\boxed{\dot{V}_C_{\omega_2} = \dot{I}_f Z_{eq2}}, \quad (6.50)$$

con

$$Z_{eq2} = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_L \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R \dot{Z}_L + \dot{Z}_R \dot{Z}_C + \dot{Z}_C \dot{Z}_L},$$

y donde hemos utilizado la siguiente transformada fasorial para la fuente de corriente

$$\dot{I}_f = \mathcal{P}\{i_f(t)\} = \mathcal{P}\{I_0 \cos(\omega_1 t + \pi/3)\} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{j\pi/3}.$$

Con este resultado, podemos calcular el fasor correspondiente a la corriente por el resistor, utilizando el Tercer Postulado para este elemento y la relación dada en (6.48), obteniendo así

$$\boxed{\dot{I}_R_{\omega_2} = -\frac{\dot{V}_C_{\omega_2}}{\dot{Z}_R} = -\dot{I}_f \frac{Z_{eq2}}{\dot{Z}_R}}. \quad (6.51)$$

Si utilizamos los valores numéricos de los elementos de la red, las expresiones (6.45), (6.46), (6.50) y (6.51) quedan como

$$\begin{aligned} \dot{I}_R_{\omega_1} &= -0,14 - j0,68 = 0,69e^{-j1,78}, \\ \dot{V}_C_{\omega_1} &= 1,41 - j0,29 = 1,44e^{-j0,21}, \\ \dot{I}_R_{\omega_2} &= 0,86 - j1,25 = 1,52e^{-j0,97}, \\ \dot{V}_C_{\omega_2} &= -8,62 + j12,52 = 15,2e^{j2,17}, \end{aligned}$$

para las cuales, podemos calcular sus correspondientes señales temporales, a

través de la transformada fasorial inversa

$$\begin{aligned} i_{R_{\omega_1}}(t) &= \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{I}_{R_{\omega_1}} \right\} = 0,98 \cos(\omega_1 t - 1,78), \\ v_{C_{\omega_1}}(t) &= \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{V}_{C_{\omega_1}} \right\} = 2,04 \cos(\omega_1 t - 0,21), \\ i_{R_{\omega_2}}(t) &= \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{I}_{R_{\omega_2}} \right\} = 2,15 \cos(\omega_2 t - 0,97), \\ v_{C_{\omega_2}}(t) &= \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{V}_{C_{\omega_2}} \right\} = 21,5 \cos(\omega_2 t + 2,17). \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos el valor de las variables $i_R(t)$ y $v_C(t)$, como la suma de sus componentes correspondientes a cada frecuencia, esto es

$$i_R(t) = i_{R_{\omega_1}}(t) + i_{R_{\omega_2}}(t) = 0,98 \cos(\omega_1 t - 1,78) + 2,15 \cos(\omega_2 t - 0,97), \quad (6.54)$$

$$v_C(t) = v_{C_{\omega_1}}(t) + v_{C_{\omega_2}}(t) = 2,04 \cos(\omega_1 t - 0,21) + 21,5 \cos(\omega_2 t + 2,17). \quad (6.55)$$

De las expresiones (6.54) y (6.55), se puede comentar lo siguiente:

- Tal como se mencionó al comenzar a desarrollar la solución a este problema, y dado que la red en estudio es lineal, la solución obtenida es una combinación lineal de los efectos que tiene cada una de las excitaciones del sistema, en las variables de interés. Por lo tanto, podemos ver que la respuesta del sistema, correspondiente a la frecuencia ω_2 , posee un mayor peso en la señal resultante para $i_R(t)$ y $v_C(t)$.
- La superposición debe hacerse en el dominio del tiempo, y no en el de las Transformadas Fasoriales, porque las impedancias son funciones de la frecuencia.

Si ahora consideramos que la frecuencia de la fuente de corriente cumple con

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (6.56)$$

al utilizar el equivalente fasorial mostrado anteriormente para $e_f(t) = 0$, podemos escribir (6.49) utilizando las relaciones de Tercer Postulado para las impedancias del inductor y el condensador, vistas en (6.47), usando ahora la

frecuencia ω_2 dada por (6.56). De lo anterior resulta

$$\begin{aligned}
 -\frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}_R} + \dot{I}_f &= \frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}_L} + \frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}_C} \\
 &= \dot{V}_C \left(\frac{1}{\dot{Z}_L} + \frac{1}{\dot{Z}_C} \right) \\
 &= \dot{V}_C \left(-j\frac{\sqrt{LC}}{L} + j\frac{C}{\sqrt{LC}} \right) \\
 &= \dot{V}_C \left(-j\sqrt{\frac{C}{L}} + j\sqrt{\frac{C}{L}} \right)
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

De (6.57), podemos deducir que el fasor asociado a la tensión en el condensador (para ω_2) está dado por

$$\boxed{\dot{V}_{C_{\omega_2}} = \dot{I}_f \dot{Z}_R = 17,68 + j30,62 = 35,35e^{j1,05}}, \tag{6.58}$$

del cual, calculamos su correspondiente señal temporal utilizando la transformada fasorial inversa

$$v_{C_{\omega_2}}(t) = \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{V}_{C_{\omega_2}} \right\} = 49,99 \cos(\omega_2 t + 1,05). \tag{6.59}$$

Además, de (6.58) deducimos que el fasor correspondiente a la corriente por el resistor es

$$\boxed{-\dot{V}_{R_{\omega_2}} = \dot{I}_f \dot{Z}_R \Rightarrow \dot{I}_{R_{\omega_2}} = -\dot{I}_f = -1,77 - j3,06 = 3,54e^{-j2,09}}, \tag{6.60}$$

y su señal temporal asociada

$$i_{R_{\omega_2}}(t) = \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{I}_{R_{\omega_2}} \right\} = 5,01 \cos(\omega_2 t - 2,09). \tag{6.61}$$

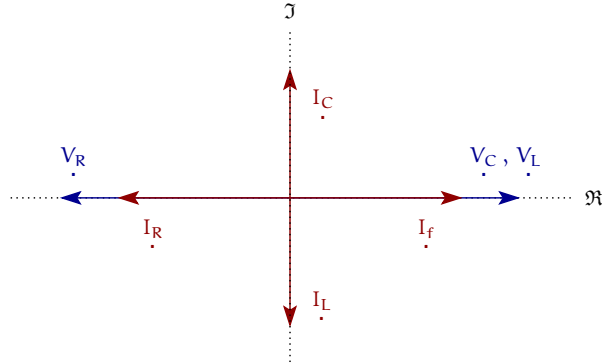
Con los resultados anteriores calculamos las señales temporales $i_R(t)$ y $v_C(t)$, utilizando los valores numéricos de los elementos de la red

$$i_R(t) = i_{R_{\omega_1}}(t) + i_{R_{\omega_2}}(t) = 0,98 \cos(\omega_1 t - 1,78) + 5,01 \cos(\omega_2 t - 2,09),$$

$$v_C(t) = v_{C_{\omega_1}}(t) + v_{C_{\omega_2}}(t) = 2,04 \cos(\omega_1 t - 0,21) + 49,99 \cos(\omega_2 t + 1,05).$$

A partir de estas expresiones, se puede comentar lo siguiente:

- Ya que Z_L y Z_C son iguales (para $\omega_2 = 1/\sqrt{LC}$) las corrientes por estos elementos son iguales en magnitud, pero su diferencia de fase es de 180° (dado que $\dot{V}_L = \dot{V}_C$) por lo tanto su suma es igual a cero, derivando así el resultado presentado en (6.60). Lo anterior, se puede representar en plano complejo, a través de un diagrama fasorial como el siguiente



- El fenómeno mostrado al considerar $\omega_2 = 1/\sqrt{LC}$, se conoce como **re-sonancia**, y se produce cuando un sistema es excitado por una señal que tiene la misma frecuencia que uno de sus modos naturales.
- Al comparar las expresiones (6.59) y (6.61), con (6.55) y (6.54) respectivamente, notamos que la parte asociada a la frecuencia $\omega_2 = 1/\sqrt{LC}$, de las señales de tensión y corriente, poseen una magnitud mayor respecto a las calculadas para $\omega_2 = 400$. Esto se puede observar en el diagrama fasorial presentado antes, donde para cualquier otra frecuencia, Z_L y Z_C no serán iguales, lo que implica que las magnitudes de todas las señales de la red disminuirán (excepto I_f , por ser constante).

De lo anterior, se deduce que para la **frecuencia de resonancia**, la tensión en los elementos de esta red es máxima, la que depende solamente del valor de R .

Errores

Error 1 Errores numéricos al realizar cálculos con números complejos.

Error 2 Utilizar, en una red con n fuentes de distinta frecuencia, que la impedancia para el inductor y condensador están dadas por

$$Z_L = j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)L \quad \text{y} \quad Z_C = \frac{1}{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)C}$$

Las frecuencias no se superponen, lo que se superpone son las señales en el dominio del tiempo.

Error 3 Considerar que la suma de n sinusoidales de distinta frecuencia, es igual a una sinusoidal de frecuencia igual a la suma de las cada frecuencia, es decir

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1 \text{seno}(\omega_1 t) + f_2 \text{seno}(\omega_2 t) + \dots + f_n \text{seno}(\omega_n t) \\ &\neq (f_1 + f_2 + \dots + f_n) \text{seno}((\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) t) \end{aligned} \quad (6.62)$$

Error 4 Olvidar multiplicar por $\sqrt{2}$ al obtener la señal temporal, utilizando la transformada fasorial inversa, $\mathcal{P}^{-1}\{\circ\}$.

Una variante de interés

Una variante de interés para este problema, es considerar que la fuente de tensión $e_f(t)$ tiene un valor constante. De esta forma, tendríamos que considerar la superposición de una fuente de tensión de frecuencia cero, y la fuente de corriente de frecuencia ω_2 . Supongamos entonces, que la fuente de tensión es tal que

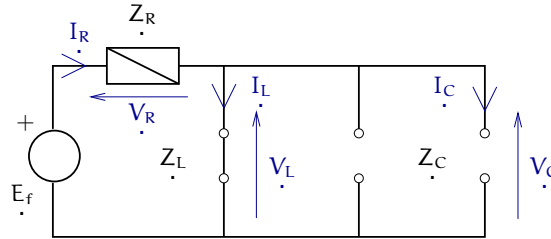
$$e_f(t) = E_0.$$

Al cambiar el tipo de fuente de tensión, no estamos alterando los resultados obtenidos anteriormente, cuando calculamos las variables de interés *apagando* la fuente de tensión. Por lo tanto, los resultados en (6.50) y (6.51) se mantienen sin variación.

Para el caso expuesto en esta variante, tenemos que a frecuencia cero (correspondiente a la fuente de tensión constante) las impedancias del inductor y el condensador tienen valores que se pueden expresar como

$$Z_L = 0 \quad \text{y} \quad Z_C = \infty.$$

Así, podemos modelar la red como muestra la siguiente figura.



De esta figura, podemos deducir que, dados los modelos para las impedancias de L y C, las variables de interés estarán descritas por

$$I_R = \frac{E_f}{Z_R} \quad \text{y} \quad V_C = 0. \quad (6.63)$$

Con los resultados en (6.63), podemos encontrar las expresiones temporales para las variables de interés, aplicando la transformada fasorial inversa. Obtenemos entonces²

$$\bar{i}_R(t) = \frac{E_0}{R} \quad \text{y} \quad \bar{v}_C(t) = 0. \quad (6.64)$$

²Hemos utilizado la notación $\bar{i}_R(t)$ y $\bar{v}_C(t)$ para referirnos al cálculo de las variables $i_R(t)$ y $v_C(t)$, *apagando* la fuente de corriente.

Finalmente, las expresiones temporales para las variables de interés son

$$\begin{aligned}i_R(t) &= \bar{i}_R(t) + i_R(t)_{\omega_2} = 1 + 2,15 \cos(\omega_2 t - 0,97) \text{ [A]}, \\v_C(t) &= \bar{v}_C(t) + v_C(t)_{\omega_2} = 21,5 \cos(\omega_2 t + 2,17) \text{ [V]}.\end{aligned}$$

donde hemos utilizado los resultados asociados (6.50) y (6.51).

Adicionalmente, tenemos a partir de (??) y (6.60) que los valores para $v_C(t)$ e $i_R(t)$, son

$$\begin{aligned}i_R(t) &= 1 + 5,01 \cos(\omega_2 t - 2,09) \text{ [A]}, \\v_C(t) &= 49,99 \cos(\omega_2 t + 1,05) \text{ [V]},\end{aligned}$$

cuando la frecuencia de la fuente de corriente cumple con

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

6.3. Potencia en redes con excitaciones sinusoidales.

6.3.1. Red RC con un condensador. Análisis de potencia y fenómenos transitorios.

Problema 6.4.

La red bajo análisis en este ejercicio, corresponde a la presentada en el problema 6.1, página 127. Por lo cual, para el desarrollo de este problema, utilizaremos los valores de las variables obtenidas en el problema 6.1.

