
TEORÍA DE REDES. Ejercicios Vol. II

Patricio E. Valenzuela
Mario E. Salgado

Departamento de Electrónica
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, CHILE

VALPARAÍSO, CHILE. 2009.

En evaluación

Índice general

1. ANÁLISIS DE REDES TRIFÁSICAS	1
1.1. Introducción	1
1.2. Análisis de redes trifásicas equilibradas.	3
1.2.1. Conexión de carga equilibrada en delta.	3
1.2.2. Conexión de carga equilibrada en estrella con red de alimentación en delta.	8
1.2.3. Conexión de carga equilibrada en estrella con generador de alimentación en estrella.	13
1.3. Análisis de redes trifásicas desequilibradas.	20
1.3.1. Conexión de carga desequilibrada en estrella con generador equilibrado en estrella.	20
1.4. Transformadores trifásicos.	27
1.4.1. Análisis unilineal de la red trifásica equilibrada.	27
1.5. Potencia en sistemas trifásicos	34
1.5.1. Método de los Wattímetros	34
1.6. Ejercicios suplementarios	41
2. ANÁLISIS DE REDES DINÁMICAS EN DOMINIO DE LAPLACE	45
2.1. Introducción	45
2.2. Redes RLC	47
2.2.1. Red RLC serie	47
2.2.2. Red RC con fuente controlada	52
2.2.3. Redes capacitivas e inductivas con degeneraciones	56
2.2.4. Redes inductivas con acoplamiento magnético	60
2.3. Métodos generales y Transformación de Laplace	65
2.3.1. Método de mallas, sin fuentes controladas	65
2.3.2. Método de nodos, sin fuentes controladas	69
2.3.3. Método de mallas, con fuentes controladas	74
2.4. Ejercicios suplementarios	80

3. RESPUESTA EN FRECUENCIA DE REDES ELÉCTRICAS	85
3.1. Introducción	85
3.2. Respuesta en frecuencia de redes pasivas.	87
3.2.1. Respuesta en frecuencia de una red RC	87
3.2.2. Respuesta en frecuencia de una red RLC	92
3.3. Respuesta en frecuencia de redes activas.	100
3.3.1. Respuesta en frecuencia de una red RC implementada con AO	100
3.3.2. Respuesta en frecuencia de una red RC complementaria	106
3.3.3. Respuesta en frecuencia de una red de segundo orden implementada con AO	113
3.3.4. Respuesta en frecuencia de una red complementaria de segundo orden mediante AO	120
3.4. Ejercicios suplementarios	125
4. FILTROS ANALÓGICOS	129
4.1. Introducción	129
4.2. Diseño de filtros pasivos.	131
4.2.1. Diseño de filtros pasivos de primer orden	131
4.2.2. Diseño de filtros pasivos de segundo orden	137
4.3. Diseño de filtros activos.	144
4.3.1. Diseño de filtros activos de primer orden	144
4.3.2. Diseño de filtros activos de segundo orden	150
4.3.3. El Filtro Activo Universal (FAU)	158
4.4. Filtros Butterworth.	161
4.4.1. Determinación de transferencias de orden n	161
4.4.2. Diseño de filtros Butterworth pasa-bajos	166
4.4.3. Diseño de filtros Butterworth pasa-altos	172
4.4.4. Diseño de filtros Butterworth pasa-banda	176
4.4.5. Diseño de filtros Butterworth elimina-banda	182
4.5. Filtros Chebyshev.	188
4.5.1. Determinación de transferencias de orden n	188
4.6. Diseño general de filtros activos	193
4.7. Ejercicios suplementarios	201
5. REDES DE DOS PUERTAS	205
5.1. Introducción	205
5.2. Caracterización de impedancia de circuito abierto.	206
5.2.1. Cálculo de los parámetros de circuito abierto.	206
5.2.2. Procedimiento general de análisis para la obtención de la caracterización de circuito abierto.	211
5.3. Caracterización de admitancia de cortocircuito.	216
5.3.1. Cálculo de los parámetros de cortocircuito.	216
5.3.2. Procedimiento general de análisis para la obtención de la caracterización de cortocircuito.	223
5.4. Caracterización de parámetros híbridos.	228

5.4.1. Cálculo de los parámetros híbridos H.	228
5.4.2. Cálculo de los parámetros híbridos G.	233
5.5. Parámetros de transmisión T.	239
5.5.1. Cálculo de los parámetros de transmisión T.	239
5.6. Ejercicios suplementarios	245
A. La transformada de Laplace	249
A.1. Introducción	249
A.2. Definición de la transformada	249
A.3. Propiedades	252
A.4. Descomposición en fracciones parciales	266
B. Funciones de redes y equivalencia de parámetros	277
B.1. Introducción	277
B.2. Funciones de redes. Definición.	277
B.3. Equivalencia de parámetros	280
Referencias	281
Índice alfabético	283

En evaluación

Índice de figuras

1.1.	Diagrama temporal para las corrientes de línea $i_a(t)$ y por fase en la carga $i_{ab}(t)$	7
1.2.	Diagrama fasorial de las tensiones de línea, corrientes por fase en la carga y las corrientes de línea calculadas en el ejercicio original.	8
1.3.	Diagrama fasorial de las tensiones de línea y las tensiones de fase en el problema analizado.	11
1.4.	Red trifásica equivalente a la presentada en el problema original.	15
1.5.	Red monofásica para analizar redes 3ϕ equilibradas en configuración λ - λ	17
1.6.	Red 3ϕ equilibrada con cargas en configuración estrella y en paralelo.	18
1.7.	Equivalente monofásico para red 3ϕ equilibrada con cargas en configuración estrella y en paralelo.	18
1.8.	Red trifásica con líneas de impedancia \tilde{Z}_ℓ	20
1.9.	Red equivalente del sistema trifásico desequilibrado en la carga.	22
1.10.	Diagrama fasorial de las tensiones de de fase en la carga y las tensiones de fase en la fuente de alimentación (se han distorsionado los ángulos de desfase para una mejor comprensión). . . .	24
1.11.	Equivalencia para una red trifásica con carga desequilibrada, y neutro conectado.	27
1.12.	Cargas trifásicas conectadas en estrella (izquierda) y delta (derecha), utilizadas para la obtención de equivalencias.	32
1.13.	Medición de la potencia activa mediante wattímetro en el caso monofásico.	35
1.14.	Diagrama fasorial con las tensiones y corrientes involucradas en la medición de los wattímetros.	38
1.15.	sistema polifásico arbitrario.	39
2.1.	Red equivalente en el dominio de la T.L.	48

2.2.	Red equivalente en el dominio de la T.L.	53
2.3.	Red equivalente en el dominio del tiempo.	61
2.4.	Red equivalente en el dominio de la T.L.	61
2.5.	Red equivalente en el dominio del tiempo, con acoplamiento de polaridad invertida.	64
3.1.	Diagrama de Bode de la magnitud de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el condensador (en azul).	89
3.2.	Diagrama de Bode de la fase de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el condensador (en azul).	89
3.3.	Diagrama de Bode de la magnitud de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el inductor (en azul).	93
3.4.	Diagrama de Bode de la fase de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el inductor (en azul).	93
3.5.	Diagrama de Bode para la magnitud de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC.	96
3.6.	Diagrama de Bode para la fase de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC.	96
3.7.	Diagrama de Bode para la magnitud de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC serie.	99
3.8.	Diagrama de Bode para la fase de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC serie.	100
3.9.	Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia del amplificador operacional.	103
3.10.	Diagrama de Bode para la fase de la transferencia del amplificador operacional.	103
3.11.	Diagrama de Bode de magnitud para la transferencia de un modelo de AO más realista.	105
3.12.	Diagrama de Bode de fase para la transferencia de un modelo de AO más realista.	106
3.13.	Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de la red pasa-altos.	108
3.14.	Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de la red pasa-altos.	109
3.15.	Conexión de 2 redes en cascada.	109
3.16.	Diagrama de Bode para la magnitud de la interconexión de dos transferencias en cascada.	110
3.17.	Conexión de 2 redes en paralelo.	110

3.18.	Diagrama de Bode para la magnitud de la interconexión de dos transferencias en paralelo.	111
3.19.	Diagrama de Bode para la fase de la interconexión de dos transferencias en paralelo.	111
3.20.	Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de la red pasa-altos implementada con un AO real.	113
3.21.	Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de la red pasa-altos implementada con un AO real.	114
3.22.	Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de una red de segundo orden con AO.	117
3.23.	Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de una red de segundo orden con AO.	117
3.24.	Amplificador inversor convencional implementado con AO.	119
3.25.	Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de una variante del filtro pasa-banda.	120
3.26.	Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de una variante del filtro pasa-banda.	120
3.27.	Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia en un AO de segundo orden elimina-banda.	122
3.28.	Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de una red con AO elimina-banda.	122
3.29.	Diagrama de Bode para la magnitud para una red elimina-banda mal implementada.	125
3.30.	Diagrama de Bode para la fase para una red elimina-banda mal implementada.	125
4.1.	Características ideales de magnitud y fase de un filtro pasa banda	130
4.2.	Diagrama de Bode de magnitud para un filtro pasivo pasa-bajos RC.	134
4.3.	Diagrama de Bode de fase para un filtro pasivo pasa-bajos RC.	134
4.4.	Diagrama de Bode de la magnitud del filtro pasivo pasa-altos diseñado.	137
4.5.	Diagrama de Bode de la fase del filtro pasivo pasa-altos diseñado.	137
4.6.	Diagrama de Bode de magnitud del filtro pasivo elimina-banda diseñado.	141
4.7.	Diagrama de Bode de fase del filtro pasivo elimina-banda diseñado.	141
4.8.	Diagrama de Bode de magnitud del filtro pasivo pasa-banda diseñado.	143
4.9.	Diagrama de Bode de fase del filtro pasivo pasa-banda diseñado.	144
4.10.	Diagrama de Bode de magnitud del filtro activo pasa-bajos diseñado.	147
4.11.	Diagrama de Bode de fase del filtro activo pasa-bajos diseñado.	147
4.12.	Diagrama de Bode de magnitud del filtro activo pasa-altos diseñado.	150
4.13.	Diagrama de Bode de fase del filtro activo pasa-altos diseñado.	150

4.14.	Diagrama de Bode de magnitud del filtro activo pasa-banda diseñado.	154
4.15.	Diagrama de Bode de fase del filtro activo pasa-banda diseñado.	154
4.16.	Diagrama de Bode de magnitud para el filtro notch diseñado.	158
4.17.	Diagrama de Bode de fase para el filtro notch diseñado.	158
4.18.	Distribución de los polos de un filtro Butterworth de tercer orden sobre el plano s	164
4.19.	Diagrama de magnitud para los primeros 4 filtros Butterworth normalizados.	166
4.20.	Diagrama de magnitud para los primeros 4 filtros Butterworth normalizados y las restricciones de diseño impuestas (rest. 1 y rest. 2).	168
4.21.	De-normalización sobre el plano s de los polos de un filtro Butterworth de orden 4.	172
4.22.	Determinación del filtro pasa-bajos Butterworth normalizado que cumple con las especificaciones dadas en (4.155) y (4.156). Se debe hacer notar que las líneas en negro corresponden a las restricciones del problema.	174
4.23.	Respuesta a escalón para filtros pasa-bajos Butterworth normalizado de tercer y quinto orden.	177
4.24.	Diagrama de Bode de magnitud para los primeros 4 filtros Butterworth normalizados. Se incluyen las intersecciones de las curvas con las restricciones del problema (en líneas negras).	178
4.25.	Transformación de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos normalizado a un filtro pasa-banda con frecuencia central ω_o	179
4.26.	Diagrama de Bode de magnitud para el filtro Butterworth pasa-banda diseñado.	180
4.27.	Implementación alternativa de un filtro pasa-banda.	181
4.28.	Intersección de las restricciones impuestas en el problema con la respuesta en frecuencia de los filtros Butterworth normalizados.	185
4.29.	Diagrama de Bode del filtro Butterworth elimina-banda diseñado.	186
4.30.	Respuesta en frecuencia de un filtro Chebyshev pasa-bajos normalizado.	189
4.31.	Diagrama de Bode de magnitud de la transferencia del filtro Chebyshev normalizado de segundo orden.	192
4.32.	Distribución en el plano s de los polos de un filtro Butterworth (sobre la circunferencia de radio 1) y Chebyshev (sobre la elipse). Se destacan en rojo los polos que son utilizados para implementar los filtros analizados.	193
4.33.	Diagrama de Bode para los 4 primeros filtros Butterworth normalizados y su intersección con las restricciones a las frecuencias ω_{n_1} y ω_{n_2}	195
4.34.	Diagrama de Bode para los 4 primeros filtros Chebyshev normalizados en ganancia y su intersección con las restricciones a las frecuencias ω_{n_1} y ω_{n_2}	196