Considerando lo anterior, resuelva las siguientes preguntas:

- 6.4.1** Calcule la potencia instantánea entregada por la fuente de tensión, $p_{e_r}(t)$, $\forall t \geq 0$.
- 6.4.2** Utilizando los valores obtenidos para $v_C(t)$ e $i(t)$, en estado estacionario, calcule la potencia aparente que consume la red. ¿Cuál el factor de potencia de la red conectada a la fuente de tensión?.
- 6.4.3** Con la expresión obtenida para $i(t)$ en estado estacionario, calcule la potencia media entregada por la fuente. ¿Que relación tiene esta con la potencia calculada en las preguntas anteriores?.

Solución

Tal como se estudió en el problema 6.1, las señales de la red están compuestas por una parte que corresponde al estado transitorio, y otra que contiene la respuesta estacionaria. Por lo tanto, en la expresión para la potencia instantánea

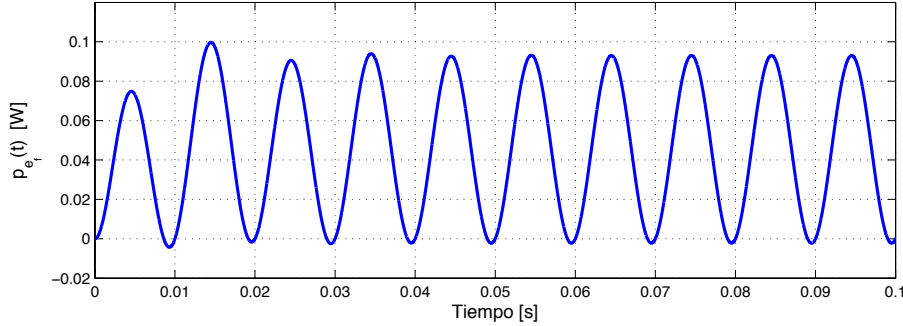


Figura 6.2: Potencia instantánea $p_{e_f}(t)$, entregada por la fuente de tensión $\forall t \geq 0$.

entregada por la fuente de tensión, $p_{e_f}(t)$ ($\forall t \geq 0$) debe aparecer este fenómeno. Para comprobar esto, calculemos $p_{e_f}(t)$, sabiendo que

$$p_{e_f}(t) = e_f(t)i(t),$$

y utilizando $i(t)$, obtenido en (6.5). Así, tenemos que

$$p_{e_f}(t) = \frac{E_0 C K_1 \omega_0}{2} \text{seno}(2\omega_0 t - \theta) - E_0 C \left(K_2 + \frac{v_c(0)}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \text{seno}(\omega_0 t) + \frac{E_0 C K_1 \omega_0}{2} \text{seno}(\theta). \quad (6.65)$$

La representación gráfica de la expresión (6.65) se muestra en la figura 6.4, donde se observa que la potencia instantánea entregada por la fuente de tensión, está compuesta por un término exponencial decreciente (que tiende a cero) el cual representa el estado transitorio de la red. Además, tiene una componente sinusoidal del doble de la frecuencia de excitación de la red, y un término constante.

Sabemos que la **potencia aparente** absorbida por la red conectada a la fuente de tensión está definida por

$$P_{ap} = \dot{V} \dot{I}^* \quad (6.66)$$

donde $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = \dot{E}_f$, por la LVK. Además, podemos escribir $\dot{V}$ en función de términos definidos anteriormente. Así, utilizando (6.9), tenemos que

$$\dot{V} = \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \right) \dot{I} = \dot{Z} e^{j\varphi} \dot{I}. \quad (6.67)$$

Reemplazando (6.67) en (6.66), tenemos que la potencia buscada queda determinada por

$$P_{ap} = Z e^{j\varphi} \dot{I} \dot{I}^* = \frac{Z \hat{I}^2}{2} e^{j\varphi}. \quad (6.68)$$

La expresión para la potencia aparente de la red, obtenida en (6.68), se puede escribir de forma alternativa como

$$P_{ap} = \underbrace{\frac{Z \hat{I}^2}{2} \cos(\varphi)}_{\text{pot. activa}} + j \underbrace{\frac{Z \hat{I}^2}{2} \text{seno}(\varphi)}_{\text{pot. reactiva}}, \quad (6.69)$$

donde la parte real corresponde a la potencia activa y la parte imaginaria, a la potencia reactiva.

A partir de las expresiones (6.68) y (6.69), se pueden realizar los siguientes comentarios:

- Un indicador frecuentemente utilizado en el análisis de redes eléctricas es el **factor de potencia**, FP. En este caso, se tiene que

$$FP = \cos(\varphi),$$

donde φ corresponde al ángulo de la impedancia equivalente de la red conectada a la fuente de tensión. Este ángulo corresponde al desfase entre la tensión y la corriente en esa impedancia equivalente.

- Dado que el análisis de estas redes se basa en el estudio de señales sinusoidales, podemos escribir el valor efectivo (RMS) de las señales de tensión y corriente como

$$V_{RMS} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \quad I_{RMS} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}},$$

por lo tanto, (6.68) se puede escribir como

$$P_{ap} = Z e^{j\varphi} \dot{I} \dot{I}^* = Z I_{RMS}^2 e^{j\varphi}.$$

- La potencia activa será siempre positiva, para la red estudiada en este problema, ya que la función coseno es una función par y el ángulo φ se ubica en el primer o cuarto cuadrante.
- El signo de la potencia reactiva depende de la ubicación del ángulo φ . Si éste está en el primer cuadrante, la potencia reactiva será positiva. En caso contrario será negativa.
- La potencia aparente no es una transformada fasorial. Sin embargo, existe una señal temporal asociada, la que corresponde a la suma de una senoide y una constante.

La **potencia instantánea** entregada, en estado estacionario, por la fuente de tensión está dada por

$$p_{e_f}(t) = e_f(t)i(t),$$

para la cual, utilizando (6.11), obtenemos

$$p_{e_f}(t) = \frac{E_0^2}{Z} \text{seno}(\omega_0 t) \text{seno}(\omega_0 t + \varphi) = \frac{E_0^2}{2Z} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega_0 t + \varphi)). \quad (6.70)$$

Ahora, para saber la potencia media entregada por la fuente de tensión, $\overline{p_{e_f}(t)}$, debemos calcular el valor medio de la función obtenida en (6.70). Realizando este cálculo, tenemos que

$$\overline{p_{e_f}(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{E_0^2}{2Z} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega_0 t + \varphi)) dt = \frac{E_0^2}{2Z} \cos(\varphi), \quad (6.71)$$

donde $T = 2\pi/\omega_0$.

Comparando (6.69) y (6.71) podemos deducir la relación que existe entre la potencia aparente consumida por la red y la potencia media entregada por la fuente de tensión.

Podemos escribir la potencia aparente mostrada en (6.69), en términos de E_0 y Z . Con esto obtenemos

$$P_{ap} = \underbrace{\frac{E_0^2}{2Z} \cos(\varphi)}_{\text{pot. activa}} + j \underbrace{\frac{E_0^2}{2Z} \text{seno}(\varphi)}_{\text{pot. reactiva}},$$

donde comparando esta expresión con (6.71), notamos que la potencia activa consumida por la red corresponde a la potencia media entregada por la fuente de tensión.

Se puede demostrar de forma simple, la equivalencia entre (6.71) y el término constante de (6.65), utilizando la relación para los ángulos θ y φ mostrada en el problema 6.1, es decir

$$\frac{E_0 CK_1 \omega_0}{2} \text{seno}(\theta) = \frac{E_0^2}{2Z} \cos(\varphi).$$

Si bien esta relación se cumple, el valor medio de (6.65) no corresponde efectivamente al valor medio calculado en (6.71). Esto se explica por la presencia del término exponencial en (6.65). Sin embargo, cuando la red está en estado estacionario (y los modos naturales se han extinguido) efectivamente el término constante en (6.65) corresponde al valor medio de la señal.

Lo anterior muestra nuevamente los alcances que tiene el análisis fasorial, omitiendo el estado transitorio de las señales, al momento de estudiar un red eléctrica.

Errores

Error 1 Errores numéricos al realizar cálculos con números complejos.

Error 2 No utilizar, en el cálculo de la potencia aparente, el conjugado de la variable correspondiente a la corriente. Una muestra de este error, sería haber calculado P_{ap} en (6.66) de la forma

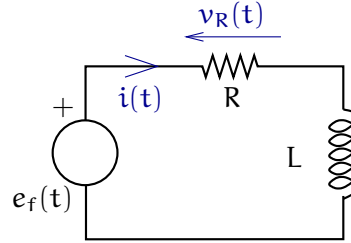
$$P_{ap} = \dot{V} \dot{I},$$

lo cual es erróneo.

Error 3 Olvidar multiplicar por $\sqrt{2}$ al obtener la señal temporal, utilizando la transformada fasorial inversa, $\mathcal{P}^{-1}\{o\}$.

Una variante de interés

Consideremos como variante a este problema, la siguiente red



donde hemos reemplazado el condensador, por un inductor de valor L , con condición inicial $i(0) = 0,3 \text{ [A]}$.

A partir de la red de la figura, aplicando la LVK y el Tercer Postulado para el resistor R , obtenemos la siguiente ecuación diferencial en la variable de corriente $i(t)$

$$\tau \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{e_f(t)}{R}, \quad \tau = \frac{L}{R}. \quad (6.72)$$

Podemos notar que esta ecuación diferencial tiene la misma forma que la obtenida para $v_C(t)$ en (6.3). Así, la solución a (6.72) es también similar a la obtenida para (6.3), y está dada por

$$i(t) = K_1 \text{seno}(\omega_0 t - \theta) + (K_2 \tau + i(0)) e^{-t/\tau}, \quad (6.73)$$

donde

$$K_1 = K_2 K_3, \quad K_2 = \frac{E_0}{R} \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2 \tau^2}, \quad K_3 = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{y} \quad \theta = \text{seno}^{-1}\left(\frac{\tau}{K_3}\right).$$

Con la definición de potencia instantánea entregada, para la fuente de tensión $e_f(t)$

$$p_{e_f}(t) = e_f(t)i(t),$$

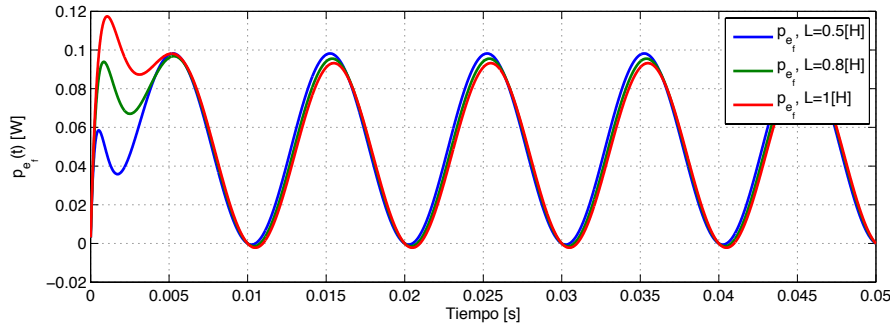


Figura 6.3: Potencia instantánea $p_{e_f}(t)$, para $L = 0,5, 0,8, 1$ [H], entregada por la fuente de tensión de la variante del problema 6.4 $\forall t \geq 0$.

junto a la expresión obtenida para $i(t)$, $p_{e_f}(t)$ está dada por

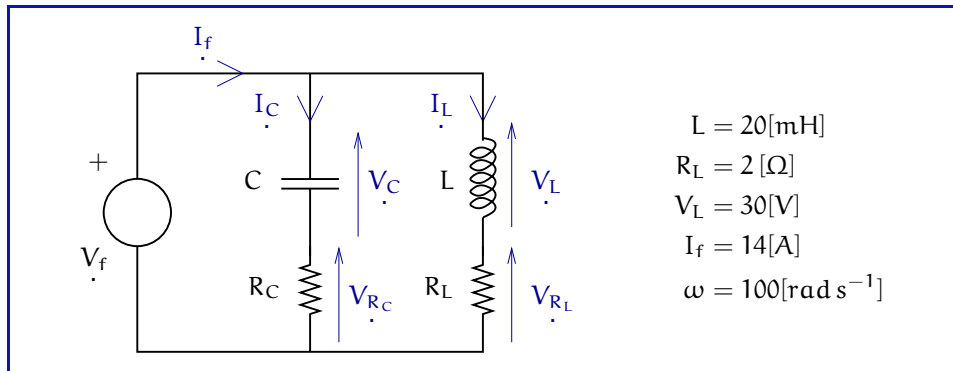
$$p_{e_f}(t) = -\frac{E_0 K_1}{2} \cos(2\omega_0 t - \theta) + E_0 (K_2 \tau + i(0)) e^{-t/\tau} \text{seno}(\omega_0 t) + \frac{E_0 K_1}{2} \cos(\theta) . \quad (6.74)$$

La figura 6.4 muestra una gráfica de $p_{e_f}(t)$ para tres valores de L . En ésta podemos notar la gran dependencia del valor de L que tiene el transitorio, dado que la constante de tiempo para la red está dada por $\tau = L/R$. Notamos además, que las diferencias en el desfase y valor medio entre las tres gráficas, están asociadas a L a través del ángulo θ .

6.3.2. Redes con factor de potencia capacitivo e inductivo.

Problema 6.5.

En este problema, estudiaremos como caracteriza una red eléctrica, el tener un determinado factor de potencia. Además, veremos la diferencia entre una red con factor de potencia capacitivo y una red con factor de potencia inductivo.



Utilizando los datos adjuntos a la figura responda:

6.5.1 Calcule R_C si el factor de potencia total (FP_T) es 0,8 inductivo, y $C = 1[\text{mF}]$.

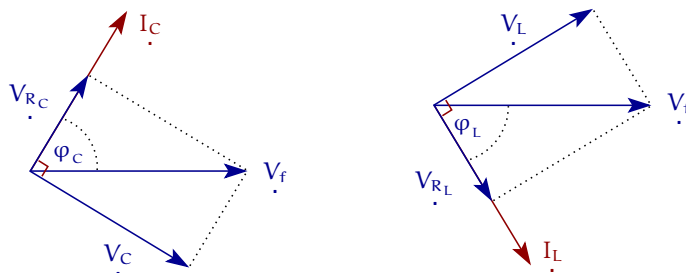
6.5.2 Calcule R_C si el factor de potencia total (FP_T) es 0,8 capacitivo, y $C = 10[\text{mF}]$.

6.5.3 ¿Qué cambios exhibe la potencia aparente entregada por la fuente de tensión, al considerar un factor de potencia capacitivo o inductivo?.

Solución

Antes de comenzar con el cálculo de variables del problema, es necesario entender el comportamiento de red. Para esto, consideremos que las subredes (C, R_C) y (L, R_L) están conectadas en paralelo con la fuente de tensión $v_f(t)$. Por lo tanto, podemos construir los diagramas fasoriales de estas subredes como se muestra en la siguiente figura, tomando como variable de referencia la tensión V_f .

Para construir un diagrama fasorial basta con elegir una referencia que sea simple identificar, a la cual se le puede asignar un ángulo igual a cero



En un inductor, la tensión en éste adelanta a su corriente en 90° , y en un condensador su corriente adelanta a la corriente en 90°

En ella, notamos que las tensiones V_{R_C} y V_C están desfasadas en 90° , lo cual también ocurre entre V_{R_L} y V_L . Lo anterior se explica por la conexión en serie entre los elementos $C - R_C$ y $L - R_L$, además del desfase que presentan, entre tensión y corriente, el elemento capacitivo e inductivo.

Una vez comprendido el comportamiento de cada parte de la red, es simple deducir la relación que deben cumplir las variables de ésta, para poder lograr el FP deseado.

Para poder calcular R_1 si el factor de potencia total (FP_T) es 0,8 inductivo, tenemos que considerar que la tensión V_f y la corriente I_f deben tener un desfase de φ_T° , el que podemos calcular como

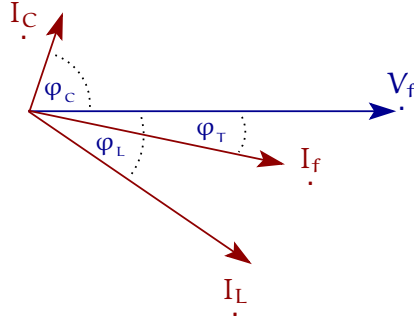
$$\varphi_T = -\cos^{-1}(0,8) \approx -37^\circ, \quad (6.75)$$

con lo cual construimos el fasor $I_f = I_f e^{j\varphi_T}$.

Como ya conocemos el fasor I_f en su totalidad, podemos saber la relación entre las corrientes que lo conforman. Esto es, por la LCK,

$$\dot{I}_f = \dot{I}_C + \dot{I}_L.$$

Esta relación se muestra en el siguiente diagrama fasorial,



donde notamos el desfase correspondiente a φ_T° entre $\dot{V}_f$ y $\dot{I}_f$. Además, como la relación angular entre $\dot{I}_C$ e $\dot{I}_L$ es (en general) distinta de 90° , podemos escribir $\dot{I}_f$ en función de las componentes reales e imaginarias de estos fasores³

$$\operatorname{Re} \left\{ \dot{I}_f \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{I}_C \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \dot{I}_L \right\}, \quad (6.76a)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \dot{I}_f \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \dot{I}_C \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \dot{I}_L \right\}. \quad (6.76b)$$

Con los datos entregados en el enunciado, calculamos la magnitud de la impedancia del inductor, X_L ,

$$X_L = \omega L = 2[\Omega],$$

con la cual podemos saber I_L , ya que V_L es conocido, utilizando el Tercer Postulado para el inductor

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = 15[A]. \quad (6.77)$$

Para saber el valor de φ_L , debemos calcular V_{R_L} , ya que para este ángulo se cumple que

$$\tan(\varphi_L) = -\frac{V_L}{V_{R_L}}, \quad (6.78)$$

lo cual se observa del diagrama fasorial mostrado anteriormente para la conexión $L - R_L$.

³Si el ángulo entre estos fasores es 90° , sus magnitudes se relacionan con I_f de la forma $I_f^2 = I_C^2 + I_L^2$.

Como R_L es conocido, utilizando el resultado en (6.77), la tensión en este resistor está dada por

$$V_{R_L} = I_L R_L = 30[V]. \quad (6.79)$$

Además, como V_L y V_{R_L} están en cuadratura, podemos calcular V_f como

$$V_f = \sqrt{V_L^2 + V_{R_L}^2} = 30\sqrt{2}[V], \quad (6.80)$$

lo que nos será útil en cálculos posteriores.

Con (6.78) y (6.79), el valor de φ_L es

$$\varphi_L = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ. \quad (6.81)$$

Con los resultados obtenidos en (6.77) y (6.81), es posible caracterizar completamente el fasor $I_L = I_L e^{j\varphi_L}$. Con esto, y dado que R_C no es conocido, podemos calcular I_C a través de las ecuaciones mostradas en (6.76), despejando el término correspondiente a esta variable

$$\operatorname{Re}\{I_C\} = \operatorname{Re}\{I_f\} - \operatorname{Re}\{I_L\} = I_f \cos(\varphi_f) - I_L \cos(\varphi_L) = 0,57[A], \quad (6.82a)$$

$$\operatorname{Im}\{I_C\} = \operatorname{Im}\{I_f\} - \operatorname{Im}\{I_L\} = I_f \operatorname{seno}(\varphi_f) - I_L \operatorname{seno}(\varphi_L) = 2,18[A], \quad (6.82b)$$

con lo que tenemos que I_C está dado por

$$I_C = \sqrt{\operatorname{Re}\{I_C\}^2 + \operatorname{Im}\{I_C\}^2} = 2,26[A]. \quad (6.83)$$

Además, el ángulo asociado a este fasor, puede ser calculado como

$$\varphi_C = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}\{I_C\}}{\operatorname{Re}\{I_C\}}\right) = 75,25^\circ. \quad (6.84)$$

Así, calculando previamente la magnitud de la impedancia del condensador,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10[\Omega],$$

usando el Tercer Postulado para este elemento, obtenemos la magnitud de su tensión

$$V_C = X_C I_C = 22,6[V].$$

Teniendo el valor de V_C , y utilizando el resultado en (6.80), es posible calcular la magnitud de la tensión en R_C , V_{R_C} , como

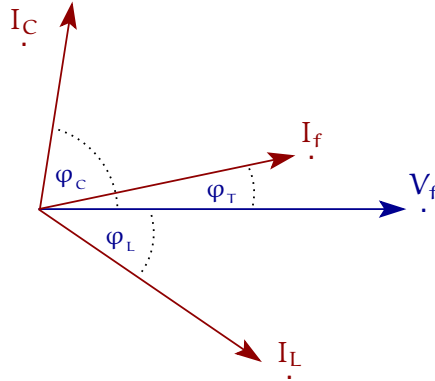
$$V_{R_C} = \sqrt{V_f^2 - V_C^2} = 35,91[V],$$

sabiendo que V_{R_C} y V_C están en cuadratura.

Finalmente, teniendo el valor de V_{R_C} y utilizando el Tercer Postulado para R_C , obtenemos el valor buscado para este resistor, tal que se cumpla que el factor de potencia total de la red conectada a la fuente de tensión $v_f(t)$ sea 0,8 inductivo

$$R_C = \frac{V_{R_C}}{I_C} \approx 16[\Omega].$$

Para determinar el valor de R_C tal que el factor de potencia total (FP_T) sea 0,8 capacitivo, debemos seguir un procedimiento similar al anterior, pero ahora consideraremos que la corriente I_f tiene un comportamiento como el que muestra la siguiente figura, respecto a las variables I_C , I_L y V_f ,



De la figura, deducimos que el ángulo del fasor I_f está dado por

$$\varphi_T = \cos^{-1}(0,8) \approx 37^\circ, \quad (6.85)$$

con lo que tenemos que $I_f = 14e^{37^\circ}[A]$.

Como el valor de R_C influye solo en el cálculo de I_C , el fasor I_L calculado anteriormente se mantiene invariante respecto al valor de este resistor, lo que nos permite seguir un procedimiento similar al anterior. Así, utilizando las ecuaciones (6.82) y (6.83) junto al nuevo valor de φ_T calculado en (6.85), tenemos que

$$\operatorname{Re}\{I_C\} = 0,57[A], \quad \operatorname{Im}\{I_C\} = 19,03[A],$$

con lo que obtenemos

$$I_C = \sqrt{\operatorname{Re}\left\{I_C\right\}^2 + \operatorname{Im}\left\{I_C\right\}^2} = 19,04[\text{A}].$$

A su vez, calculamos el ángulo asociado al fasor I_C , usando la expresión mostrada en (6.84), para los nuevos valores de la componente real e imaginaria de I_C

$$\varphi_c = 88,27^\circ.$$

Teniendo el fasor I_C y sabiendo que la magnitud de la impedancia del condensador, está dada por

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = 1[\Omega],$$

el valor de V_C es, utilizando el Tercer Postulado para el condensador,

$$V_C = Z_C I_C = 19,04[\text{V}].$$

Con este valor de V_C , y sabiendo el de V_f , calculamos el de V_{R_C} como

$$V_{R_C} = \sqrt{V_f^2 - V_C^2} = 37,91[\text{V}],$$

lo que, junto al Tercer Postulado de R_C , nos entrega su valor

$$R_C = \frac{V_{R_C}}{I_C} \approx 2[\Omega].$$

De lo anteriormente analizado, se puede destacar lo siguiente:

- Al observar las expresiones (6.75) y (6.85), notamos donde radica la diferencia entre un factor de potencia capacitivo e inductivo. En el primer caso, el ángulo calculado preserva las características de una red compuesta por elementos inductivos, en la cual la tensión adelanta a la corriente en un cierto ángulo. Caso contrario ocurre en (6.85), donde el ángulo calculado preserva las características de una red compuesta por elementos capacitivos, donde la corriente adelanta a la tensión en un cierto ángulo.
- Para el caso de FP_T capacitivo e inductivo, la parte real de I_C es la misma en ambos casos, ya que solo cambia la parte imaginaria de I_f y, por lo tanto, I_C debe compensar solo la variación en esta componente.
- Es importante notar que los diagramas fasoriales muestran una relación cualitativa entre las variables de tensión y corriente, ya que las unidades de medida de estas variables son distintas.

Del análisis anterior, se puede deducir que para un valor dado de FP_T , el que éste sea capacitivo o inductivo influye solamente en la componente imaginaria de la potencia aparente de la red, es decir en la potencia reactiva. Esto se puede observar al considerar la definición de potencia aparente para esta red

$$P_{ap} = V_f I_f^*, \quad (6.86)$$

la que es posible reescribir en términos de φ_T como

$$P_{ap} = V_f I_f \cos(\varphi_T) + j V_f I_f \text{seno}(\varphi_T).$$

De esta última ecuación, concluimos que el signo de φ_T (el cual depende si FP_T es negativo o positivo) influye solo en la potencia reactiva de la red, ya que en su cálculo está presente el término $\text{seno}(\varphi_T)$, el cual depende del signo de φ_T , por ser el seno una función impar. En la componente real de P_{ap} (potencia activa) no se exhiben cambios dependiendo del signo de φ_T , ya que

$$\cos(\varphi_T) = \cos(-\varphi_T).$$

Errores

Error 1 En el cálculo del factor de potencia, confundir el signo del ángulo asociado a éste, dependiendo si el factor de potencia es capacitivo o inductivo⁴.

Error 2 Calcular la magnitud de un fasor $Q = X + Y$ como

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

cuando X e Y no son perpendiculares.

Error 3 No utilizar, en el cálculo de la potencia aparente, el conjugado de la variable correspondiente a la corriente. Una muestra de este error, sería haber calculado P_{ap} en (6.86) de la forma

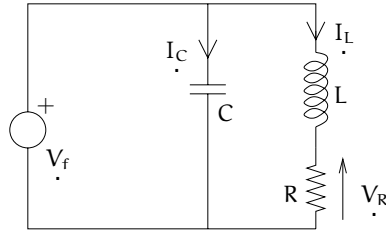
$$P_{ap} = V_f I_f,$$

lo cual es erróneo.