4.35.	Diagrama de Bode de magnitud para el filtro pasa-banda diseñado.	199
4.36.	Diagrama de Bode de fase para el filtro pasa-banda diseñado.	199
4.37.	Diagrama de Bode de magnitud para el filtro pasa-banda Chebyshev.	201
4.38.	Diagrama de Bode de fase para el filtro pasa-banda Chebyshev.	201
5.1.	Generalización de una red de dos puertas.	207
5.2.	Red equivalente en base a la caracterización de circuito abierto.	209
5.3.	Equivalente T para una red de dos puertas conformada por R, L, C, M y T.I.	209
5.4.	Red de dos puertas con impedancia de carga $Z_c(s)$.	210
5.5.	Definición de las corrientes de malla en la red propuesta.	212
5.6.	Red original transformada a su equivalente con impedancias en configuración estrella.	215
5.7.	Representación general de una red en función de la caracterización de admitancia de cortocircuito.	220
5.8.	Representación de una red en función de sus parámetros de cortocircuito para el caso en que $y_{12}(s) = y_{21}(s)$.	221
5.9.	Red cargada con una admitancia $Y_c(s)$.	222
5.10.	Método de nodos aplicado a la red del problema.	224
5.11.	Método de nodos aplicado a una red de dos puertas general, que no contiene fuentes independientes de corriente.	224
5.12.	Descripción general de una red de dos puertas mediante su caracterización híbrida.	231
5.13.	Red de dos puertas bajo descrita mediante parámetros híbridos con una admitancia de carga $Y_c(s)$.	232
5.14.	Descripción de la red mediante su caracterización híbrida G.	237
5.15.	Redes de dos puertas conectadas en cascada.	244
A.1.	Función $y(t)$ de orden exponencial y región de convergencia de su transformada de Laplace.	250
A.2.	Circuito RC	263
A.3.	Polos complejos conjugados, para $\omega_n > 0$ (Ejemplo A.9).	272
B.1.	Cuadripolo cargado y alimentado	278

En evaluación

Índice de tablas

2.1. Efecto del parámetro de la fuente controlada en la naturaleza de la dinámica de las señales en la red. Los casos en rojo no podrían ocurrir si no estuviese la fuente controlada.	55
A.1. Propiedades de la transformada de Laplace.	264
A.2. Transformada de Laplace de algunas funciones simples.	265
A.3. Transformadas de Laplace inversas útiles.	276
B.1. Definición de las funciones de redes en cuadripolos	278
B.2. Caracterización paramétrica de las funciones de redes	279
B.3. Equivalencia de parámetros de cuadripolos	280

En evaluación

Capítulo 1

ANÁLISIS DE REDES TRIFÁSICAS

1.1. Introducción

En la civilización como la conocemos hoy, los sistemas polifásicos, y en particular los trifásicos, constituyen el arreglo básico para la generación, transmisión, distribución y utilización de la energía eléctrica.

Este capítulo está centrado en problemas de análisis de sistemas trifásicos. En realidad, desde el punto de vista de las herramientas necesarias para ese análisis, este capítulo podría ser parte de una más general, en el que se trata el tema de redes sujetas a excitaciones sinusoidales y en estado estacionario. Sin embargo, hemos preferido desarrollar un capítulo independiente para destacar las particularidades de este tipo de redes, y aprovechar sus simetrías para facilitar el análisis.

Los problemas incluyen principalmente redes con generadores trifásicos equilibrados, alimentando cargas que, en algunos casos, son equilibradas, y en otros, desequilibradas. Para que el lector pueda aprovechar en buena forma el contenido de este capítulo se requiere un buen manejo de transformadas fasoriales, aritmética de números complejos y las herramientas gráficas asociadas. Se espera también que el lector conozca métodos generales de análisis de redes, en especial, los métodos de mallas y de nodos.

Uno de los temas de importancia instrumental es el de la notación. Los aspectos de mayor relevancia en este tema son

- La transformada fasorial (TFas) de una señal $f(t) = \hat{F} \cos(\omega t + \alpha)$ se define como

$$\mathcal{P}\{f(t)\} = \dot{F} = F \angle \alpha = \frac{\hat{F}}{\sqrt{2}}$$

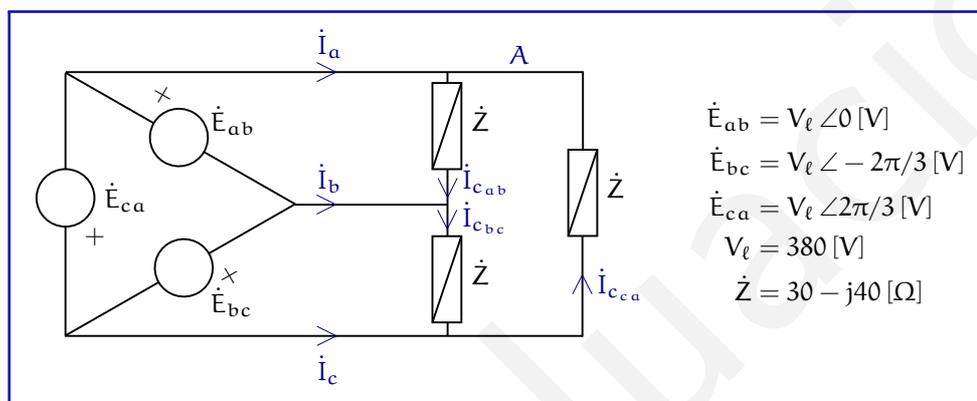
- En este texto, las tres líneas de las redes trifásicas se denotan por la triada $\{a, b, c\}$. En la literatura de la especialidad también se suelen usar $\{A, B, C\}$, $\{R, S, T\}$ o $\{U, V, W\}$.
- La magnitud de la Tfas de las tensiones entre líneas, en el caso de generadores balanceados, se denota por V_ℓ . Si además, la carga es balanceada, las corrientes de líneas tienen la misma magnitud, la que se denota por I_ℓ

1.2. Análisis de redes trifásicas equilibradas.

1.2.1. Conexión de carga equilibrada en delta.

Problema 1.1.

En el presente ejercicio se ilustrará una de las conexiones posibles de cargas en sistemas trifásicos.



Considere el sistema trifásico de la figura, en donde la fuente de alimentación es equilibrada en conexión delta (Δ) y posee una tensión efectiva de 380 [V] a 50 [Hz]. Por otra parte, la carga conectada a la red es equilibrada en conexión delta y está descrita por la impedancia $\dot{Z} = 30 - j40$ [Ω].

1.1.1 Calcule las corrientes de línea y las corrientes en las fases de la carga.

1.1.2 Determine la relación entre las corrientes de línea y las corrientes en la carga.

Solución

La conexión de la carga en Δ y la fuente de alimentación en Δ constituyen la configuración más simple de conexión de fuentes de alimentación y cargas, pues un simple LVK permite determinar la relación entre la tensión entre líneas y la tensión en cada fase de la carga.

Se dice que una fuente de alimentación polifásica es simétrica cuando se cumple que la magnitud de la tensión asociada a cada fuente (V_{ab} , V_{bc} y V_{ca}) es la misma y se encuentran simétricamente distribuidas en el plano fasorial.

En el caso trifásico, una fuente de alimentación equilibrada, en secuencia positiva, cumple con

$$\dot{E}_{ab} = V_\ell \angle \alpha \quad (1.1)$$

V corresponde a un número complejo, en tanto que V corresponde a su magnitud.

$$\dot{E}_{bc} = V_\ell \angle \alpha - 2\pi/3 \quad (1.2)$$

$$\dot{E}_{ca} = V_\ell \angle \alpha + 2\pi/3 \quad (1.3)$$

donde α es un ángulo cualquiera (en este ejemplo $\alpha = 0$). La secuencia positiva corresponde a desfases temporales de la forma

$$e_{ab}(t) = \sqrt{2}V_\ell \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.4)$$

$$e_{bc}(t) = \sqrt{2}V_\ell \cos(\omega t + \alpha - 2\pi/3) \quad (1.5)$$

$$e_{ca}(t) = \sqrt{2}V_\ell \cos(\omega t + \alpha + 2\pi/3) \quad (1.6)$$

A su vez, es posible definir una secuencia negativa en la cual los fasores de la red de alimentación trifásica corresponden a

$$\dot{E}_{ab} = V_\ell \angle \alpha \quad (1.7)$$

$$\dot{E}_{bc} = V_\ell \angle \alpha + 2\pi/3 \quad (1.8)$$

$$\dot{E}_{ca} = V_\ell \angle \alpha - 2\pi/3 \quad (1.9)$$

Las secuencias positiva y negativa constituyen las dos únicas formas de orientar las tensiones de alimentación en un sistema trifásico.

De acuerdo a las ecuaciones (1.7) a (1.9), la secuencia negativa está caracterizada por

$$e_{ab}(t) = \sqrt{2}V_\ell \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.10)$$

$$e_{bc}(t) = \sqrt{2}V_\ell \cos(\omega t + \alpha + 2\pi/3) \quad (1.11)$$

$$e_{ca}(t) = \sqrt{2}V_\ell \cos(\omega t + \alpha - 2\pi/3) \quad (1.12)$$

Por otro lado, una carga equilibrada implica que las impedancias en las tres fases, son iguales en magnitud y fase, es decir

$$\dot{Z}_{ab} = \dot{Z}_{bc} = \dot{Z}_{ca} = Z \angle \varphi = 50 \angle -53,13^\circ \quad (1.13)$$

Así, la corriente en la carga conectada entre las líneas a y b puede ser calculada como

$$\dot{I}_{cab} = \frac{\dot{V}_\ell}{\dot{Z}} = \frac{380}{30 - j40} = \frac{380}{2500} (30 + j40) = 7,6 \angle 53,13^\circ \text{ [A]} \quad (1.14)$$

Como en este caso el sistema de alimentación trifásico posee una secuencia positiva, entonces las restantes corrientes en la carga $\dot{I}_{c_{bc}}$ e $\dot{I}_{c_{ca}}$ pueden ser calculadas como

$$\dot{I}_{c_{bc}} = 7,6 \angle \arctan(4/3) - 2\pi/3 \text{ [A]} \quad (1.15)$$

$$\dot{I}_{c_{ca}} = 7,6 \angle \arctan(4/3) + 2\pi/3 \text{ [A]} \quad (1.16)$$

Efectuando un LCK en el nodo A se obtiene

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{c_{ab}} - \dot{I}_{c_{ca}} \quad (1.17)$$

Al desarrollar la expresión (1.18) resulta

$$\dot{I}_a = 7,6 \angle \arctan(4/3) - 7,6 \angle \arctan(4/3) + 2\pi/3 \text{ [A]} \quad (1.18)$$

Desarrollando el resultado expuesto en (1.18) se llega a

$$\begin{aligned} \dot{I}_a = & 7,6 \left(\frac{3}{5} + j \frac{4}{5} - \cos[\arctan\{4/3\} + 2\pi/3] - j \sin[\arctan\{4/3\} + 2\pi/3] \right) \text{ [A]} \\ & (1.19) \end{aligned}$$

De donde resulta

$$\dot{I}_a = 7,6\sqrt{3} \angle 23,13^\circ \text{ [A]} \quad (1.20)$$

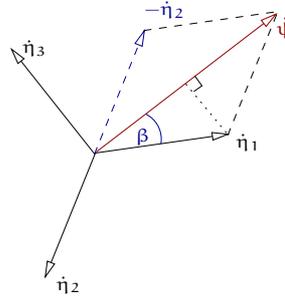
El resultado obtenido en (1.20) merece algunos comentarios:

- La relación entre corriente de línea y corriente en la carga equilibrada cuando la impedancia trifásica está conectada en Δ , se calcula según

$$\dot{I}_a = \sqrt{3} \dot{I}_{c_{ab}} \angle -\varphi - \pi/6 \quad (1.21)$$

El resultado en (1.21) es independiente de la estructura de la fuente de alimentación trifásica. Si bien el cálculo efectuado es aplicable sólo a la fase a, puede extenderse en forma simple a las fases b y c incluyendo en el ángulo el desfase asociado a cada una de las tensiones entre líneas.