Una variante de interés

Como una variante al problema anterior, consideremos que ahora la red es como se muestra en la siguiente figura

⁴Para mayor detalle, ver comentarios a las expresiones (6.75) y (6.85) vistas en la página 162



donde los valores que sabemos son $V_f = 500$ [V], $V_R = 400$ [V], $I_C = 10$ [A]. Nos interesa saber el valor de I_L sabiendo que el factor de potencia total de la red conectada a la fuente de tensión es 0,6 capacitivo.

De la figura, observamos que $\dot{V}_R$ y $\dot{V}_L$ están en cuadratura, porque las impedancias R y $j\omega L$ tienen un ángulo relativo de 90 grados, ya que por ellas fluye la misma corriente. Usando la LVK, vemos entonces que

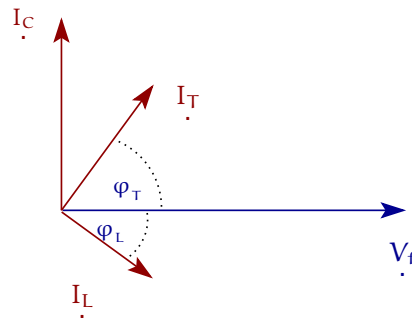
En una conexión en serie, la corriente es la misma para todos los componentes.

$$\dot{V}_f = \dot{V}_L + \dot{V}_R,$$

por lo que podemos calcular la magnitud de la tensión en el inductor como

$$V_f^2 = V_R^2 + V_L^2 \Rightarrow V_L = 300$$
 [V].

Esto indica que $R/\omega L = 4/3$. Por lo tanto, el ángulo de $Z_L = R + j\omega L$, φ_L , cumple con $\cos(\varphi_L) = 0,8$. Por otro lado, I_C está adelantado en 90 grados respecto a V_f . Si a lo anterior agregamos el dato que $\cos(\varphi_t) = 0,6$, podemos hacer un diagrama fasorial de las variables de la red, como el que se muestra a continuación



Del diagrama fasorial, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$I_T \text{ seno}(\varphi_T) + I_L \text{ seno}(\varphi_L) = I_C,$$

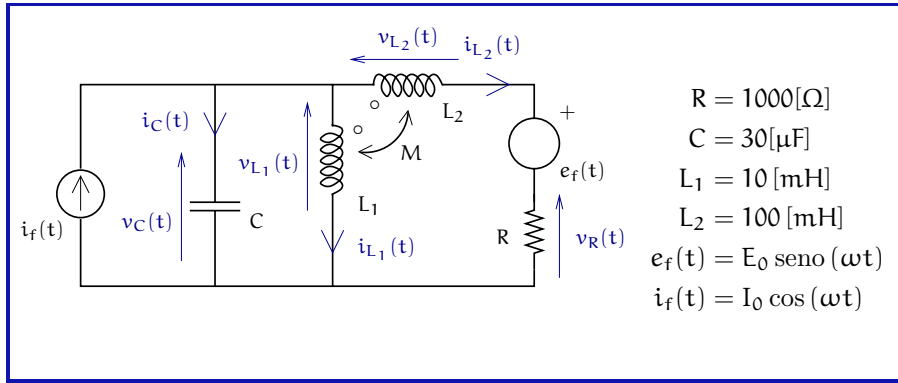
$$I_T \cos(\varphi_T) - I_L \cos(\varphi_L) = 0,$$

del cual obtenemos la solución para $I_L = 6$ [A].

6.3.3. Red con acoplamiento magnético.

Problema 6.6.

El problema a analizar consta de una red que posee dos inductores, los que presentan acoplamiento magnético entre si. Es por esto, que la utilización de una red equivalente para modelar esta situación, es útil al momento de estudiar la red.



Para $\omega = 100[\text{rad s}^{-1}]$, $E_0 = 10[V]$ y $I_0 = 2[A]$:

6.6.1 Calcule $i_{L_1}(t)$ si $M = L_1$.

6.6.2 Calcule $i_{L_1}(t)$ si $M = L_2$.

Solución

Como primer paso en la búsqueda de la solución a los problemas planteados, observemos el efecto que tiene el **acoplamiento magnético** presente en la red, en las variables de tensión y corriente de los elementos involucrados.

Según la red mostrada en el enunciado, la relación de acoplamiento entre los inductores L_1 y L_2 (graficada a través de los círculos junto a estos elementos) representa un **acoplamiento magnético aditivo** entre L_1 y L_2 . Con esto, deducimos que la tensión en estos elementos está dada por

$$v_{L_1}(t) = L_1 \frac{d}{dt} (i_{L_1}(t)) + M \frac{d}{dt} (i_{L_2}(t)), \quad (6.87a)$$

$$v_{L_2}(t) = L_2 \frac{d}{dt} (i_{L_2}(t)) + M \frac{d}{dt} (i_{L_1}(t)). \quad (6.87b)$$

El hecho que exista acoplamiento magnético aditivo entre L_1 y L_2 , se ve representado en (6.105), donde el término correspondiente a este fenómeno se suma a la parte estándar dada por el Tercer Postulado de estos elementos.

Teniendo las expresiones (6.105), podemos utilizar una red equivalente a la mostrada en el enunciado del problema. La característica principal de ésta,

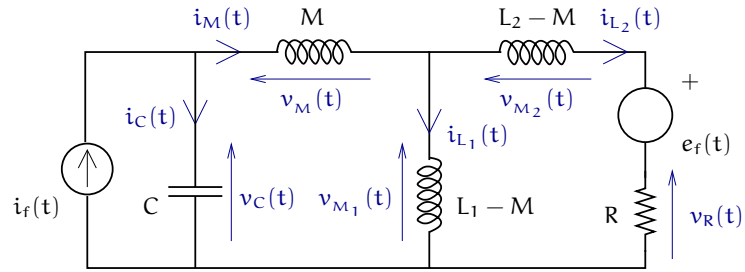


Figura 6.4: Equivalente para acoplamiento aditivo.

es que no posee acoplamiento magnético entre sus componentes, haciendo más simple la solución al problema. La figura 6.4 muestra esta red equivalente, para la cual se puede verificar que las expresiones en (6.105) aún son válidas.

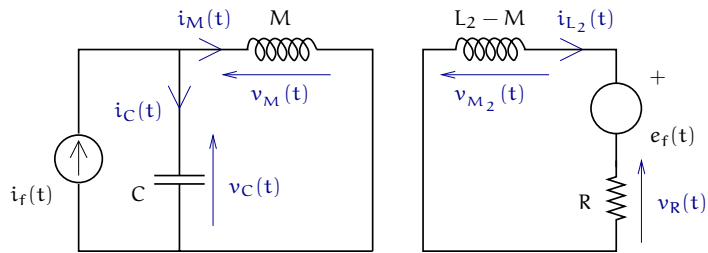
En base a red equivalente mostrada en la figura 6.4, analizaremos los problemas propuestos anteriormente:

$$\boxed{M = L_1}$$

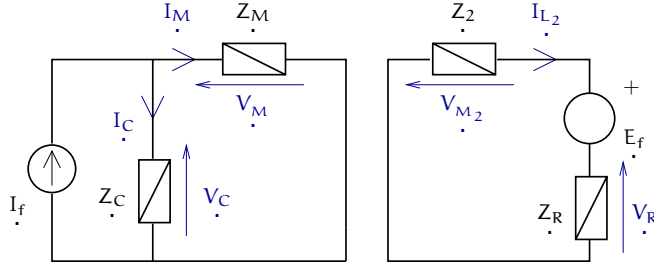
Para el caso en que $M = L_1$, podemos reducir la red equivalente de la figura 6.4, a una red aún mas simple. Dado que $L_1 - M = 0$, aplicando la LCK en el nodo que contiene los tres inductores, tenemos que

$$i_{L_1}(t) = i_M(t) - i_{L_2}(t), \quad (6.88)$$

donde podemos calcular $i_M(t)$ e $i_{L_2}(t)$ dividiendo la red en dos, como se muestra a continuación.



Para realizar el cálculo de las variables, consideremos el siguiente equivalente fasorial para esta red



donde

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad \underline{Z}_M = j\omega M, \quad \underline{Z}_2 = j\omega(L_2 - M), \quad \underline{Z}_R = R, \quad (6.89)$$

y $\underline{E}_f$ e $\underline{I}_f$ son, respectivamente, las transformadas fasoriales de la fuente de tensión $v_f(t)$ y la fuente de corriente $i_f(t)$, dadas por

$$\underline{E}_f = \mathcal{P}\{v_f(t)\} = \mathcal{P}\{E_0 \text{ seno}(\omega t)\} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/2}, \quad (6.90)$$

$$\underline{I}_f = \mathcal{P}\{i_f(t)\} = \mathcal{P}\{I_0 \cos(\omega t)\} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (6.91)$$

A partir de este diagrama, podemos ver que la corriente $\underline{I}_M$ es posible calcularla usando el **divisor de corriente** en la primera malla de la red. Así, $\underline{I}_M$ está dada por

$$\underline{I}_M = \underline{I}_f \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_M}. \quad (6.92)$$

A su vez, $\underline{I}_{L_2}$ se puede calcular a partir de la LVK aplicada en la segunda malla

$$\underline{V}_{M_2} = -\underline{E}_f - \underline{V}_R,$$

junto al Tercer Postulado para $\underline{Z}_2$ y $\underline{Z}_R$. Así, obtenemos

$$\underline{I}_{L_2} = -\frac{\underline{E}_f}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_R}. \quad (6.93)$$

Con los resultados obtenidos en (6.92) y (6.93), y utilizando el equivalente fasorial para la LCK (6.88)

$$\underline{I}_{L_1} = \underline{I}_M - \underline{I}_{L_2},$$

obtenemos la representación fasorial de $i_{L_1}(t)$ cuando $M = L_1$

$$\dot{I}_{L_1} = \dot{I}_f \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_M} + \frac{\dot{E}_f}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_R}. \quad (6.94)$$

Teniendo la expresión fasorial para $i_{L_1}(t)$ obtenida en (6.94), podemos tener su valor utilizando las definiciones hechas en (6.89), (6.90) y (6.91), junto a los datos entregados en el enunciado. Así, tenemos que (6.94) queda expresada numéricamente como

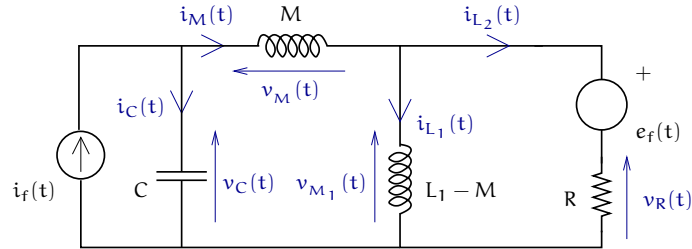
$$\dot{I}_{L_1} = 1,418 - j0,007 [A]. \quad (6.95)$$

Finalmente, obtenemos $i_{L_1}(t)$ aplicando la transformada fasorial inversa a (6.95)

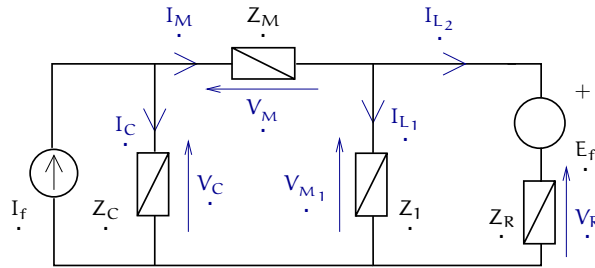
$$i_{L_1}(t) = \mathcal{P}^{-1} \left\{ \dot{I}_{L_1} \right\} = 2,01 \cos(\omega t - 0,005) [A].$$

$$M = L_2$$

Si $M = L_2$, tenemos que en la red de la figura 6.4, $L_2 - M = 0$. Así, podemos simplificar ésta red quedando como se muestra a continuación



Para realizar el cálculo de las variables, utilizemos el siguiente equivalente fasorial



donde⁵

$$Z_1 = j\omega(L_1 - M). \quad (6.96)$$

⁵El resto de las variables fasoriales, corresponden a las definidas en (6.89), (6.90) y (6.91).

A diferencia de la situación en que $M = L_1$, ahora no podemos separar la red en dos, para simplificar el calculo de las variables. Por lo tanto debemos utilizar las ecuaciones que resultan al aplicar la LVK, la LCK y el Tercer Postulado.

Aplicando la LVK tenemos que las ecuaciones resultantes son

$$\dot{E}_f = \dot{V}_{M_1} - \dot{V}_R, \quad (6.97a)$$

$$\dot{V}_C = \dot{V}_M + \dot{V}_{M_1}. \quad (6.97b)$$

A través de la LCK tenemos las siguientes relaciones para las corrientes

$$\dot{I}_f = \dot{I}_M - \dot{I}_C, \quad (6.98a)$$

$$\dot{I}_M = \dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2}. \quad (6.98b)$$

Además, el Tercer Postulado para cada impedancia esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{V}_R &= \dot{Z}_R \dot{I}_{L_2}, & \dot{V}_M &= \dot{Z}_M \dot{I}_M, \\ \dot{V}_{M_1} &= \dot{Z}_1 \dot{I}_{L_1}, & \dot{V}_C &= \dot{Z}_C \dot{I}_C. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Para encontrar el valor de la variable de interés, comencemos a partir de (6.97b) a buscar una ecuación que relacione $\dot{I}_{L_1}$ solo con valores conocidos. Así, de (6.97b) y (6.99) tenemos que

$$\dot{V}_{M_1} = \dot{V}_C - \dot{V}_M = \dot{Z}_C \dot{I}_C - \dot{Z}_M \dot{I}_M \quad (6.100)$$

utilizando (6.98a), (6.98b) y reagrupando los términos semejantes, obtenemos

$$\dot{V}_{M_1} = \dot{Z}_C \dot{I}_f - \left(\dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} \right) \left(\dot{Z}_C + \dot{Z}_M \right) \quad (6.101)$$

En (6.101) el único término desconocido es $\dot{I}_{L_2}$, por lo que es necesario expresarlo en función de $\dot{I}_{L_1}$. Para lograr esto, sabemos que $\dot{I}_{L_2}$ se relaciona con $\dot{V}_R$ a través del Tercer Postulado para $\dot{Z}_R$. Así, de (6.99) y (6.97a)

$$\dot{I}_{L_2} = \frac{\dot{V}_R}{\dot{Z}_R} = \frac{\dot{V}_{M_1} - \dot{E}_f}{\dot{Z}_R}. \quad (6.102)$$

Reemplazando (6.102) en (6.101), y utilizando el Tercer Postulado para $\dot{Z}_1$ dado en (6.99), tenemos que

$$\dot{Z}_1 \dot{I}_{L_1} = \dot{Z}_C \dot{I}_f + \frac{\dot{E}_f}{\dot{Z}_R} \left(\dot{Z}_C + \dot{Z}_M \right) - \frac{\dot{Z}_1 \dot{I}_{L_1}}{\dot{Z}_R} \left(\dot{Z}_C + \dot{Z}_M \right) - \dot{I}_{L_1} \left(\dot{Z}_C + \dot{Z}_M \right).$$

Así, despejando la variable de interés, obtenemos la representación fasorial para I_{L_1} cuando $M = L_2$

$$I_{L_1} = \frac{Z_C \left(Z_R I_f + E_f \right) + Z_M E_f}{Z_R Z_1 + \left(Z_C + Z_M \right) \left(Z_1 + Z_R \right)}. \quad (6.103)$$

Teniendo la expresión fasorial para $i_{L_1}(t)$ obtenida en (6.103), podemos tener su valor utilizando las definiciones hechas en (6.89), (6.90), (6.91) y (6.96), junto a los datos entregados en el enunciado. Así, tenemos que (6.103) queda expresada numéricamente como

$$I_{L_1} = 1,418 + j0,006 [A]. \quad (6.104)$$

Finalmente, obtenemos $i_{L_1}(t)$ aplicando la transformada fasorial inversa a (6.104)

$$i_{L_1}(t) = \mathcal{P}^{-1} \left\{ I_{L_1} \right\} = 2,01 \cos(\omega t + 0,004) [A].$$

Errores

Error 1 Errores numéricos al realizar cálculos con números complejos.

Error 2 Asignar un ángulo distinto a cero a la transformada fasorial de una señal descrita por una función coseno.

Error 3 Confundir el ángulo de la transformada fasorial de una señal descrita por una función seno, usando $\pi/2$, siendo $-\pi/2$ en valor correcto.

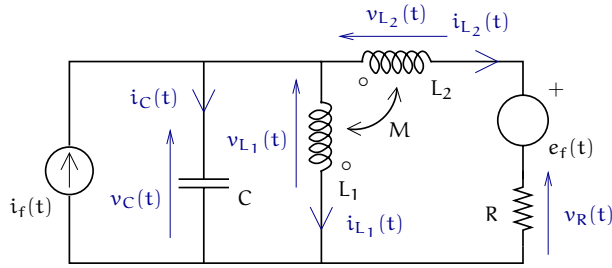
Error 4 Errores de signo en las tensiones, al realizar una LVK en una malla donde las tensiones y corrientes, pueden no estar definidas en referencia combinada. La LVK es independiente de como estén definidas las corrientes.

Error 5 Olvidar multiplicar por $\sqrt{2}$ al obtener la señal temporal, utilizando la transformada fasorial inversa, $\mathcal{P}^{-1}\{\circ\}$.

Error 6 Considerar un acoplamiento aditivo cuando se trata de un caso sustractivo y vice-versa.

Una variante de interés

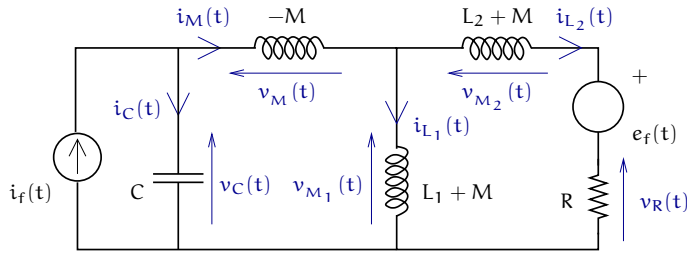
Una variante de interés para el problema principal es el fenómeno de **acoplamiento magnético sustractivo**. Para representar este tipo de acoplamiento, consideremos la siguiente variante de la red presentada en el enunciado del problema.



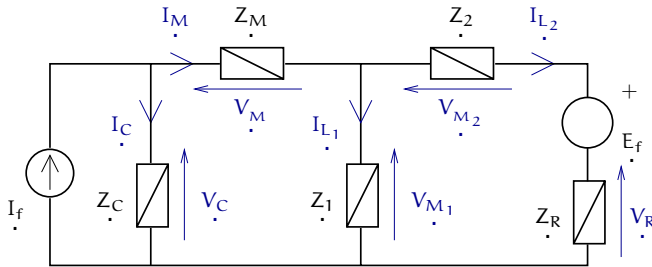
En esta red, la relación de acoplamiento entre los inductores L_1 y L_2 (graficada a través de los círculos junto a estos elementos) entrega esta vez, una expresión para la tensión en ellos dada por

$$\begin{aligned} v_{L_1}(t) &= L_1 \frac{d}{dt} (i_{L_1}(t)) - M \frac{d}{dt} (i_{L_2}(t)) , \\ v_{L_2}(t) &= L_2 \frac{d}{dt} (i_{L_2}(t)) - M \frac{d}{dt} (i_{L_1}(t)) . \end{aligned}$$

De lo anterior, la red equivalente mostrada en la figura 6.4 ya no es válida, y es necesario reemplazarla por la siguiente red equivalente



y su correspondiente equivalente en el dominio fasorial



donde notamos que en este caso, las impedancias Z_M , Z_1 y Z_2 quedan definidas como

$$Z_M = -j\omega M, \quad Z_1 = j\omega (L_1 + M), \quad Z_2 = j\omega (L_2 + M) . \quad (6.106)$$

Con las variables definidas anteriormente, podemos observar que respecto al problema principal, solo cambia la LVK (6.97a) por

$$\dot{E}_f = \dot{V}_{M_1} - \dot{V}_R - \dot{V}_{M_2}. \quad (6.107)$$

A partir de (6.107), y utilizando el Tercer Postulado para $\dot{Z}_R$ y $\dot{Z}_2$, $\dot{I}_{L_2}$ queda

$$\dot{I}_{L_2} = \frac{\dot{V}_{M_1} - \dot{E}_f}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_2}. \quad (6.108)$$

Reemplazando la nueva expresión para $\dot{I}_{L_2}$ en (6.101) y utilizando el Tercer Postulado para $\dot{Z}_1$ dado en (6.99), obtenemos

$$\dot{I}_{L_1} = \frac{\dot{Z}_C \dot{I}_f (\dot{Z}_R + \dot{Z}_2) + \dot{E} (\dot{Z}_C + \dot{Z}_M)}{\dot{Z}_1 (\dot{Z}_R + \dot{Z}_2) + (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_R) (\dot{Z}_C + \dot{Z}_M)}. \quad (6.109)$$

Así, dependiendo del valor que tome M , la expresión fasorial de $\dot{i}_{L_1}(t)$, (6.109), será

$$\dot{I}_{L_1} = 1,42 - j0,01 \text{ [A]} \quad \text{y} \quad \dot{I}_{L_1} = 1,42 - j0,02 \text{ [A]},$$

para $M = L_1$ y $M = L_2$, respectivamente. Por lo tanto, utilizando la transformada fasorial inversa, el valor de $\dot{i}_{L_1}(t)$ cuando $M = L_1$ es

$$i_{L_1}(t) = 2,0059 \cos(\omega t - 0,007) \text{ [A]},$$

y para $M = L_2$

$$i_{L_1}(t) = 2,0053 \cos(\omega t - 0,017) \text{ [A]}.$$

Al desarrollar esta variante, podemos notar que (6.109), es una expresión general para el cálculo de $\dot{I}_{L_1}$, ya que está en función de $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ y $\dot{Z}_M$. Es por esto, que la expresión (6.109) se reduce a (6.94) para $\dot{Z}_1 = 0$ cuando $M = L_1$, y a (6.103) para $\dot{Z}_2 = 0$, cuando $M = L_2$.

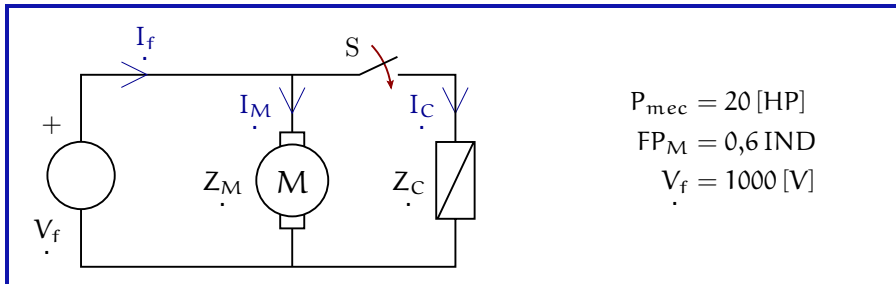
6.3.4. Corrección del factor de potencia.

Problema 6.7.

La red bajo análisis, considera la conexión de un motor, con un factor de potencia FP_M y una potencia mecánica P_{mec} , a una red eléctrica ideal modelada por $\dot{V}_f$. El objetivo de este análisis, es encontrar una solución al problema que

se presenta cuando el factor de potencia de una red, no es el adecuado. Este tipo de problema se observa cuando a una red eléctrica, se conectan cargas de bajo factor de potencia, lo cual requiere grandes cantidades de corriente para lograr una determinada potencia activa en la carga.

La solución presentada a continuación, busca llevar el factor de potencia de la red conectada a V_f , FP_T , lo más cercano a la unidad.



Considerando que la eficiencia del motor es $\eta = 0,8$ y la frecuencia de la red es $f = 50 \text{ [Hz]}$, responda:

6.7.1 Si la impedancia Z_C es de la forma

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C},$$

calcule el valor del condensador C que lleva el FP_T a 1, cuando S está conectado.

6.7.2 Si la impedancia Z_C es de la forma

$$Z_C = R_C + \frac{1}{j\omega C},$$

analice bajo que condiciones es posible llevar el FP_T a 1, cuando S se conecta.

La eficiencia de un motor eléctrico se mide por el porcentaje de la potencia de alimentación que está efectivamente disponible como potencia en el eje del motor

Solución

Para entender de mejor forma el impacto que tiene la conexión de Z_C , en el factor de potencia de la red completa, estudiemos primero el comportamiento de las variables eléctricas cuando S está abierto.