- El factor $\sqrt{3}$, presente en la expresión (1.21), se repite en muchos resultados en los sistemas 3ϕ ; en efecto, tal como se comprobará posteriormente, será un elemento común en el cálculo de las corrientes y tensiones de línea y de fase, tanto en la carga como en la fuente de alimentación. Sin embargo, el resultado (1.21) sólo es válido cuando la carga es equilibrada.
- Una observación de validez general es que el factor $\sqrt{3}$ aparece cada vez que se restan dos cantidades pertenecientes a un conjunto equilibrado de tensiones o corrientes. Esta idea se puede ilustrar de la siguiente manera: considere el conjunto trifásico equilibrado $\{\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dot{\eta}_3\}$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$, y luego suponga que necesitamos calcular una variable $\dot{\psi}$, dada por $\dot{\psi} = \dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2$. Entonces la situación queda descrita por el diagrama fasorial



donde $\beta = \pi/6$ [rad]. Entonces $\psi = 2\eta \cos(\beta) = \sqrt{3}\eta$

- Tal como se ha mencionado en el párrafo anterior, el análisis para el caso de cargas desequilibradas parte de la premisa de que las impedancias de las cargas conectadas tienen, en general, diferentes magnitudes y diferentes fases. En ejercicios posteriores se analizará el comportamiento de una red trifásica cuando existe una carga desequilibrada (ver sección 1.3).

La expresión $e^{j\alpha}$ puede ser descompuesta como $\cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$. Además, siempre se cumple $|e^{j\alpha}| = 1$. En otras palabras, un factor exponencial complejo sólo agrega desfase a la expresión original, sin alterar su magnitud.

Aplicando el mismo principio que el expresado para (1.15) y (1.16) es posible expresar las corrientes \dot{I}_b e \dot{I}_c en base a (1.20) como

$$\dot{I}_b = \dot{I}_a e^{-j2\pi/3} = 7,6\sqrt{3} \angle -96,87^\circ \quad (1.22)$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_a e^{j2\pi/3} = 7,6\sqrt{3} \angle 143,13^\circ \quad (1.23)$$

Los resultados expuestos en (1.22) y (1.23) pueden ser deducidos considerando que tanto la red de alimentación como las cargas con equilibradas, por lo que las corrientes que circulan a través de cada una de las líneas es la misma; la única diferencia radica en que las corrientes están desfasadas simétricamente en el plano fasorial.

En la figura 1.1, se presenta un gráfico temporal con las corrientes de línea $i_a(t)$ y por fase en la carga $i_{ab}(t)$.

Errores

El problema propuesto en esta sección constituye uno de los ejemplos más sencillos que permiten introducir el análisis de redes trifásicas en estado estacionario. Sin embargo, dado que se emplea el tratamiento con números complejos, se puede incurrir en variados errores. A continuación se mencionan los más frecuentes.

Error 1 Sumar números complejos en su magnitud. Este error común puede evitarse considerando que los números complejos son elementos que poseen una magnitud y una fase asociada; en consecuencia **la suma de dos números complejos no corresponde a la suma de sus magnitudes**, salvo que ambos números complejos posean el mismo ángulo.

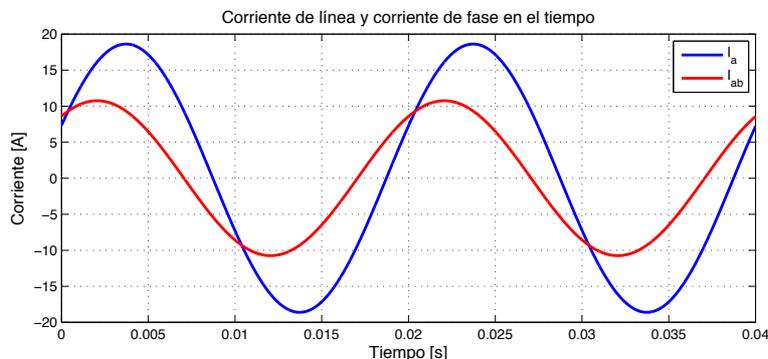


Figura 1.1: Diagrama temporal para las corrientes de línea $i_a(t)$ y por fase en la carga $i_{ab}(t)$.

Error 2 División o multiplicación incorrecta por el factor $\sqrt{3}$ para la conversión de las magnitudes de corrientes de fase a corrientes de línea y viceversa.

Error 3 Errores en las amplitudes del gráfico 1.1. Las amplitudes obtenidas para dicho gráfico constituyen las amplitudes obtenidas para las transformadas fasoriales inversas. Cabe destacar que las transformadas fasoriales de las tensiones y corrientes se trabajan en su valor efectivo, por lo que al traspasar la variable al tiempo debe escalarse por un factor de $\sqrt{2}$ para obtener la amplitud correcta.

Error 4 Errores en el cálculo complejo de la corriente de línea \dot{I}_a . La probabilidad de cometer esos errores se puede disminuir siendo rigurosos en la notación y procediendo de la forma más ordenada posible.

Una variante de interés

Una variante de interés al problema propuesto es considerar un esbozo del diagrama fasorial de las tensiones y corrientes resultantes del circuito propuesto en el ejercicio anterior. Esto permitirá obtener una idea de la distribución fasorial de una red trifásica delta alimentando una carga en delta.

Inicialmente, se dibujan los fasores correspondientes a las tensiones de línea, tal como se expresan en las ecuaciones (1.7) a (1.9). Luego, se procede a dibujar las corrientes por fase en la carga dadas por (??) a (1.16) y, finalmente, se esbozan las corrientes de línea descritas en las ecuaciones (1.18), (1.22) y (1.23). Lo anterior entrega el diagrama fasorial presentado en la figura 1.2.

En la figura 1.2 es posible apreciar que, en este caso, la corriente de fase en la carga adelanta a la correspondiente tensión entre líneas suministrada a la red. Esto siempre se cumple para carga capacitiva (parte imaginaria negativa), pues esta última característica introduce un atraso de la tensión con respecto

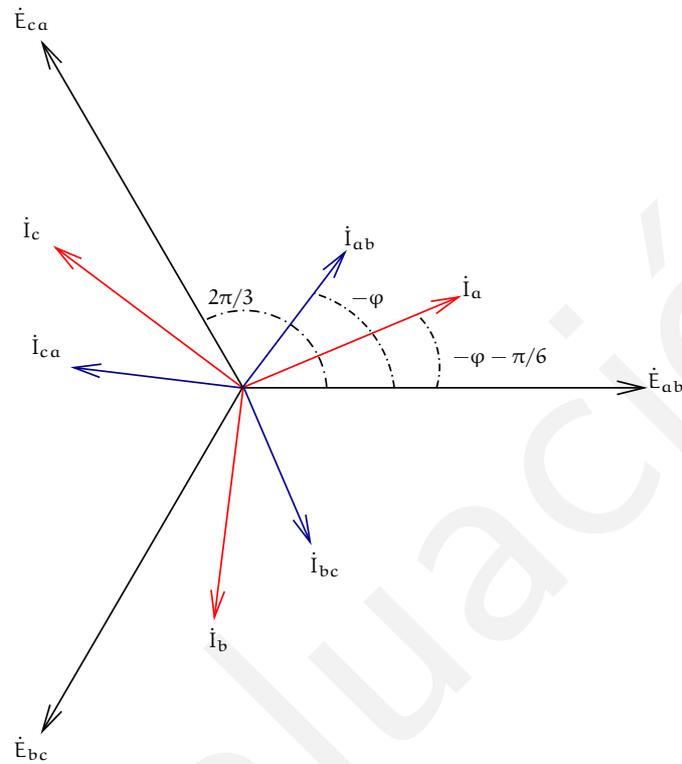


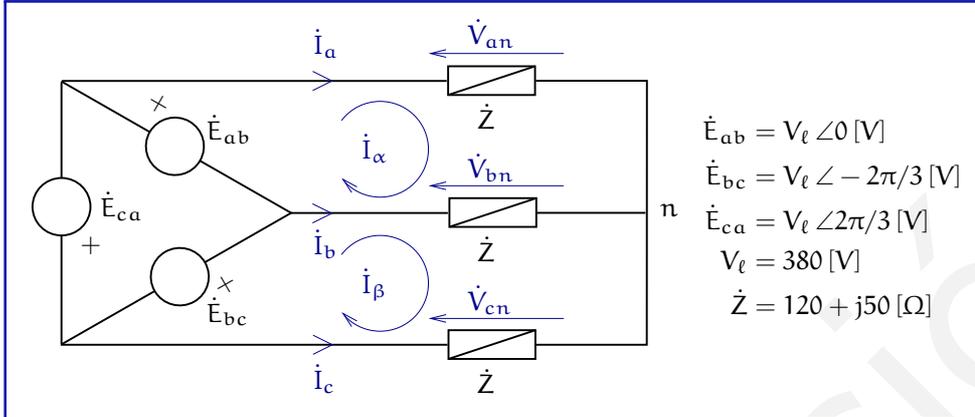
Figura 1.2: Diagrama fasorial de las tensiones de línea, corrientes por fase en la carga y las corrientes de línea calculadas en el ejercicio original.

a la corriente. Sin embargo, el desfase de la correspondiente corriente de línea puede ser positivo o negativo dependiendo del signo de $-\varphi < \pi/6$.

1.2.2. Conexión de carga equilibrada en estrella con red de alimentación en delta.

Problema 1.2.

La red presentada a continuación constituye una de las conexiones utilizadas en las redes eléctricas industriales.



Considere la red de alimentación trifásica con una carga equilibrada conectada en estrella, tal como se presenta en la figura precedente. La red de alimentación es de 380 [V] efectivos entre líneas, con una frecuencia de 50 [Hz]. Por su parte, la carga tiene una impedancia de $\dot{Z} = 120 + j50$ [Ω]/φ a dicha frecuencia de operación.

En este caso también se considera un generador con secuencia positiva.

1.2.1 Determine la relación entre las magnitudes de la tensión entre líneas V_ℓ y la tensión por fase en la carga V_{fn} .

1.2.2 Calcule la potencia aparente entregada a la carga trifásica, la que se denota por $\dot{P}_{ap3\phi}$.

Solución

Para responder a la primera pregunta se puede aplicar el método de mallas, lo cual resulta en

$$\begin{bmatrix} 2\dot{Z} & -\dot{Z} \\ -\dot{Z} & 2\dot{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_\alpha \\ \dot{I}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{ab} \\ \dot{E}_{bc} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Despejando \dot{I}_α y \dot{I}_β en (1.24), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_\alpha \\ \dot{I}_\beta \end{bmatrix} = \frac{1}{3\dot{Z}^2} \begin{bmatrix} 2\dot{Z} & \dot{Z} \\ \dot{Z} & 2\dot{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_{ab} \\ \dot{E}_{bc} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Entonces, a partir de (1.25), se deduce que

$$\dot{I}_\alpha = \frac{2}{3\dot{Z}} \dot{E}_{ab} + \frac{1}{3\dot{Z}} \dot{E}_{bc} \quad (1.26)$$

Además se sabe que $\dot{V}_{an} = \dot{I}_\alpha \cdot \dot{Z}$. Empleando (1.26), se obtiene

$$\dot{V}_{an} = \dot{I}_\alpha \cdot \dot{Z} = \frac{2}{3} \dot{E}_{ab} + \frac{1}{3} \dot{E}_{bc} \quad (1.27)$$

Por otro lado, un LVK sobre la red trifásica de alimentación permite establecer que $\dot{E}_{ab} = -(\dot{E}_{bc} + \dot{E}_{ca})$. Reemplazando esta última igualdad en (1.27), resulta

$$\dot{V}_{an} = \frac{1}{3}\dot{E}_{ab} + \frac{1}{3}\dot{E}_{bc} - \frac{1}{3}(\dot{E}_{bc} + \dot{E}_{ca}) = \frac{1}{3}(\dot{E}_{ab} - \dot{E}_{ca}) \quad (1.28)$$

El desarrollo de la expresión expuesta en (1.28) conduce a

$$\dot{V}_{an} = \frac{380}{3} \left(1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (1.29)$$

De una manera similar, y usando la característica de secuencia positiva, es posible establecer que

$$\dot{V}_{an} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -\pi/6 \quad (1.30)$$

$$\dot{V}_{bn} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -\pi/6 - 2\pi/3 \quad (1.31)$$

$$\dot{V}_{cn} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -\pi/6 + 2\pi/3 \quad (1.32)$$

Los resultados expuestos en (1.30) a (1.32) demuestran que la relación entre las magnitudes de las tensiones de fase (V_{fn}) y las tensiones de línea (V_ℓ) está dada por

$$V_\ell = \sqrt{3}V_{fn} \quad (1.33)$$

En este caso, la relación (1.33) es válida debido a la presencia de una carga equilibrada en la red trifásica. **El resultado expuesto deja de ser válido cuando la carga conectada difiere en magnitud y/o en fase para cada una de las líneas, dando lugar a resultados diferentes.**

Un análisis gráfico de lo expresado en las igualdades (1.30) a (1.32) es presentado en la figura 1.3. En ella se observa que **las tensiones de línea adelantan a las tensiones de fase en la carga.**

Al evaluar numéricamente la tensión de fase en la carga, se obtiene

$$V_{an} = V_{bn} = V_{cn} = \frac{380}{\sqrt{3}} \approx 220 \text{ [V]} \quad (1.34)$$

El valor de tensión calculado en (1.34) corresponde al valor nominal de la tensión efectiva domiciliaria en Chile. Sin embargo, **la carga trifásica que representan los hogares es desequilibrada.** Por ello no se puede analizar como la red de este ejercicio. Para esa situación son válidos los resultados del análisis que se hace en la sección 1.3.1.