Con el dato de la potencia mecánica que desarrolla el motor, es posible calcular la potencia eléctrica (potencia activa) equivalente que tiene el motor. Para obtener esto, consideremos la equivalencia entre potencia mecánica y potencia eléctrica

$$1 \text{ [HP]} \approx 746 \text{ [W]}.$$

Con este dato, podemos calcular la potencia eléctrica (potencia activa) como

$$P_{\text{act}_M} = \frac{P_{\text{mec}}}{\eta} 746 = 18,65[\text{KW}]. \quad (6.110)$$

Teniendo la potencia activa del motor, utilizando su factor de potencia FP_M , calculamos la magnitud de la corriente a través de éste, de la forma

$$P_{\text{act}_M} = V_f I_M \cos(\varphi_M) \Rightarrow I_M = \frac{P_{\text{act}_M}}{V_f \cos(\varphi_M)} = 31,08[\text{A}].$$

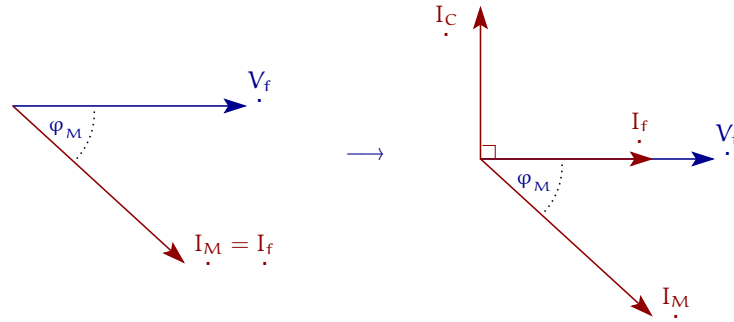
Con el dato correspondiente al factor de potencia del motor, FP_M , es posible conocer el ángulo entre la tensión V_f y la corriente I_M , φ_M ,

$$FP_M = \cos(\varphi_M) \Rightarrow \varphi_M = -\cos^{-1}(0,6) \approx -53^\circ,$$

por lo que podemos escribir I_M utilizando este valor, ya que V_f tiene ángulo cero según el enunciado. Así, obtenemos

$$I_M = I_M e^{j\varphi_M} = 31,08 e^{-j53^\circ}. \quad (6.111)$$

Con el valor obtenido en (6.111) para la corriente por el motor, es posible inferir el cambio que debe provocar la conexión de Z_C , en la corriente que entrega la fuente. Como la conexión de este elemento no debe interferir con el normal funcionamiento del motor, es decir, no debe afectar la potencia mecánica que este genera, tenemos que mantener la potencia activa del motor sin variación, llevando el factor de potencia de la red lo más cercano a la unidad. Para entender de mejor forma lo anterior, veamos la siguiente figura, en la cual se muestra el caso en que solo el motor esta conectado a la fuente (izquierda) y cuando se conecta Z_C a través de S (derecha)



Esto ocurre porque Z_C corresponde a la impedancia de un condensador, en donde la corriente adelanta a la tensión en 90° .

En la figura, podemos apreciar que la corriente I_C está en cuadratura con V_f , por lo que la conexión de Z_C influye solo en la componente imaginaria de la corriente I_f , dada por la LCK

$$I_f = I_M + I_C, \quad (6.112)$$

la que podemos escribir en función de sus componentes reales e imaginarias como

$$\dot{I}_f = I_M \cos(\varphi_M) + j I_M \text{seno}(\varphi_M) + j I_C.$$

Por lo anterior, deducimos que para llevar el factor de potencia total de la red, FP_T , a la unidad, debemos elegir un valor de C tal que la corriente por éste tenga la misma magnitud que la componente imaginaria de $\dot{I}_M$, es decir

$$I_C = -\text{Im} \left\{ \dot{I}_M \right\} = -I_M \text{seno}(\varphi_M) = 24,82[\text{A}], \quad (6.113)$$

con lo cual $\dot{I}_f$ tendrá solo parte real, y por lo tanto el ángulo entre la tensión $\dot{V}_f$ y la corriente $\dot{I}_f$ será cero. Así, se cumplirá que $FP_T = 1$.

Además, sabemos que

$$I_C = V_f \omega C = V_f 2\pi f C,$$

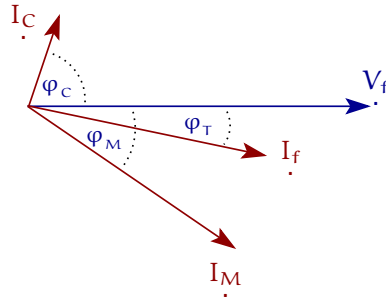
por lo que utilizando el resultado en (6.113) obtenemos el valor de C que lleva el valor de factor de potencia de la red conectada a la fuente de tensión, a la unidad

$$C = \frac{I_C}{2V_f \pi f} \approx 79[\mu\text{F}].$$

Para el caso en que Z_C es de la forma

$$Z_C = R_C + \frac{1}{j\omega C},$$

la corriente $\dot{I}_C$ tendrá parte real e imaginaria distinta de cero, a diferencia del caso anterior, dado el término resistivo que tiene. Para entender de mejor forma la situación que ahora se plantea, observemos la siguiente figura



En este diagrama fasorial, considerando la misma LCK vista en (6.112), notamos que bajo una elección no adecuada de R_C y C es posible que $\dot{I}_f$ no

llegue a estar en fase con $\dot{V}_f$. Si consideramos esta LCK, para que los fasores $\dot{I}_C$ e $\dot{I}_M$ tengan parte imaginaria con igual magnitud, se debe cumplir que

$$\operatorname{Im} \left\{ \dot{I}_C \right\} = \left| \dot{I}_M \operatorname{seno}(\varphi_M) \right| = 31,08 \operatorname{seno}(53^\circ) [\text{A}], \quad (6.114)$$

lo cual no es posible resolver para C y R_C simultáneamente, ya que se tiene solo una ecuación para dos incógnitas⁶, donde

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_f}{\sqrt{R_C^2 + X_C^2}} \quad \text{y} \quad \varphi_C = \tan^{-1} \left(\frac{X_C}{R_C} \right), \quad (6.115)$$

con $X_C = 1/(\omega C)$.

Por lo anterior, estudiaremos el problema dejando fija una de las variables:

R_C fijo

Si consideramos R_C fijo y X_C variable, de las relaciones mostradas en (6.115) tenemos que $\dot{I}_C$ solo puede tomar valores que cumplen con

$$\dot{I}_C \leq \frac{\dot{V}_f}{R_C},$$

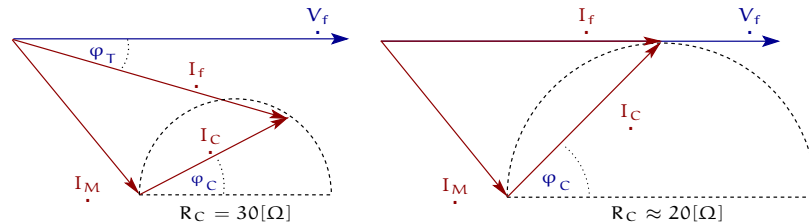
donde la igualdad se cumple para $X_C = 0$, lo cual no es una posible solución a nuestro problema, ya que significaría que $C \rightarrow \infty$ y por lo tanto, $\varphi_C = 0$, con lo que no sería posible que $\dot{I}_f$ y $\dot{V}_f$ estuvieran en fase.

De (6.115), podemos deducir el lugar geométrico que tendrá el fasor $\dot{I}_C$ en el plano complejo. Éste corresponde a una semicircunferencia dada por

$$\operatorname{Im} \left\{ \dot{I}_C \right\} = \frac{\dot{V}_f}{2R_C} \operatorname{seno}(2\varphi_C) \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} \left\{ \dot{I}_C \right\} = \frac{\dot{V}_f}{2R_C} (1 + \cos(2\varphi_C)), \quad (6.116)$$

para $0 \leq \varphi_C \leq \pi/2$.

A continuación vemos una figura que muestra los distintos lugares geométricos a los cuales pertenece el fasor $\dot{I}_C$, para distintos valores de R_C .



⁶un caso similar es estudiado en el problema 6.5, página 157.

En la figura, se observa que para $R_C = 30$ no hay solución a nuestro problema, ya que el valor máximo que puede tomar la parte imaginaria de I_C es $V_f/(2R_C)$, por lo tanto

$$\text{Im} \left\{ I_C \right\} < \left| \text{Im} \left\{ I_M \right\} \right|.$$

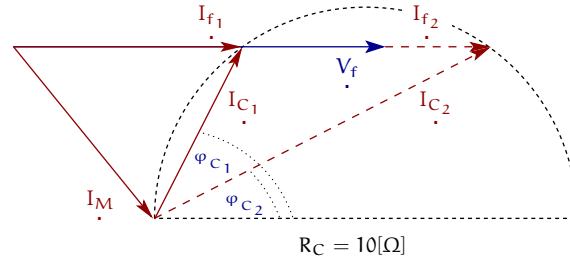
Caso contrario a lo anterior, ocurre para $R_C \approx 20$, lo cual es solución de (6.116) para $\varphi_c = 45^\circ$ y

$$\text{Im} \left\{ I_C \right\} = \left| \text{Im} \left\{ I_M \right\} \right|.$$

Con esto es posible obtener el valor de C , a partir de (6.115). Así,

$$C = \frac{1}{2\pi f R_C} \approx 158[\mu\text{F}].$$

De (6.116) notamos que al seguir disminuyendo el valor de R_C , el radio de la semicircunferencia donde se inscribe el fasor I_C aumenta, lo que lleva a la existencia de dos soluciones a nuestro problema. Lo anterior se muestra en el siguiente diagrama fasorial, donde las dos posibles soluciones se han presentado con los subíndices 1 y 2, para las variables φ_c , I_C y I_f .



De esta figura podemos notar que, para valores de R_C que cumplan

$$0 \leq R_C \lesssim 20 [\Omega],$$

existen valores para X_C tales que

$$\left| \text{Im} \left\{ I_C \right\} \right| \geq \left| \text{Im} \left\{ I_M \right\} \right|.$$

Así, es posible calcular los valores para φ_{c1} y φ_{c2} , utilizando (6.114) y la expresión para la componente imaginaria de I_C dada en (6.116). Con esto, y $R_C = 10[\Omega]$, tenemos que

$$\varphi_c = \frac{1}{2} \text{seno}^{-1} \left(\frac{2R_C}{V_f} 31,08 \text{seno} (53^\circ) \right),$$

$$\varphi_{c_1} = 14,88^\circ \quad \text{y} \quad \varphi_{c_2} = 90^\circ - \varphi_{c_1} = 75,12^\circ.$$

Con estos valores, es posible calcular los valores correspondientes para C , a través de (6.115), obteniendo

$$C_1 \approx 1200[\mu\text{F}] \quad \text{y} \quad C_2 \approx 85[\mu\text{F}].$$

X_C fijo

Si consideramos X_C fijo y R_C variable, de las relaciones mostradas en (6.115) tenemos que I_C solo puede tomar valores que cumplen con

$$I_C \leq \frac{V_f}{X_C},$$

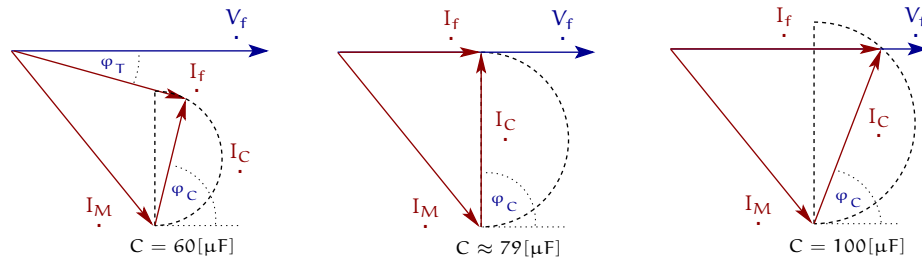
donde la igualdad se cumple para $R_C = 0$, lo cual es una posible solución a nuestro problema (a diferencia del caso anterior) ya que sería equivalente al caso $Z_C = 1/(j\omega C)$.

Similar al caso anterior, de (6.115), podemos deducir el lugar geométrico que tendrá el fasor I_C en el plano complejo. Éste corresponde a una semicircunferencia dada por

$$\text{Im} \{I_C\} = \frac{V_f}{2X_C} (1 - \cos(2\varphi_c)) \quad \text{y} \quad \text{Re} \{I_C\} = \frac{V_f}{2R_C} \text{seno}(2\varphi_c), \quad (6.117)$$

para $0 \geq \varphi_c \leq \pi/2$.

A continuación vemos una figura que muestra los distintos lugares geométricos a los cuales pertenece el fasor I_C , para distintos valores de X_C .



En la figura, se observa que es posible encontrar valores para R_C , si

$$C \geq 79[\mu\text{F}].$$

Este valor límite, se obtiene utilizando (6.114) y (6.117), para $\varphi_c = 90^\circ$. Esto corresponde al caso mencionado anteriormente, donde $R_C = 0$.

Además, vemos que existen valores para R_C , mayores que cero, si $C > 79[\mu F]$, como muestra la figura anterior. Así, utilizando (6.117) para saber φ_c en (6.114), con $C = 100[\mu F]$, obtenemos

$$\varphi_c = 62,73^\circ.$$

Con este valor para φ_c y (6.115), encontramos el valor de R_C correspondiente a $X_C = 31,83[\Omega]$

$$R_C \approx 16[\Omega].$$

Errores

Error 1 En el cálculo del factor de potencia, confundir el signo del ángulo asociado a éste, dependiendo si el factor de potencia es capacitivo o inductivo⁷.

Error 2 Calcular la magnitud de un fasor $Q = \dot{X} + \dot{Y}$ como

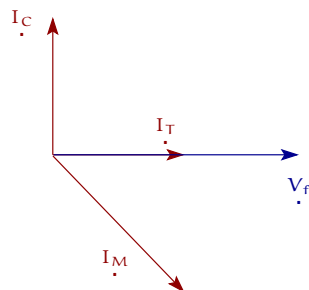
$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

cuando $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ no son perpendiculares.

Una variante de interés

Una variante interesante de analizar, es considerar la red analizada anteriormente, donde $\dot{V}_f = 380 [V]$, $\dot{Z}_C = -j10 [\Omega]$ y $I_f = 20 [A]$. Nos interesa calcular el factor de potencia del motor, cuando la potencia consumida por éste es de $5000[W]$ y el factor de potencia de la red conectada a la fuente de tensión es igual a la unidad.