El cálculo de la potencia aparente consumida por la carga trifásica se puede obtener considerando la potencia aparente en una sola fase, para luego obtener

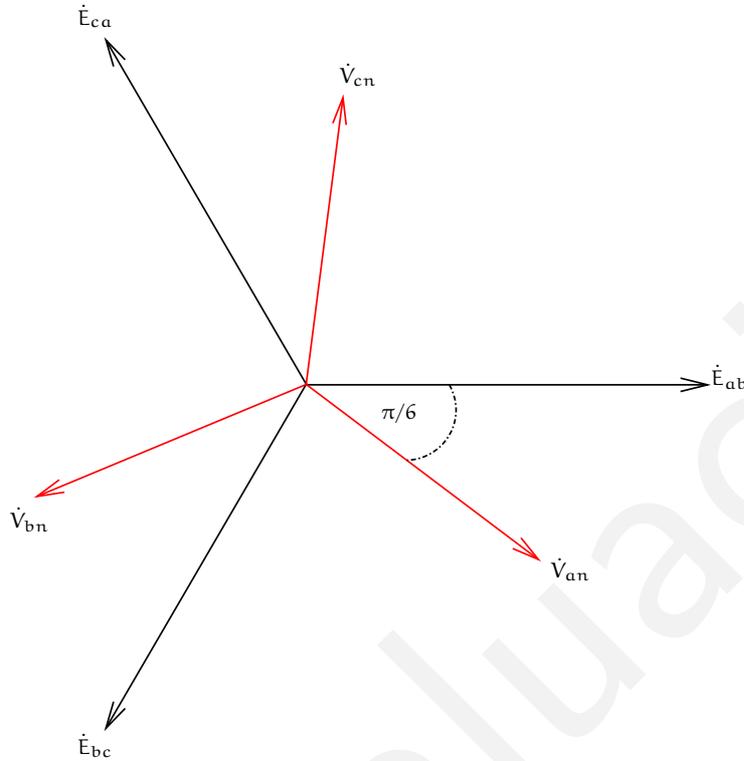


Figura 1.3: Diagrama fasorial de las tensiones de línea y las tensiones de fase en el problema analizado.

la potencia aparente total multiplicando el resultado por 3, es decir, la relación de potencia aparente trifásica $\dot{P}_{ap_{3\phi}}$ con la potencia aparente monofásica $\dot{P}_{ap_{\phi}}$ en una carga equilibrada está dada por

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = 3 \dot{P}_{ap_{\phi}} \quad (1.35)$$

La potencia aparente para la fase a (o la fase b, o la fase c) se calcula según

$$\dot{P}_{ap_{\phi}} = \dot{V}_{an} \cdot \dot{I}_a^* = \frac{V_{an}^2}{Z^*} = \frac{V_{\ell}^2}{3Z^*} \quad (1.36)$$

El resultado alcanzado en (1.36) conduce a que la potencia aparente trifásica para esta red esté definida como

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = 3 \dot{P}_{ap_{\phi}} = \frac{V_{\ell}^2}{Z^*} = \frac{V_{\ell}^2}{Z} \angle \varphi = I_{\ell}^2 Z \angle \varphi \quad (1.37)$$

donde $I_a = I_b = I_c = I_\ell$. El símbolo I_ℓ se reserva normalmente para denotar la magnitud de las corrientes de líneas en un sistema balanceado.

Una forma más conveniente para expresar la misma potencia aparente en la red trifásica es considerando la igualdad (1.33) en (1.36), lo cual conduce a

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = \sqrt{3} V_\ell I_\ell \angle \varphi = \sqrt{3} V_\ell I_\ell \cos \varphi + \sqrt{3} V_\ell I_\ell \text{seno } \varphi \quad (1.38)$$

La expresión (1.38) puede ser empleada para el cálculo de la potencia aparente trifásica en cualquier red que posea cargas trifásicas equilibradas.

Así, las potencias activa y reactivas trifásicas están dadas por

$$P_{act_{3\phi}} = \sqrt{3} V_\ell I_\ell \cos \varphi \quad (1.39)$$

$$P_{react_{3\phi}} = \sqrt{3} V_\ell I_\ell \text{seno } \varphi \quad (1.40)$$

Al evaluar (1.37) se obtiene

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = \frac{380^2}{120 - j50} = \frac{380^2}{16900} (120 + j50) = 1110,7 \angle \arctan(5/12) \text{ [VA]} \quad (1.41)$$

Un rasgo clave de las relaciones precedentes es que la potencia aparente trifásica compleja tiene el mismo ángulo que el ángulo de la impedancia en cada fase de la carga. Así, el factor de potencia trifásico es el mismo que el de cada fase, lo cual es intuitivamente esperable.

Errores

La red analizada en este problema puede dar lugar a errores de tipo conceptual. A continuación se presentan los más frecuentes.

Error 1 Transformación incorrecta entre las magnitudes de las tensiones entre línea y de fase. El factor $\sqrt{3}$ divide a la tensión de línea para dar lugar a la tensión de fase, por ende, **siempre se cumplirá que la tensión de fase es menor en magnitud a la tensión entre líneas.**

Error 2 Suma de magnitudes de números complejos. Este error, a pesar de que es básico, se comete normalmente, pues se trata de operar como si fuesen números reales, siendo que éstos se encuentran definidos mediante una parte real y una imaginaria. En consecuencia, la magnitud de la suma de dos números complejos no corresponde a la suma de sus magnitudes, a menos que éstos se encuentren en fase.

Error 3 Cálculos de potencias aparentes en forma incorrecta. Los errores más frecuentes asociados a este cálculo se encuentran en la definición dada en (1.36), pues se olvida comúnmente conjugar la expresión de corriente o que se opera en base a números complejos.

Error 4 Determinación de la potencia trifásica aparente en cargas desequilibradas utilizando (1.37). El resultado expuesto sólo es aplicable a cargas equilibradas, pues, en el caso de cargas desequilibradas, la potencia aparente trifásica corresponde a la suma compleja de las potencias aparentes por carga, las cuales no necesariamente resultarán de la misma magnitud y fase.

Una variante de interés

Una variante al problema del cálculo de la potencia aparente trifásica es utilizar la expresión (1.38). Para ello es necesario conocer en forma explícita las corrientes de línea presentes en la red trifásica. Tomando los datos del problema, la corriente de línea en la fase α corresponde a

$$\dot{I}_\alpha = \frac{\dot{V}_{an}}{\dot{Z}} = \frac{220}{120 + j50} = 0,13 (12 - j5) \quad (1.42)$$

Por lo tanto, la potencia aparente entregada a la carga trifásica corresponde a

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,13 (12 + j5) = 85,56 (12 + j5) \quad (1.43)$$

Estos cálculos llevan a

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = 1112,3 \angle \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \text{ [VA]} \quad (1.44)$$

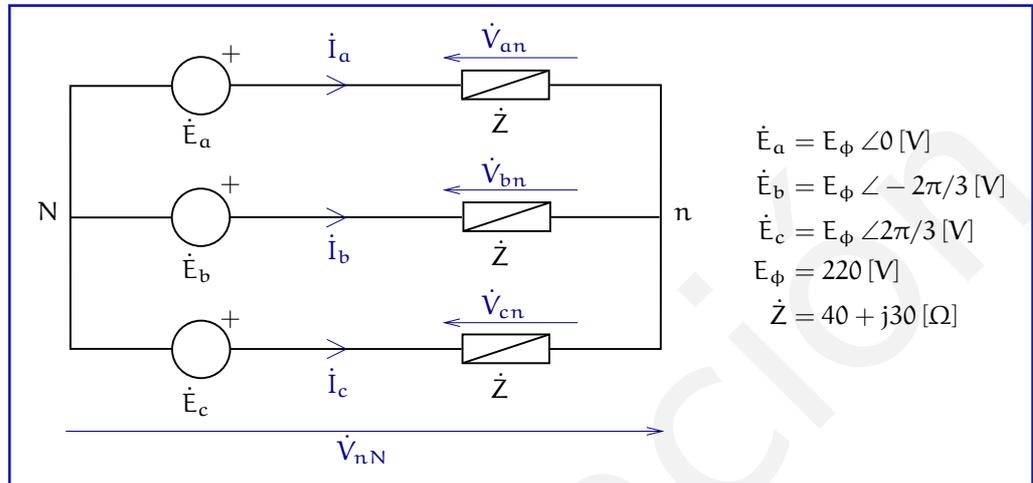
El resultado expuesto en (1.44) coincide con el presentado en (1.41), salvo pequeñas diferencias por redondeos numéricos.

El calcular la potencia trifásica aparente compleja, usando la suma algebraica de las potencias aparentes complejas por fase siempre sentido, aunque la carga sea desequilibrada. Esta afirmación se sustenta en que ella corresponde sólo a la aplicación del principio de Tellegen.

1.2.3. Conexión de carga equilibrada en estrella con generador de alimentación en estrella.

Problema 1.3.

El siguiente ejercicio analizará un sistema trifásico en el que tanto el generador como la carga conectada se encuentran en una configuración estrella. Esta configuración, a la cual se agrega un cuarto conductor, el neutro, es lo que se encuentra en el sistema de distribución de energía domiciliaria.



En este caso, también se ha considerado el caso de un generador con secuencia positiva.

Considere la red de la figura, donde tanto el generador trifásico, como la carga equilibrada se encuentran en configuración estrella.

- 1.3.1** Determine las tensiones en la carga \dot{V}_{an} , \dot{V}_{bn} , \dot{V}_{cn} y la tensión entre neutros \dot{V}_{nN} .
- 1.3.2** Calcule las corrientes por fase en la carga \dot{I}_a , \dot{I}_b , \dot{I}_c .
- 1.3.3** Calcule la potencia aparente trifásica, $\dot{P}_{ap_{3\phi}}$.

Solución

A fin de determinar las tensiones aplicadas a cada una de las cargas conectadas, es conveniente transformar las fuentes de tensión a sus equivalentes fuentes de corriente. La figura 1.4 presenta la red equivalente al efectuar la conversión de fuente de tensión a fuente de corriente según

Una fuente de tensión conectada en serie a una impedancia es equivalente a una fuente de corriente en paralelo con la misma impedancia.

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} \quad (1.45)$$

Adicionalmente, resulta práctico introducir la siguiente notación

$$\dot{a} = 1 \angle 2\pi/3 \quad (1.46)$$

$$\dot{a}^2 = 1 \angle -2\pi/3 \quad (1.47)$$

Tomando la definición efectuada en (1.46) y (1.47) es posible demostrar que

$$1 + \dot{a} + \dot{a}^2 = 0 \quad (1.48)$$

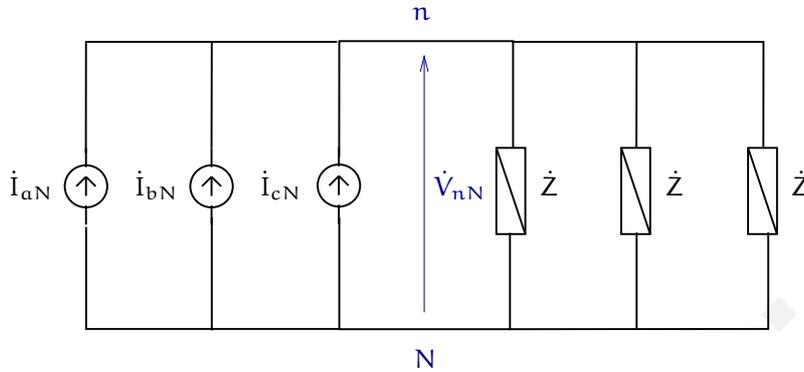


Figura 1.4: Red trifásica equivalente a la presentada en el problema original.