Dada la conexión en paralelo de los componentes de la red, podemos representar las variables del sistema en un diagrama fasorial como el que se muestra a continuación



⁷Para mayor detalle, ver comentarios a las expresiones (6.75) y (6.85) vistas en la página 162

donde $\dot{I}_f$ y $\dot{V}_f$ están fase, dado que el factor de potencia de la red total es 1.

En este diagrama se muestra el resultado de la LCK

$$\dot{I}_f = \dot{I}_M + \dot{I}_C,$$

de la cual podemos calcular I_M como

$$I_M = \sqrt{I_f^2 - I_C^2},$$

donde I_C está dada por

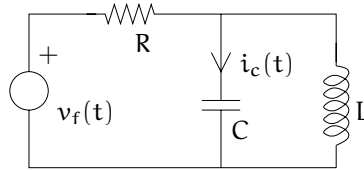
$$I_C = \frac{V_f}{Z_C}.$$

Finalmente, calculamos el factor de potencia utilizando el dato de la potencia consumida por el motor. Así, obtenemos

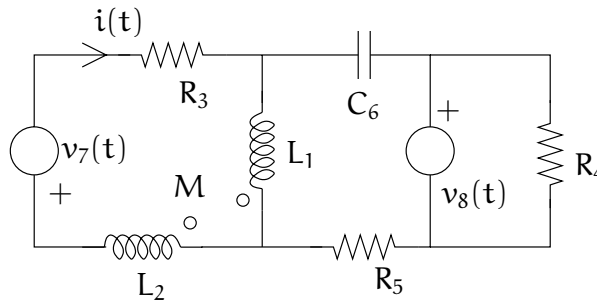
$$FP_M = \cos(\varphi_M) = \frac{P_{act}}{V_f I_M} = 0,31 \quad (6.118)$$

6.4. Ejercicios suplementarios

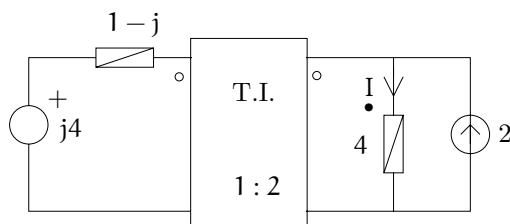
Problema 6.8. En la red eléctrica de la figura se tiene que $R = 2$, $\omega C = 1/2$ y $\omega L = 3$. Si se sabe además que $v_f(t) = 200 \text{ seno}(\omega t + 0,25\pi)$, calcule $i_c(t)$ en estado estacionario.



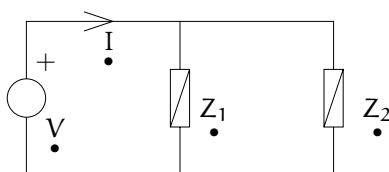
Problema 6.9. En la red de la figura, se sabe que $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $M = 1$, $C_6 = 1/2$, $R_3 = R_4 = R_5 = 2$, $V_7 = 100$, $V_8 = j100$, $\omega = 2$. Calcule $i(t)$ (note que se pide la expresión temporal, en estado estacionario)



Problema 6.10. Calcule $\dot{I}$.



Problema 6.11. La impedancia $\dot{Z}_1$ toma 200 [KVA] a $FP = 0,8$ IND, para $V = 1000$. Se sabe además que el factor de potencia total FP_T es 1, y que $I = 180$ [A]. Calcule $\dot{Z}_2$.



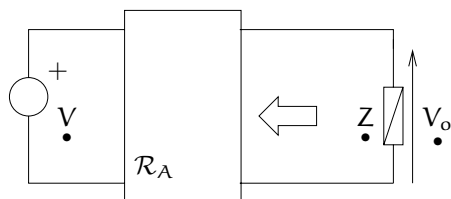
Problema 6.12. En la red de la figura se supone que $\mathcal{R}_A$ es lineal. Se realizan dos experimentos

Exp-1 Con $Z = \infty$, se obtiene $\dot{V}_o = 120 \angle -\pi/4$

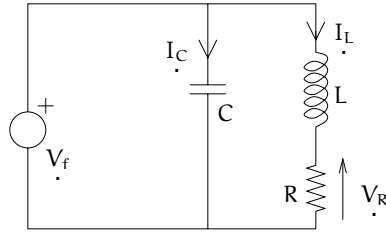
Exp-2 Con $\dot{Z} = 1 + j3$, se obtiene $\dot{V}_o = 60 \angle \pi/4$

6.12.1 Calcule el equivalente Thevenin que se ve desde la impedancia $\dot{Z}$.

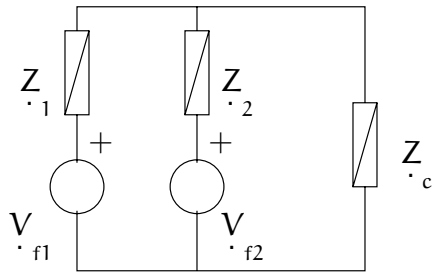
6.12.2 Calcule $\dot{V}_o$ cuando $\dot{Z} = 1$.



Problema 6.13. En la red de la figura, $V_f = 500$, $V_R = 400$, $I_C = 10$, y el FP total es 0,6 CAP. Calcule $\dot{I}_L$.



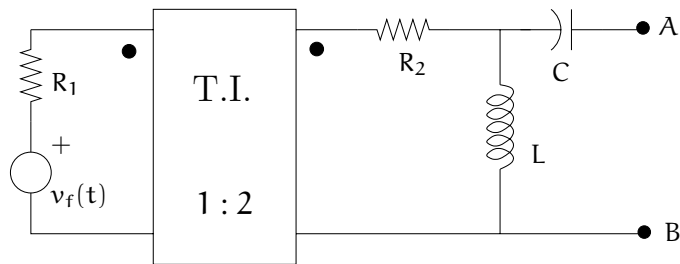
Problema 6.14. Considere la red de la figura, donde $\dot{Z}_1 = 1 + j$, $\dot{Z}_2 = 2 - j$, $\dot{Z}_c = 2$, $\dot{V}_{f1} = 12$ y $\dot{V}_{f2} = j12$.



6.14.1 Calcule la potencia activa disipada por $\dot{Z}_c$.

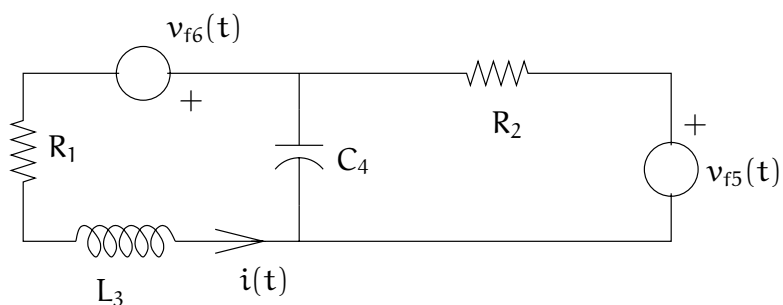
6.14.2 Calcule la potencia aparente compleja entregada por cada fuente.

Problema 6.15. Considere la red de la figura, donde $R_1 = 4[\Omega]$, $R_2 = 2[\Omega]$, $C = 1000[\mu F]$, $L = 2[mH]$ y $v_f(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t - \pi/3)[V]$



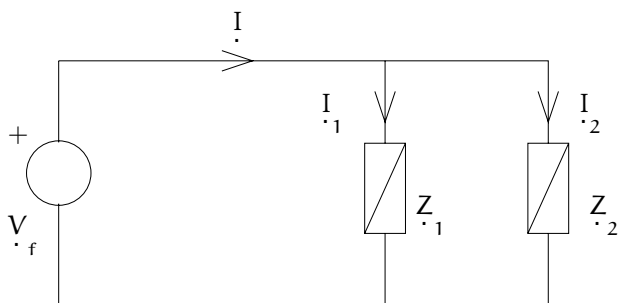
Determine el equivalente Norton en el dominio fasorial, visto desde los terminales A – B.

Problema 6.16. Calcule $i(t)$ en estado estacionario, si se sabe que $R_1 = 2[\Omega]$, $R_2 = 2[\Omega]$, $L = 4[mH]$, $C = 1000[\mu F]$, $v_{f1}(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t)[V]$ y $v_{f2}(t) = 10\sqrt{2}\sin(1000t)[V]$.



Problema 6.17. Se sabe que $V_f = 1000$, Z_1 toma 10 [KW] a $FP = 0,8$ IND, Z_2 toma 10 [KVAR] a $FP = 12/13$ CAP.

Calcule I , I_1 e I_2 note que se piden sólo las magnitudes

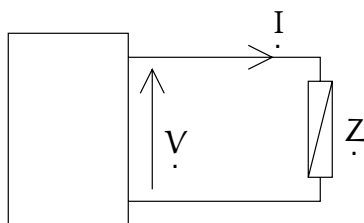


Problema 6.18. Considere la red de la figura, donde se cumple

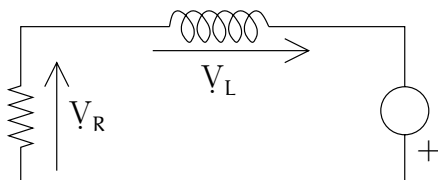
$$v(t) = 400 \cos(100t - \pi/6)$$

$$i(t) = 250 \cos(100t - \pi/4)$$

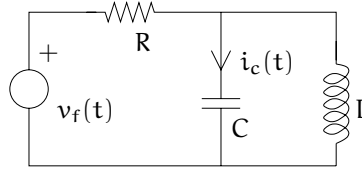
Calcule Z .



Problema 6.19. Considere la red de la figura, donde $P_{ap} = 400 + j300$ [VA] y $V_R = 300$ [V]. Calcule V_L

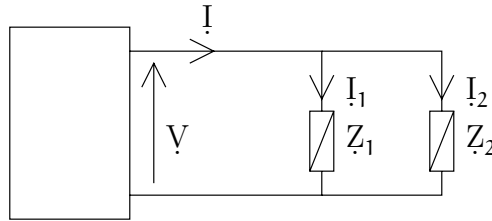


Problema 6.20. Considere la red de la figura



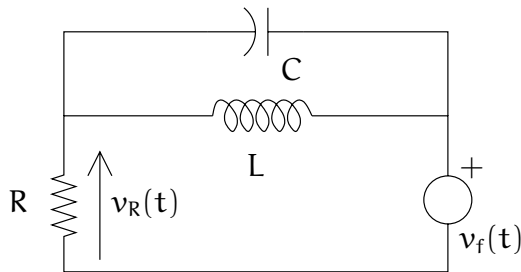
Si $\omega = 100$ [rad/s] se sabe que $V_L = 2V_C$. ¿A qué frecuencia se cumple que $V_L = V_C$?

Problema 6.21. Considere la red de la figura, donde $V = 1000$ [V], $Z_1 = 5$, $Z = 4$. Con los datos disponibles, calcule los valores máximo y mínimo de I .

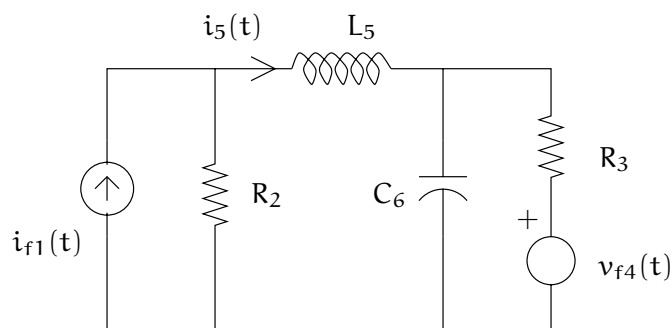


Problema 6.22. En la red del problema 6.21 se sabe que Z_1 toma 200 [KVA] a $FP = 12/13$ IND y que Z_2 toma 100 [KVA] a $FP = 0,8$ CAP. ¿Cuál es el FP del conjunto?

Problema 6.23. Considere la red de la figura, donde $R = 3$ [Ω], $L = \frac{1}{157}$ [H], $C = \frac{1}{628}$ [F] y $v_f(t) = 10 + 6\cos(314t)$ [V]. Calcule la tensión $v_R(t)$ en estado estacionario.



Problema 6.24. Considere la red de la figura, donde $i_{f1}(t) = \sqrt{2}\cos(3t)$, $v_{f4}(t) = 4\cos(3t + \pi/4)$, $R_2 = 1$, $R_3 = 2$, $L = \frac{1}{3}$ y $C = \frac{1}{6}$. Calcule la expresión estacionaria para $i_5(t)$

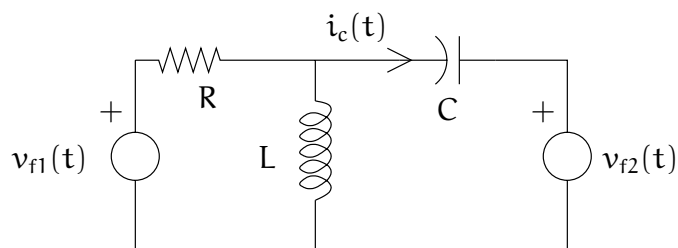


Problema 6.25. Una fuente sinusoidal de 1000 [V] (valor RMS) y 50 [Hz] alimenta una carga de 20 [KVA] de $\text{FP} = 0,707 \text{ IND}$. Suponga que se agrega, en paralelo, otra carga que consume 10 [KW] a $\text{FP}=1$.