Aplicando (1.45) a cada una de las fases (y utilizando las definiciones (1.46) y (1.47)), se obtiene

$$\dot{I}_{aN} = \frac{\dot{E}_a}{\dot{Z}} \quad (1.49)$$

$$\dot{I}_{bN} = \frac{\dot{E}_b}{\dot{Z}} = \frac{\dot{a}^2 \dot{E}_a}{\dot{Z}} \quad (1.50)$$

$$\dot{I}_{cN} = \frac{\dot{E}_c}{\dot{Z}} = \frac{\dot{a} \dot{E}_a}{\dot{Z}} \quad (1.51)$$

Por otro lado, la impedancia equivalente en paralelo a las tres fuentes de corriente corresponde a

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}}{3} \quad (1.52)$$

En tanto, la corriente total entregada a la impedancia equivalente corresponde a

$$\dot{I}_{eq} = \dot{I}_{aN} + \dot{I}_{bN} + \dot{I}_{cN} = (1 + \dot{a} + \dot{a}^2) \frac{\dot{V}_{aN}}{\dot{Z}} = 0 \quad (1.53)$$

En consecuencia, la tensión entre neutros \dot{V}_{nN} queda definido según

$$\boxed{\dot{V}_{nN} = \dot{I}_{eq} \cdot \dot{Z}_{eq} = 0} \quad (1.54)$$

Por ende, dado que la tensión entre neutros es nula, los nodos n y N pueden ser conectados por un cable ideal o neutro, sin que por él fluya corriente eléctrica y, por lo tanto, sin alterar los valores de las demás variables de la red. El hecho de que la red no experimente cambios en su comportamiento por la presencia de un cable de conexión entre estos nodos se debe a que las cargas conectadas a la red trifásica son equilibradas. Sin embargo, en la práctica, las redes domiciliarias

trabajan bajo un régimen de alimentación en el que cada hogar recibe una de las líneas (a, b o c) y el neutro, y como las cargas conectadas a cada una de las fases no serán iguales, se producen desbalances en las corrientes de las líneas. Este desbalance se expresa en una corriente en el neutro, de amplitud diferente de cero.

Así, tanto con carga equilibrada como con carga desequilibrada, vemos que al conectar el neutro entre los nodos n y N, cada una de las cargas queda conectada directamente a su respectiva fuente de alimentación monofásica, obteniéndose entonces que

$$\dot{E}_a = \dot{V}_{an} \quad (1.55)$$

$$\dot{E}_b = \dot{V}_{bn} \quad (1.56)$$

$$\dot{E}_c = \dot{V}_{cn} \quad (1.57)$$

La única diferencia entre los casos de carga equilibrada y desequilibrada, es que en el primer caso, la corriente por el neutro es siempre cero; en el segundo caso, en general, eso no es así.

Utilizando los resultados expuestos en (1.55) a (1.57) para calcular las corrientes de fase, se obtiene

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{V}_{aN}}{\dot{Z}} = \frac{220}{40 + j30} = \frac{22}{5} \angle -\arctan\left(\frac{3}{4}\right) \text{ [A]} \quad (1.58)$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{V}_{bN}}{\dot{Z}} = \frac{220 \angle -2\pi/3}{40 + j30} = \frac{22}{5} \angle -2\pi/3 - \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \text{ [A]} \quad (1.59)$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{V}_{cN}}{\dot{Z}} = \frac{220 \angle 2\pi/3}{40 + j30} = \frac{22}{5} \angle 2\pi/3 - \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \text{ [A]} \quad (1.60)$$

Los resultados expuestos en las expresiones (1.58) a (1.60) concuerdan en que el desfase entre la tensión de fase y la corriente por fase en la carga (que es equivalente a la corriente de línea) está dado por el ángulo de fase presentado por la impedancia conectada a cada una de las fases.

Para calcular la potencia aparente trifásica, se puede proceder de manera similar a la forma ilustrada en la sección 1.2.2, pues, dado que se trata de una carga equilibrada, la potencia aparente trifásica corresponderá a

$$\dot{P}_{ap3\phi} = 3\dot{P}_{ap\phi} \quad (1.61)$$

La potencia aparente por fase puede ser calculada con cualquiera de las tres fases, ya que el resultado obtenido siempre será el mismo. También se cumple que $I_a = I_b = I_c = I_\ell$.

En donde $\dot{P}_{ap\phi}$ corresponde a la potencia aparente por fase, la cual queda determinada según

$$\dot{P}_{ap\phi} = \dot{E}_a \cdot \dot{I}_a^* = \dot{E}_b \cdot \dot{I}_b^* = \dot{E}_c \cdot \dot{I}_c^* = E \cdot I_\ell \angle \varphi \quad (1.62)$$

Donde $\varphi = \arctan(3/4)$ es el ángulo de la impedancia. Se sabe además que $V_\ell = \sqrt{3} \cdot E$, por lo que (1.62) resulta en

$$\dot{P}_{ap\phi} = \frac{V_\ell}{\sqrt{3}} \cdot I_a \angle \varphi = \frac{V_\ell}{\sqrt{3}} \cdot I_\ell \angle \varphi \quad (1.63)$$

Reemplazando (1.63) en (1.61) resulta

$$\dot{P}_{\text{ap}3\phi} = 3 \frac{V_\ell}{\sqrt{3}} \cdot I_\ell \angle \alpha = \sqrt{3} V_\ell \cdot I_\ell \angle \varphi \quad (1.64)$$

Por lo tanto, la potencia aparente trifásica se puede calcular según

$$\dot{P}_{\text{ap}3\phi} = \sqrt{3} V_\ell \cdot I_\ell \angle \varphi \quad (1.65)$$

El resultado que aparece en (1.65) es idéntico al obtenido en (1.38). Lo anterior no constituye una coincidencia, pues puede demostrarse que **la potencia aparente trifásica puede calcularse según (1.64) para cualquier red trifásica, siempre y cuando la carga conectada a la red sea equilibrada.**

Para el problema en análisis, la potencia aparente trifásica se puede evaluar numéricamente según

$$\dot{P}_{\text{ap}3\phi} = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot \frac{22}{5} \angle \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 2896 \angle \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \text{ [VA]} \quad (1.66)$$

En consecuencia, la red trifásica presentada en este problema conserva algunas características de las redes trifásicas anteriormente estudiadas. Puesto que todas ellas consideran cargas trifásicas equilibradas, se mantienen intactas las expresiones que permiten calcular la potencia aparente trifásica y las relaciones entre las tensiones de fase y de línea en la carga.

Una observación de utilidad práctica es que, cuando tanto el generador como la carga están en estrellas equilibradas, **el problema de análisis se reduce a resolver un problema monofásico.** En efecto, de (1.54) se tiene que la tensión entre los nodos N y n es cero; así, podemos considerar el problema monofásico que se muestra en la figura

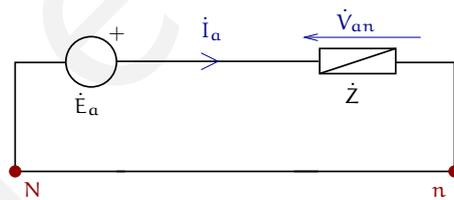


Figura 1.5: Red monofásica para analizar redes 3 ϕ equilibradas en configuración Δ - Δ .

En la Figura 1.5 se ha agregado un conductor que une los nodos N y n, de modo de capturar la idea que $V_{Nn} = 0$. Entonces se aprecia que

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{E}_{aN}}{Z} \quad (1.67)$$

Las otras corrientes se deducen directamente, conociendo la secuencia del generador. Esta idea se puede generalizar para tratar redes equilibradas en la que hay cargas trifásicas (equilibradas) en paralelo, como se muestra en la siguiente figura

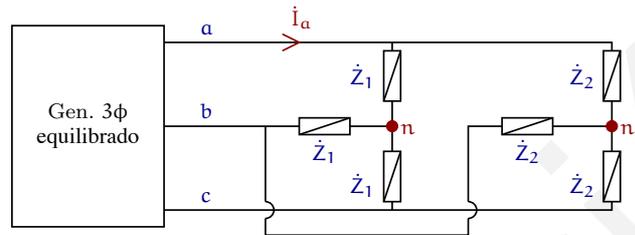


Figura 1.6: Red 3 ϕ equilibrada con cargas en configuración estrella y en paralelo.

Suponemos que se conocen la tensión entre líneas V_ℓ , así como \dot{Z}_1 y \dot{Z}_2 . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el generador está conectado en estrella, donde la tensión en cada fase es $E_\phi = V_\ell/\sqrt{3}$. Además, resulta directo demostrar que la diferencia de tensión los nodos n y n' es cero. Así el equivalente monofásico resulta

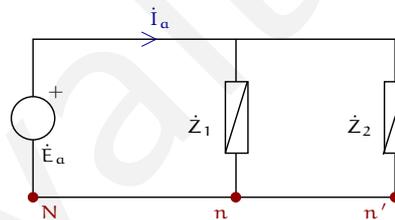


Figura 1.7: Equivalente monofásico para red 3 ϕ equilibrada con cargas en configuración estrella y en paralelo.

De esta figura se deduce directamente que

$$I_a = E_a \left| \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \right| \quad (1.68)$$

donde $E_a = E_\phi$.

Errores

El problema propuesto en esta sección puede dar origen a errores tanto de análisis como de cálculo propiamente tal. A continuación se mencionan los más frecuentes.

Error 1 Considerar que la tensión aplicada a la carga corresponde a la tensión entre líneas y no a la tensión entre fases. Este error puede ser evitado si se considera a cada fase de la red como independiente de las restantes, mediante un cortocircuito entre los nodos n y N .

Error 2 Manipulación errada con números complejos. Si bien se ha insistido en las secciones anteriores en este error, no deja de ser importante mencionar que la gran fuente de errores de cálculo se encuentra en efectuar una operatoria errada con números complejos.

Error 3 Calcular la potencia aparente de la red trifásica como si fuese la potencia aparente por fase. Dado que se está analizando la red trifásica en su totalidad, **la potencia aparente trifásica corresponde a la suma compleja de las potencias aparentes presentes en cada una de las fases.**

Error 4 Transformación incorrecta desde fuentes de tensión a fuentes de corriente. Para evitar este error se debe considerar que una fuente de tensión \dot{V} en serie con una impedancia \dot{Z} es equivalente a una fuente de corriente \dot{V}/\dot{Z} en paralelo a la misma impedancia.

Una variante de interés

Considere el sistema 3ϕ original. Suponga luego que las líneas de alimentación no son ideales, ya que cada una de ellas tiene una impedancia $\dot{Z}_\ell = 2\angle 0$. Entonces se pide calcular lo siguiente

1.3.4 Determine las magnitudes de las tensiones en cada fase de la carga original.

1.3.5 Calcule el porcentaje de la potencia activa entregada por el generador que es disipada en las líneas.

La situación queda descrita en la siguiente red

Al observar la red de la figura, se aprecia que el sistema trifásico sigue siendo equilibrado. Para respaldar esta afirmación basta considerar que el mismo generador equilibrado está alimentado una carga estrella, en la que la impedancia por fase es ahora $\dot{Z} + \dot{Z}_\ell$. Así la tensión \dot{V}_{nN} sigue siendo cero, y la corriente de línea es

$$I_\ell = \frac{E}{|\dot{Z} + \dot{Z}_\ell|} = \frac{220}{\sqrt{(40+2)^2 + 30^2}} = 4,26 \text{ [A]} \quad (1.69)$$

Con este valor podemos calcular la magnitud de la tensión por fase en la carga $V_\phi = V_{aN} = V_{bN} = V_{cN}$, la que está dada por

$$V_\phi = I_\ell Z = 213 \text{ [V]} \quad (1.70)$$

También con el valor de I_ℓ podemos calcular la potencia disipada en cada impedancia de la carga original, $P_{\text{act}/\phi}$ y en cada línea, $P_{\text{act}/\ell}$, las que resulta ser

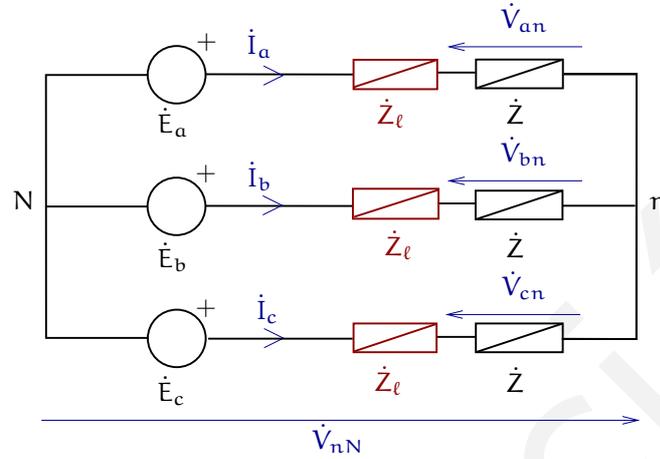


Figura 1.8: Red trifásica con líneas de impedancia \dot{Z}_ℓ .

$$P_{\text{act}/\phi} = I_\ell^2 Z \cos \varphi = 726 \text{ [W]}; \quad P_{\text{act}/\ell} = I_\ell^2 Z_\ell = 36,3 \text{ [W]} \quad (1.71)$$

En consecuencia, el porcentaje de potencia disipada (perdida) en las líneas es

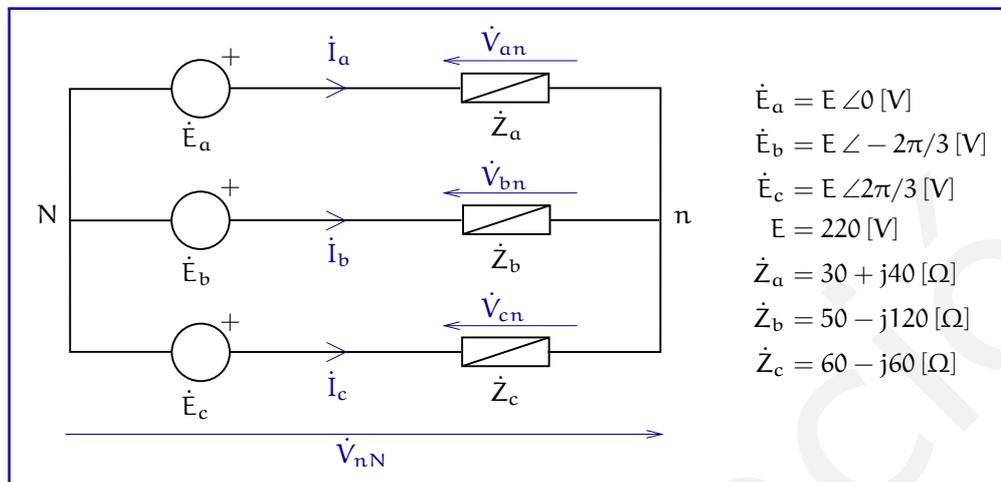
$$\frac{P_{\text{act}/\ell}}{P_{\text{act}/\ell} + P_{\text{act}/\phi}} \cdot 100\% = 4,76\%$$

1.3. Análisis de redes trifásicas desequilibradas.

1.3.1. Conexión de carga desequilibrada en estrella con generador equilibrado en estrella.

Problema 1.4.

En el problema propuesto en esta sección se analizará el comportamiento de la red trifásica cuando se conectan cargas desequilibradas. Éste es un ejercicio para entender las diferencias entre el caso equilibrado y el caso desequilibrado, más que para ilustrar un caso real. En la práctica, cuando se sabe que la carga es desequilibrada, siempre se conectará un neutro, para asegurar que cada fase de la carga es alimentada con una tensión que no es afectada mayormente cuando hay cambios en las impedancias de las otras fases. Cuando no existe neutro, se habla de neutro flotante.



Considere la red trifásica de la figura, en donde el generador trifásico es equilibrado, en tanto que la carga trifásica conectada a la red no lo es. Nuestro propósito será analizar el comportamiento de las variables eléctricas en este nuevo marco de trabajo.

- 1.4.1 Determine las tensiones por fase en la carga, \dot{V}_{an} , \dot{V}_{bn} y \dot{V}_{cn} , y las corrientes de línea \dot{I}_a , \dot{I}_b e \dot{I}_c .
- 1.4.2 Calcule las potencias aparentes por fase y la potencia aparente trifásica $\dot{P}_{ap3\phi}$.
- 1.4.3 ¿Qué ocurre si se conecta un conector entre los nodos n y N (forzando así a que $\dot{V}_{nN} = 0$)?

*En lo sucesivo nos referiremos a los nodos n y N como **nodos-neutros**.*

Solución

Para efectuar un análisis detallado de la red trifásica presentada, es necesario conocer la tensión entre nodos-neutros, \dot{V}_{nN} , lo cual se puede lograr a través de la transformación de fuentes de tensión a fuentes de corriente presentada en la sección 1.2.3. En este caso, las fuentes de corriente equivalentes por fase están descritas por

$$\dot{I}_{aN} = \frac{\dot{E}_a}{\dot{Z}_a} \quad (1.72)$$

$$\dot{I}_{bN} = \frac{\dot{E}_b}{\dot{Z}_b} = \frac{a^2 \dot{E}_a}{\dot{Z}_b} \quad (1.73)$$

$$\dot{I}_{cN} = \frac{\dot{E}_c}{\dot{Z}_c} = \frac{\dot{a} \dot{E}_a}{\dot{Z}_c} \quad (1.74)$$

La red resultante, después de esta transformación queda como se muestra en la Figura 1.11

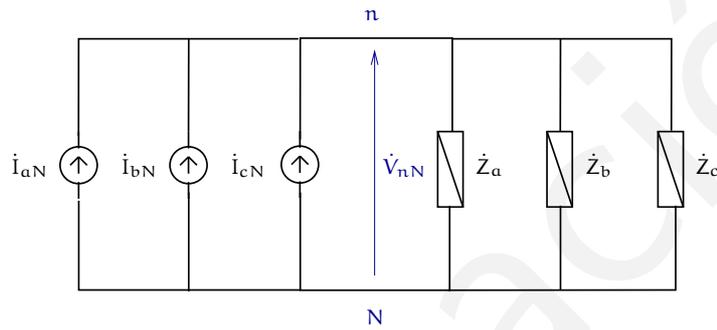


Figura 1.9: Red equivalente del sistema trifásico desequilibrado en la carga.

De la Figura 1.11 se aprecia que la fuente de corriente equivalente dada por

$$\dot{I}_{eq} = \frac{\dot{E}_a \dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{E}_b \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{E}_c \dot{Z}_a \dot{Z}_b}{\dot{Z}_a \dot{Z}_b \dot{Z}_c} \quad (1.75)$$

Recordamos que $\dot{a} = 1 \angle 2\pi/3$.

Tras una simplificación, esta fuente de corriente resulta en

$$\dot{I}_{eq} = \dot{E}_a \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{a}^2 \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{a} \dot{Z}_a \dot{Z}_b}{\dot{Z}_a \dot{Z}_b \dot{Z}_c} \quad (1.76)$$

Evaluando numéricamente el resultado expuesto en (1.76), se obtiene

$$\dot{I}_{eq} = (5,29 - j19,06) \cdot 10^{-3} \dot{E}_a = 1,163 - j4,194 \text{ [A]} \quad (1.77)$$

Por otro lado, cuando se considera el equivalente desarrollado con fuentes de corriente, la impedancia equivalente que representa al conjunto de las tres fases está dado por

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_a \dot{Z}_b \dot{Z}_c}{\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{Z}_b \dot{Z}_c} \quad (1.78)$$

Al evaluar numéricamente el resultado en (1.78) se obtiene

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{14460}{337} + j \frac{2460}{2359} \text{ [\Omega]} \quad (1.79)$$

En consecuencia, la tensión entre nodos-neutros está definida como

$$\begin{aligned}\dot{V}_{nN} = \dot{I}_{eq} \dot{Z}_{eq} &= (1,163 - j4,194) \left(\frac{14460}{337} + j \frac{2460}{2359} \right) \\ &= 54,276 - j178,73 \text{ [V]} \quad (1.80)\end{aligned}$$

El mismo resultado presentado en (1.80) puede ser deducido directamente sin pasos intermedios y sólo conociendo las impedancias y la orientación de las tensiones de red. Al combinar (1.76) con (1.78) se obtiene

$$\dot{V}_{nN} = \dot{E}_a \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{a}^2 \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{a} \dot{Z}_a \dot{Z}_b}{\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{Z}_b \dot{Z}_c} \quad (1.81)$$

El resultado expuesto en (1.81) sólo tiene validez cuando la secuencia de las tensiones de la red está definida tal como se indica en el enunciado del problema (secuencia positiva). Cuando la secuencia de las tensiones es negativa, la tensión entre nodos-neutros está dada por

$$\dot{V}_{nN} = \dot{E}_a \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{a} \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{a}^2 \dot{Z}_a \dot{Z}_b}{\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{Z}_b \dot{Z}_c} \quad (1.82)$$

Con la secuencia negativa, la tensión entre nodos-neutros es distinta a la que resulta de la secuencia positiva. Al evaluar esta tensión, usando la ecuación (1.82), se llega a

$$\dot{V}_{nN} = 76,57 - j266,12 \quad (1.83)$$

Volviendo al caso de secuencia positiva, una vez calculada \dot{V}_{nN} . A partir de ese valor es posible calcular las tensiones de fase en la carga, las cuales están definidas como

$$\dot{V}_{an} = \dot{E}_a - \dot{V}_{nN} \quad (1.84)$$

$$\dot{V}_{bn} = \dot{E}_b - \dot{V}_{nN} \quad (1.85)$$

$$\dot{V}_{cn} = \dot{E}_c - \dot{V}_{nN} \quad (1.86)$$

De esta manera, la evaluación numérica de las expresiones (1.84) a (1.86) lleva a

$$\dot{V}_{an} = 220 - (54,276 - j178,73) = 165,72 + j178,73 \text{ [V]} \quad (1.87)$$

$$\dot{V}_{bn} = 220 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - (54,276 - j178,73) = -164,28 - j11,79 \text{ [V]} \quad (1.88)$$

$$\dot{V}_{cn} = 220 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - (54,276 - j178,73) = -164,28 + j369,26 \text{ [V]} \quad (1.89)$$

Los resultados expuestos en (1.87) a (1.89) demuestran que **las tensiones de fase en la carga no son equilibradas**. En efecto, las tensiones de fase en la carga difieren en su magnitud; así también, los ángulos de ellas no siguen el patrón simétrico que muestran los sistemas equilibrados de tensiones (y de corrientes).

Una manera de apreciar gráficamente la diferencia entre sistemas con carga equilibrada y con carga desequilibrada es un diagrama fasorial que representa las tensiones por fase en el generador y las tensiones por fase en la carga. La distribución de los fasores acorde a los resultados (1.90) a (1.92) y tomando en consideración las tensiones del sistema trifásico tal como se ilustran en el enunciado del problema, se presentan en la figura 1.10. La tensión \dot{V}_{nN} queda expuesta en forma gráfica mediante la diferencia espacial entre los puntos neutros de las tensiones por fase en la carga y las tensiones por fase en el generador.

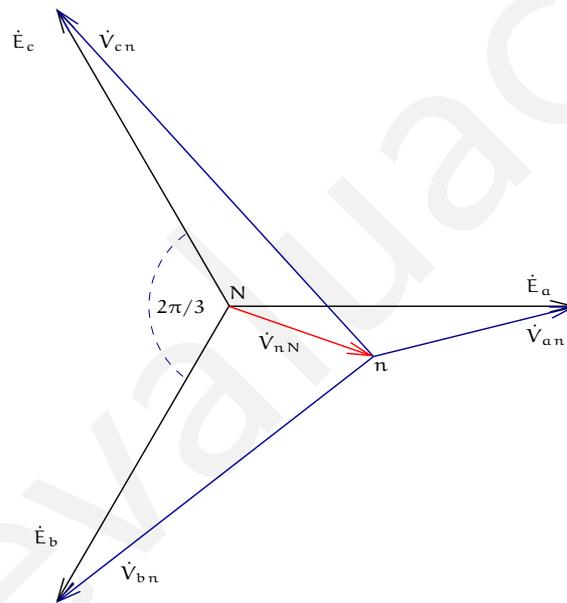


Figura 1.10: Diagrama fasorial de las tensiones de de fase en la carga y las tensiones de fase en la fuente de alimentación (se han distorsionado los ángulos de desfase para una mejor comprensión).

Para una mejor ilustración de lo dicho anteriormente, se expresarán los resultados expuestos anteriormente en forma polar, lo cual resulta en

$$\dot{V}_{an} = 243,74 \angle 47,15^\circ \text{ [V]} \quad (1.90)$$

$$\dot{V}_{bn} = 164,7 \angle -175,9^\circ \text{ [V]} \quad (1.91)$$

$$\dot{V}_{cn} = 404,15 \angle 113,96^\circ \text{ [V]} \quad (1.92)$$

Ahora bien, en base a los resultados expuestos, es posible calcular las corrientes de línea que circulan a través de cada una de las fases del sistema trifásico.