6.25.1 Calcule el valor RMS de la corriente suministrada por la fuente antes y después de agregar la segunda carga.

6.25.2 Suponga que se desea mejorar el FP del conjunto agregando un condensador. ¿Cuál debería ser la capacidad del condensador (en Farads) para que el FP total sea 1?

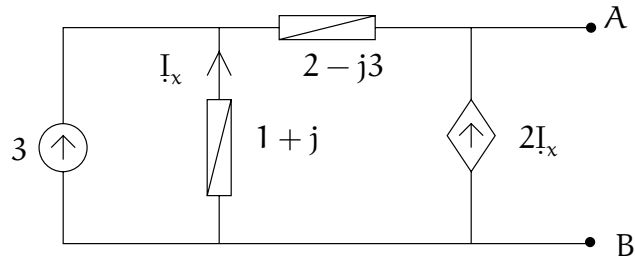
Problema 6.26. Considere la red de la figura, donde $R = 2 \text{ } [\Omega]$, $L = \frac{1}{157} \text{ [H]}$, $C = \frac{1}{628} \text{ [F]}$, $v_{f1}(t) = 100\sqrt{2} \cos 314t \text{ [V]}$ y $v_{f2}(t) = 80\sqrt{2} \text{ seno } 314t \text{ [V]}$.



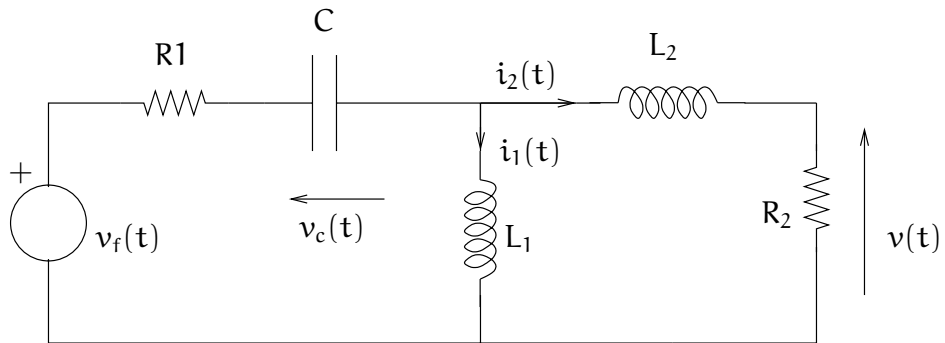
6.26.1 Calcule $i_c(t)$ en estado estacionario.

6.26.2 Calcule la potencia aparente compleja suministrada por cada una de las fuentes.

Problema 6.27. Considere la red de la figura. Obtenga el equivalente Thevenin y el equivalente Norton, vistos desde el par de terminales A – B.



Problema 6.28. Considere la red de la figura, donde $v_f(t) = \text{sen}(3t)$ [V], $R_1 = 1[\Omega]$, $R_2 = 1[\Omega]$, $v_c(0) = -5$ [V], $i_1(t) = 0.2$ [A], $i_2(0) = -0.2$ [A], $L_1 = \frac{1}{3}$ [H], $L_2 = \frac{2}{3}$ [H] y $C = \frac{1}{3}$ [F].



Calcule, de ser posible, la tensión $v(t)$ en estado estacionario.

Índice alfabético

condiciones iniciales, 32
conservación de carga, 33
conservación de energía, 34
constante de tiempo, 24, 31

divisor de corriente, 12

ecuación diferencial
 primer orden, 24, 31

energía
 conservación, 23, 30
estado estacionario, 46

impulso de Dirac, 33
interruptor, 32

Kirchoff
 ley de corrientes, 23
 ley de voltajes, 23

Laplace transformada, 34
linealidad, 7

potencia
 instantánea, 25
potencia instantánea, 6, 13

red RC, 23
referencia combinada, 6

Tellegen
 teorema, 6, 30
transformada fasorial, 46
 inversa, 46

Apéndice A

Relaciones de interés.

A.1. Transformación estrella-triángulo

Considere las dos redes de la figura.

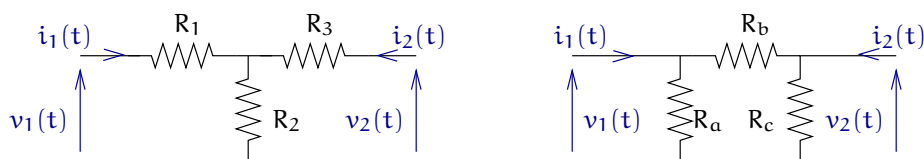


Figura A.1: Configuraciones estrella (izquierda) y triángulo (derecha)

Ambas redes son equivalentes, es decir, tienen las mismas relaciones entre sus cuatro variables de terminales, si y sólo si se cumple que

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3} \quad (\text{A.1})$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \quad (\text{A.2})$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \quad (\text{A.3})$$

$$R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (\text{A.4})$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (\text{A.5})$$

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (\text{A.6})$$

Apéndice B

Matrices

B.1. Introducción

Este apéndice resume conceptos y propiedades relacionadas con matrices, como soporte para varios de los capítulos del texto y como material de referencia para tópicos más avanzados. El lector puede encontrar demostraciones y más detalles, por ejemplo, en [?], [?], [?], [?] y [?].

B.2. Conceptos básicos

Definición B.1. Una **matriz** $\mathbf{A}$ es un arreglo de $n \times m$ elementos pertenecientes a un conjunto $\mathbb{K}$, dispuestos rectangularmente en n filas y m columnas, en que $n, m \in \mathbb{N}$. Un elemento de $\mathbf{A}$ en la i -ésima fila y j -ésima columna se denota por a_{ij} . Es decir:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{K} \quad (\text{B.1})$$

□□□

El conjunto de matrices en la definición anterior se denota por $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$, o simplemente $\mathbb{K}^{n \times m}$. Usualmente el conjunto $\mathbb{K}$ es un *cuerpo* [?] y, en lo que resta del presente apéndice, supondremos que es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, o el de los complejos $\mathbb{C}$.

Algunos conceptos básicos sobre matrices son los siguientes:

1. Dos matrices son **iguales** si y sólo si, son iguales elemento a elemento.
2. Una matriz es **cuadrada** si tiene igual número de filas que de columnas.

3. Una matriz formada por sólo una columna se denomina **vector columna**.
4. Una matriz formada por sólo una fila se denomina **vector fila**.
5. Usualmente, denominaremos como **vector de dimensión** n a un vector columna formado por n elementos.
6. Una matriz de $n \times m$ está formada por n vectores fila y m vectores columna.
7. La **traza** de una matriz cuadrada $\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es la suma de los elementos sobre su diagonal principal, es decir:

$$\text{traza}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{B.2})$$

8. La **traspuesta** de una matriz $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ de $n \times m$ es la que resulta de intercambiar sus filas con sus columnas, es decir, es la matriz $\mathbf{A}^T = \{a_{ji}\}$, de $m \times n$.
9. Una matriz (cuadrada) $\mathbf{A}$ se dice **simétrica** si, y sólo si, es igual a su matriz traspuesta, es decir, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
10. La matriz **hermitiana** de $\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, que denotamos por $\mathbf{A}^H$, es aquella que resulta de conjugar los elementos de su matriz traspuesta, es decir:

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^* = \{a_{ji}^*\} \quad (\text{B.3})$$

11. A su vez, una matriz $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$ se dice **hermitiana**.
12. Como consecuencia de lo anterior, toda matriz **real** (elementos en $\mathbb{R}$) y **simétrica** es **hermitiana**.
13. Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ se dice **diagonal** si y sólo si, todos sus elementos fuera de la diagonal principal de la matriz son cero.
14. Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ se dice **triangular superior(inferior)** si y sólo si, todos los elementos bajo(sobre) la diagonal principal son cero.
15. La matriz **identidad** de dimensión n , que denotamos por $\mathbf{I}_n$, es una matriz diagonal de $n \times n$ cuyos elementos no nulos son iguales a 1, es decir:

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

B.3. Determinante y rango de una matriz

El **determinante** de una matriz (cuadrada) es un escalar que tiene directa relación con su rango, la existencia de su inversa, y el cálculo de sus autovalores. Su cálculo puede definirse por inducción mediante la *expansión de Laplace*.

1. Se define el ij -ésimo **menor** de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, que denotamos por $\mathbf{A}_{ij}$ como la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar la i -ésima fila y la j -ésima columna de $\mathbf{A}$.
2. Se define el ij -ésimo **cofactor** de una matriz $\mathbf{A}$, de $n \times n$, como el escalar:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (\text{B.5})$$

en que $\mathbf{A}_{ij}$ es el ij -ésimo menor de la matriz $\mathbf{A}$.

Definición B.2. Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ de $n \times n$, su determinante:

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} \quad (\text{B.6})$$

se define recursivamente en términos del determinante de sus menores o desarrollo por cofactores, ya sea a lo largo su i -ésima fila:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (\text{B.7})$$

o de su j -ésima columna:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (\text{B.8})$$

Si $\det \mathbf{A} = 0$ se dice que la matriz es **singular**. □□□

Definiendo el determinante para matrices con un único elemento como $\det[a_{11}] = a_{11}$, puede obtenerse el determinante de matrices de dimensiones mayores. Por ejemplo, para matrices de 3×3 tenemos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Definición B.3. Rango de una matriz

Dada una matriz $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ de $n \times m$, definimos:

- El **rango columna(fila)** de $\mathbf{A}$ es el máximo número de vectores columna(fila) linealmente independientes (véase el Apéndice ??).
- El **rango** de $\mathbf{A}$ es el mínimo entre su rango fila y su rango columna.

- La matriz $\mathbf{A}$ es de **rango completo** si su rango es igual al mínimo entre su número de filas o de columnas.

□□□

Ejemplo B.1. El lector puede verificar que la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

tiene rango fila igual a 2, rango columna igual a 3 y, por tanto, es una matriz de rango 2 (no es de rango completo).

□□□

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es de **rango completo** si y sólo si, es **no singular**, es decir, si $\det \mathbf{A} \neq 0$.

B.4. Inversa de una matriz

Definición B.4. Producto entre matrices

Dadas las matrices $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ de $n \times p$ y $\mathbf{B} = \{b_{kj}\}$ de $p \times m$, entonces el producto entre ellas es la matriz $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ de $n \times m$, tal que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = \langle a_{i*}, b_{*j} \rangle \quad (\text{B.11})$$

donde a_{i*} es la i -ésima fila de $\mathbf{A}$ y b_{*j} denota la j -ésima columna de $\mathbf{B}$. □□□

Note que el producto matricial está bien definido sólo si el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas de $\mathbf{B}$. Es más: el ij -ésimo elemento de $\mathbf{C}$ es el producto vectorial entre la i -ésima fila de $\mathbf{A}$ y la j -ésima columna de $\mathbf{B}$.

Lema B.1. Propiedades del producto matricial

Dadas las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ de dimensiones adecuadas, entonces:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (\text{asociatividad matricial}) \quad (\text{B.12})$$

$$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \quad (\text{asociatividad escalar}) \quad (\text{B.13})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \quad (\text{distributividad}) \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\text{no existe conmutatividad}) \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{I}_n \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_m \quad (\text{en que } \mathbf{A} \text{ es de } n \times m) \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \Rightarrow (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}) = \det \mathbf{C} \quad (\text{B.17})$$

El lema anterior resume las propiedades del producto matricial, sin embargo, nada se menciona acerca del inverso multiplicativo de una matriz $\mathbf{A}$, que definimos a continuación.

Definición B.5. Inversa de una matriz

La inversa de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, que denotamos $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, es la única matriz que, si existe, satisface:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \quad (\text{B.18})$$

□□□

Lema B.2. Existencia de la inversa de A

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es invertible, es decir, su inversa $\mathbf{A}^{-1}$ existe, si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- (a) $\mathbf{A}$ es no singular, es decir, $\det \mathbf{A} \neq 0$.
- (b) $\text{rango } \mathbf{A} = n$.
- (c) las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes.
- (d) las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes.

□□□

Lema B.3. Cálculo de la inversa

Dada una matriz no singular $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces su inversa está dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A} \quad (\text{B.19})$$

en que $\text{adj } \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es la matriz **adjunta** de $\mathbf{A}$, definida como la traspuesta de la matriz de sus cofactores, es decir:

$$\text{adj } \mathbf{A} = \{C_{ij}\}^T \quad (\text{B.20})$$

en que el cofactor C_{ij} se define en (B.5).

Demostración:

Usando la definición de la matriz adjunta en (B.20) y la expansión de Laplace en (B.7) y (B.8) el lector puede verificar que:

$$(\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I} \quad (\text{B.21})$$

□□□

El lector puede verificar las siguientes propiedades:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{B.22})$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{B.23})$$

Para el caso de matrices no cuadradas es posible definir inversas por la derecha, por la izquierda e incluso su inversa generalizada (??).