Así, se tiene entonces que

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{V}_{an}}{\dot{Z}_a} = 4,87 \angle 47,15^\circ - \varphi_a \text{ [A]} \quad (1.93)$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{V}_{bn}}{\dot{Z}_b} = 1,27 \angle -175,9^\circ - \varphi_b \text{ [A]} \quad (1.94)$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{V}_{cn}}{\dot{Z}_c} = 4,76 \angle 113,96^\circ - \varphi_c \text{ [A]} \quad (1.95)$$

Donde $\varphi_a = \arctan(4/3)$, $\varphi_b = -\arctan(12/5)$ y $\varphi_c = -\arctan(1) = -45^\circ$.

Una vez calculadas las corrientes de línea y las tensiones por fase en la carga, es posible determinar la potencia aparente por fase que está presente en cada una de las cargas. En este caso, dado que las cargas son desequilibradas, **la potencia aparente por fase en la carga no será la misma en cada una de las cargas**; más aún, la potencia aparente presente en cada carga variará en magnitud y fase.

Al calcular la potencia aparente por fase, se obtiene

$$\dot{P}_{ap_a} = \dot{V}_{an} \dot{I}_a^* = 1187 \angle \varphi_a \text{ [VA]} \quad (1.96)$$

$$\dot{P}_{ap_b} = \dot{V}_{bn} \dot{I}_b^* = 209,17 \angle \varphi_b \text{ [VA]} \quad (1.97)$$

$$\dot{P}_{ap_c} = \dot{V}_{cn} \dot{I}_c^* = 1923,75 \angle \varphi_c \text{ [VA]} \quad (1.98)$$

Puede ocurrir que la potencia aparente presente en cada una de las cargas posea el mismo desfase, a pesar de tener diferente magnitud, lo cual permite efectuar la suma algebraica de las potencias complejas.

En consecuencia, la potencia aparente trifásica está dada por

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = \dot{P}_{ap_a} + \dot{P}_{ap_b} + \dot{P}_{ap_c} \quad (1.99)$$

Utilizando los resultados dados en (1.96) a (1.98) en (1.99) se obtiene:

$$\dot{P}_{ap_{3\phi}} = 2237,16 \angle -15,64^\circ \text{ [VA]} \quad (1.100)$$

El resultado obtenido en (1.100) ilustra la idea citada anteriormente: para cargas desequilibradas, la suma compleja de las potencias aparentes por fase no coincide con su suma algebraica, puesto que sus desfases son distintos. Este fenómeno que se ilustra es característico de los sistemas de distribución domiciliaria, puesto que cada una de las fases tiene cargas que muy rara vez poseen la misma magnitud y fase, por lo que potencialmente existe desequilibrio en las corrientes de línea, llegando a desequilibrar las tensiones por fase, tal como se ha ilustrado en este problema.

Sin embargo, la red de alimentación monofásica mantiene su tensión de fase en una magnitud de 220 [V] y completamente equilibrada gracias a la conexión del neutro. Esto significa que se extiende un conductor entre los nodos n y N, forzando a cero la tensión entre nodos-neutros. En consecuencia, **al conectar el neutro se logra forzar que la tensión de fase en la carga sea igual a la tensión de fase en el generador.**

Errores

El desarrollo del problema precedente puede originar una gran cantidad de errores tanto algebraicos como conceptuales a la hora de su desarrollo. A continuación, se mencionan los más frecuentes.

Error 1 Considerar que las tensiones por fase en la carga son iguales a las tensiones de fase en la fuente de alimentación. Dado que la carga conectada a la red trifásica es desequilibrada, **las tensiones por fase en la carga no corresponden a las tensiones por fase en la fuente de alimentación.** Este fenómeno se debe a que la tensión entre neutros \dot{V}_{nN} no es nula, por lo que no es posible aplicar esta igualdad.

Error 2 Calcular la potencia aparente trifásica según la expresión (1.64). Vale reforzar la idea que dicha expresión sólo es válida para el caso de cargas equilibradas. En el caso de cargas desequilibradas, la potencia aparente trifásica se debe calcular a partir de su definición, pues **la potencia aparente trifásica para cada fase difiere tanto en su magnitud como en su fase.**

Error 3 Considerar que la corriente a través del neutro (cuando se cortocircuitan los nodos n y N) es nula. Cuando se cortocircuitan los nodos anteriores, circulará una corriente no nula a través de dicho conductor, dado que las cargas son desequilibradas. **Sólo cuando las cargas son equilibradas, la corriente que circula a través del neutro es nula.**

Error 4 Dado que la operatoria con números complejos en este problema es bastante extensa, normalmente puede ocurrir algún error numérico. Esto puede reducirse efectuando operaciones en forma algebraica y reemplazando los términos numéricos en la expresión algebraica final.

Una variante de interés

Suponga que en la red trifásica se conecta un neutro, ¿cuál sería la corriente por ese neutro?. Si la secuencia fuese negativa, ¿sería esa corriente distinta?

Para responder a las preguntas, consideramos la red equivalente de la Figura 1.10, a la que agregamos el neutro, como se muestra en la Figura 1.11

De la misma figura se puede apreciar que el neutro tomará toda la corriente de la fuente equivalente, es decir

$$\dot{I}_n = \dot{I}_{eq} = 1,163 - j4,194 = 4,4 \angle -74,5^\circ \quad (1.101)$$

Note la diferencia con la ecuación 1.76

donde el valor de \dot{I}_{eq} ha sido obtenido de la ecuación 1.76. Si la secuencia fuese negativa, entonces la corriente \dot{I}_{eq} sería distinta y se debe calcular según la expresión

$$\dot{I}_{eq} = \dot{E}_a \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{a} \dot{Z}_a \dot{Z}_c + \dot{a}^2 \dot{Z}_a \dot{Z}_b}{\dot{Z}_a \dot{Z}_b \dot{Z}_c} = 1,6328 - j6,2418 = 6,5 \angle -75,3^\circ \quad (1.102)$$

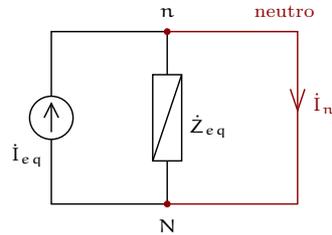


Figura 1.11: Equivalencia para una red trifásica con carga desequilibrada, y neutro conectado.

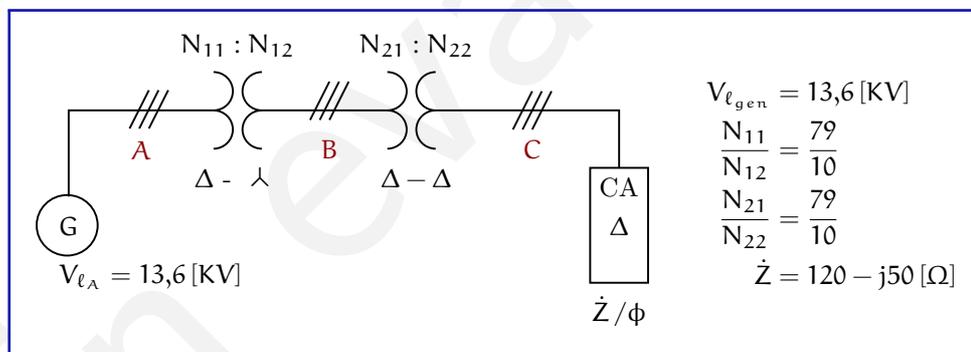
Se aprecia entonces que una secuencia distinta genera valores distintos de corrientes y tensiones

1.4. Transformadores trifásicos.

1.4.1. Análisis unilineal de la red trifásica equilibrada.

Problema 1.5.

En este problema se introduce la idea de los transformadores trifásicos y se utiliza la idea de los diagramas unilineales para describir sistemas trifásicos.



Considere el diagrama unilineal presentado en la figura, donde el generador trifásico equilibrado entrega una tensión entre líneas de magnitud 13,6 [KV], en tanto que la carga trifásica conectada a la red es equilibrada y se encuentra en conexión delta. Suponga que los transformadores trifásicos son ideales. Para describir las variables, se han identificado tres secciones o etapas de la red, separadas por los dos transformadores, con las letras A, B y C. Agregaremos la letra correspondiente a las variables de línea dependiendo del sector o etapa a que ellas se refieren.

- 1.5.1** Calcule las tensiones entre línea y las corrientes por fase en cada una de las secciones de transmisión.
- 1.5.2** Determine la potencia aparente suministrada a la carga.
- 1.5.3** ¿Qué sucede con la potencia aparente trifásica si se agrega una carga trifásica adicional en estrella, cuya impedancia por fase es de $\dot{Z}_2 = 40 + j30 [\Omega]$?

Solución

El diagrama unilineal que muestra la figura constituye una forma abreviada de describir las mismas características que se han expresado en ejercicios anteriores. Lo anterior permite simplificar la notación empleada, como asimismo la cantidad de ilustraciones que se necesitan para desarrollar el problema.

Para analizar la red es necesario primero establecer las tensiones de línea presentes en cada una de las etapas de transmisión. El primer transformador lleva a que la magnitud de la tensión por devanado en el secundario sea de

$$V_{\phi_B} = \frac{N_{12}}{N_{11}} V_{\ell_A} \quad (1.103)$$

Reemplazando los datos entregados en el enunciado en (1.103), se tiene que la tensión por fase en el secundario del primer transformador es de

$$V_{\phi_B} = \frac{10}{79} \cdot 13,6 [\text{KV}] \approx \sqrt{3} [\text{KV}] \quad (1.104)$$

Ahora bien, la tensión calculada en (1.104) es la tensión presente en los devanados del secundario del primer transformador y no la tensión entre líneas de dicho secundario. En consecuencia, una característica de los transformadores trifásicos es que la tensión no sólo se ve modificada por la relación de transformación, sino que también por la forma en la que se conectan entre sí los devanados.

Por lo tanto, la tensión presente en el primario del segundo transformador corresponde a la tensión entre líneas de la etapa intermedia, que se puede calcular como

$$V_{\ell_2} = \sqrt{3} V_{\phi_B} = 3 [\text{KV}] \quad (1.105)$$

Por lo tanto la tensión en cada uno de los devanados del secundario del segundo transformador está dada por

$$V_{\ell_C} = \frac{N_{22}}{N_{21}} V_{\ell_B} \quad (1.106)$$

Desarrollando (1.106) de acuerdo al problema, se obtiene

$$V_{\ell_c} = \frac{10}{79} \cdot 3 \text{ [KV]} \approx 380 \text{ [V]} \quad (1.107)$$

En este caso, la tensión de los devanados en el secundario corresponde también a la tensión entre líneas en la sección C.

Dado que la carga conectada a la red trifásica es equilibrada, entonces es posible emplear la relación (1.64) para determinar la potencia aparente entregada a la carga conectada a la red. Sin embargo, en dicha relación se debe conocer la magnitud de la corriente de línea presente en cada fase de la red. Lo anterior puede ser resuelto recordando que, en una carga delta, la relación entre la magnitud de las corrientes de fase I_ϕ y la magnitud de las corrientes de línea I_ℓ está dado por

$$I_\ell = \sqrt{3} I_\phi \quad (1.108)$$

Además, dado que la corriente por fase puede calcularse según

$$I_\phi = \frac{V_{\ell_c}}{Z} \quad (1.109)$$

La ecuación (1.108) sólo se cumple en el caso de que la carga conectada a la red trifásica sea equilibrada.

Entonces la ecuación (1.108) se transforma en

$$I_{\ell_c} = \sqrt{3} \frac{V_{\ell_c}}{Z} \quad (1.110)$$

Por tanto, un cálculo más directo puede ser obtenido tomando (1.110) y reemplazándola en (1.64), lo cual conduce a

$$P_{ap_{3\phi}} = 3 \frac{V_{\ell_c}^2}{Z} \quad (1.111)$$

La expresión (1.111) es una consecuencia directa del carácter equilibrado de la carga trifásica conectada, pues expresa que **la potencia aparente trifásica en una carga equilibrada corresponde a la suma algebraica de las potencias aparentes consumidas por fase**. Efectuando el cálculo respectivo en (1.111), se obtiene

$$P_{ap_{3\phi}} = 3 \frac{380^2}{\sqrt{120^2 + 50^2}} = 3,33 \text{ [KVA]} \quad (1.112)$$

Dado que los transformadores trifásicos son ideales, entonces se tendrá que la potencia aparente trifásica es la misma en cada etapa de transmisión. Por ende, es posible calcular directamente las corrientes de línea en cada una de las etapas en forma directa, sin necesidad de transformar las magnitudes de las corrientes en los diferentes tramos.

Así, en el caso de la última etapa de transmisión, la magnitud de la corriente de línea está dada por

$$I_{\ell_C} = \frac{P_{ap3\phi}}{\sqrt{3} V_{\ell_C}} = 5,06 \text{ [A]} \quad (1.113)$$

En el caso de la etapa intermedia, la corriente de línea se puede calcular como

$$I_{\ell_B} = \frac{P_{ap3\phi}}{\sqrt{3} V_{\ell_B}} = 0,641 \text{ [A]} \quad (1.114)$$

Finalmente, la corriente de línea en la primera etapa de transmisión es

$$I_{\ell_A} = \frac{P_{ap3\phi}}{\sqrt{3} V_{\ell_A}} = 0,141 \text{ [A]} \quad (1.115)$$

Como se puede apreciar en los resultados descritos, al elevar la tensión presente en las líneas de transmisión, se disminuye la corriente de línea, pues la potencia aparente es la misma en todas las etapas de transmisión.

Ahora bien, cuando se conecta una carga adicional en estrella, el cambio en la potencia aparente trifásica depende de la naturaleza de la carga conectada. No obstante, lo que siempre se cumplirá en sistemas trifásicos es que la potencia aparente total corresponde a la suma compleja de las potencias aparentes entregadas a cada una de las cargas.

Así, en el caso bajo análisis, la potencia aparente trifásica entregada a la carga adicional es de

$$\dot{P}_{ap3\phi} = 3 \frac{V_{\phi_C}^2}{Z_2} \angle \varphi_2 \quad (1.116)$$

La expresión (1.116) conduce a

$$\dot{P}_{ap3\phi_2} = 3 \frac{220^2}{\sqrt{40^2 + 30^2}} \angle \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 2,9 \angle \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \text{ [KVA]} \quad (1.117)$$

En consecuencia, la potencia aparente trifásica total que suministra el generador es

$$\dot{P}_{ap3\phi_T} = \dot{P}_{ap3\phi} + \dot{P}_{ap3\phi_2} = 5,39 + j0,46 \text{ [KVA]} = 5,41 \angle \arctan\left(\frac{46}{539}\right) \text{ [KVA]} \quad (1.118)$$

En este caso, tal como lo refleja el resultado expuesto en (??), la potencia aparente trifásica aumenta en comparación con la conseguida en el caso inicial. No obstante, existen casos particulares en los cuales es posible disminuir la potencia aparente suministrada compensando la parte imaginaria de la potencia aparente, proceso que se conoce como corrección del factor de potencia.

Errores

El ejercicio propuesto en esta sección es fuente común de errores analíticos y conceptuales, de los cuales se ilustrarán los más frecuentes.

Error 1 Confundir las tensiones de línea (o de fase) con las tensiones en los devanados de los transformadores. Si bien los transformadores están sometidos a tensiones de línea o de fase impuestas por la fuente de alimentación, la tensión que efectivamente se aplica sobre cada devanado depende directamente de la configuración que posea el transformador.

Error 2 Emplear incorrectamente las relaciones de transformación en los transformadores. Para evitar este error, se debe recordar que un transformador ideal cumple con mantener constante la potencia aparente; en consecuencia, un aumento de la tensión lleva a que la corriente asociada disminuya, por otro lado, si la tensión disminuye, necesariamente la corriente asociada al devanado debe aumentar.

Error 3 Intercambiar la relación entre la tensión entre líneas y la tensión de fase. Para evitar tal confusión, es práctico recordar que la tensión entre líneas posee una magnitud mayor a la tensión de fase, por lo que la relación que se cumple es la presentada en (1.29).

Error 4 Sumar la potencia aparente compleja de dos cargas con distinto desfase como suma algebraica. Dado que las impedancias poseen un desfase distinto, **no es posible efectuar una suma compleja de potencias aparentes como una suma algebraica, salvo que se cumpla que ambas impedancias poseen un desfase idéntico.** En este último caso, la suma de las magnitudes (manteniendo intacto el desfase) coincide con la suma compleja de las potencias aparentes.

Una variante de interés

Una alternativa de solución al problema de la potencia aparente trifásica cuando hay más de una carga conectada a la red consiste en encontrar una impedancia equivalente para el conjunto de cargas conectadas. Luego se procede con el cálculo de la potencia aparente trifásica. Esta equivalencia no puede efectuarse en forma idéntica al caso monofásico, pues las cargas pueden encontrarse conectadas en diferentes configuraciones; sin embargo, se aplica el mismo principio, es decir, dos redes son equivalentes cuando las relaciones entre las variables eléctricas (tensión y corriente) vistas desde el exterior son idénticas.

En consecuencia, la búsqueda de las impedancias equivalentes en las redes trifásicas analizadas deben cumplir con mantener la misma corriente de línea, dado que la tensión es impuesta por la fuente trifásica de alimentación.

Para lo anterior, se proponen las configuraciones estrella y delta que se presentan en la figura 1.12. Para el caso de las impedancias conectadas en estrella, se procederá a su estudio aplicando el método de mallas, en tanto que para las impedancias conectadas en delta se aplicará el método nodal, con el punto de referencia ilustrado como tierra en la figura.

Para encontrar la equivalencias entre ambas configuraciones, construiremos el modelo para cada una de ellas y luego determinaremos las relaciones entre las impedancias de las cargas trifásicas, igualando las ecuaciones obtenidas.

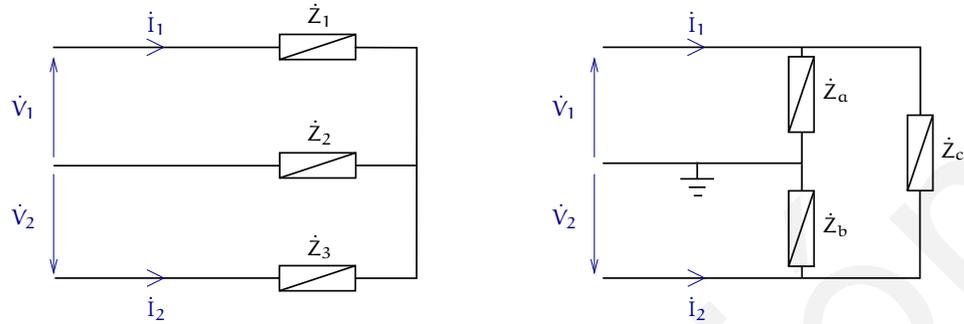


Figura 1.12: Cargas trifásicas conectadas en estrella (izquierda) y delta (derecha), utilizadas para la obtención de equivalencias.

De esta forma, al desarrollar el método de mallas sobre la configuración estrella, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 & \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_2 & \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \quad (1.119)$$

A su vez, aplicando el método nodal para el caso de las impedancias en delta, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_a + \dot{Y}_c & -\dot{Y}_c \\ -\dot{Y}_c & \dot{Y}_b + \dot{Y}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

Despejando las variables de corriente en (1.119), se obtiene

$$\frac{1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3} \begin{bmatrix} \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 & -\dot{Z}_2 \\ -\dot{Z}_2 & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

Dado que se desea que las variables \dot{I}_1 e \dot{I}_2 sean idénticas en ambos casos estudiados, se debe cumplir necesariamente que las matrices de admitancias definidas en (1.120) y (1.121) sean iguales. Por lo tanto, al desarrollar dichas igualdades, se obtienen las siguientes equivalencias de configuración estrella a delta:

$$\dot{Z}_a = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_3} \quad (1.122)$$

$$\dot{Z}_b = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1} \quad (1.123)$$

$$\dot{Z}_c = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2} \quad (1.124)$$

Similarmente, la equivalencia de cargas trifásicas en configuración delta a estrella está dado según:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_a \dot{Z}_c}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b + \dot{Z}_c} \quad (1.125)$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_a \dot{Z}_b}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b + \dot{Z}_c} \quad (1.126)$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b + \dot{Z}_c} \quad (1.127)$$

La equivalencia condensada en las ecuaciones (1.122) a (1.127) puede ser mejor comprendida en su alcance, con las siguientes observaciones

- Los resultados obtenidos **pueden aplicarse a cualquier tipo de impedancias, sin importar si éstas son equilibradas o no**. Para la deducción de la equivalencia no se puso restricciones sobre el tipo de impedancias conectadas, por lo que el resultado encontrado es válido para toda impedancia en configuración delta o estrella.
- La equivalencia de cargas delta a estrella debe emplearse con sumo cuidado, en especial cuando se trata de cargas desequilibradas. Cuando se desea simplificar varias cargas en estrella a una sola impedancia equivalente, **debe verificarse primero que la tensión entre neutros de las cargas a reducir sea nula**. En el caso contrario, se obtiene un resultado que difiere completamente de la red original.
- Un caso particular de las equivalencias expuestas lo constituye el caso de cargas equilibradas. Suponiendo que $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}_\lambda$ y que $\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}_\Delta$, entonces se tiene que

$$\dot{Z}_\Delta = 3 \dot{Z}_\lambda \quad (1.128)$$

$$\dot{Z}_\lambda = \frac{1}{3} \dot{Z}_\Delta \quad (1.129)$$

En el problema de esta sección, se hará la equivalencia de la carga equilibrada en estrella a delta. Dado que la carga trifásica en estrella es equilibrada, es posible aplicar la expresión (1.128), lo cual conduce a

$$\dot{Z}_{2\text{eq}} = 120 + j90 \text{ } [\Omega] \quad (1.130)$$

Efectuando la equivalencia en paralelo con la impedancia inicialmente conectada a la red, se obtiene

$$\dot{Z}_{\text{eq}\Delta} = \dot{Z} // \dot{Z}_{2\text{eq}} = \frac{2955}{37} + j \frac{495}{74} \quad (1.131)$$

Aplicando el resultado expuesto en (1.131) a la definición dada en (1.111), se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{S}_{3\phi_{total}} &= 3 \frac{380^2}{\sqrt{79,86^2 + 6,69^2}} \angle \arctan\left(\frac{33}{394}\right) \\ &= 5,41 \angle \arctan\left(\frac{33}{394}\right) \text{ [KVA]} \quad (1.132)\end{aligned}$$

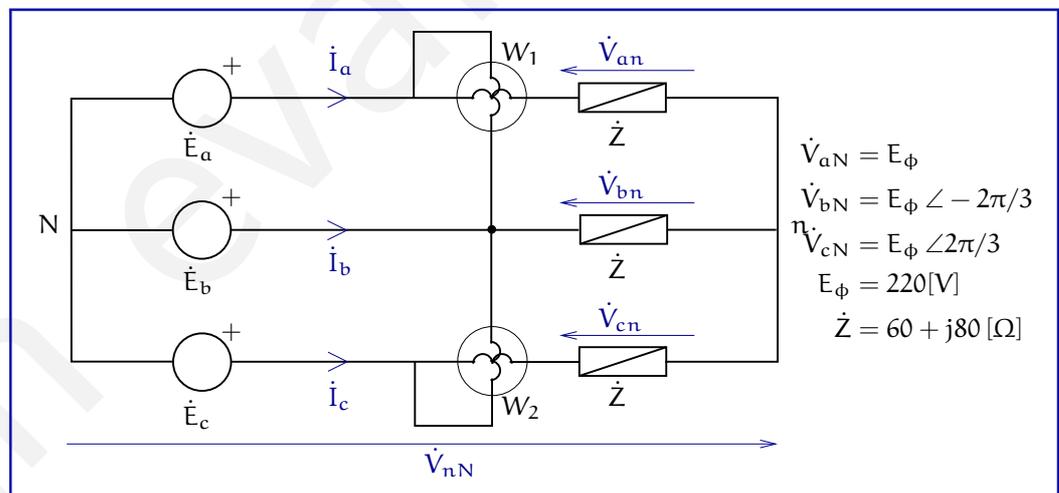
El resultado expuesto en (1.132) coincide con el entregado en (?), notando que las diferencias entre los dos resultados constituyen redondeos numéricos.

1.5. Potencia en sistemas trifásicos

1.5.1. Método de los Wattímetros

Problema 1.6.

El siguiente problema permitirá desarrollar un método práctico que permite medir la potencia activa trifásica a través de sólo dos wattímetros en un sistema trifásico equilibrado (el cual será luego extendido al caso de cargas desequilibradas).



Considere la red trifásica de la figura, en donde la carga y la fuente de alimentación son equilibradas, constituyendo así un sistema trifásico equilibrado. Los wattímetros conectados a la red trifásica son ideales. Suponga que la carga que se muestra es la carga equivalente de un gran número de cargas trifásicas equilibradas.

1.6.1 ¿Qué indica la lectura de los wattímetros?

1.6.2 ¿En qué se basa la idea anterior?

Solución

Así como en la práctica existen herramientas para la lectura de corrientes (amperímetros) y tensiones (voltímetros), también existen instrumentos capaces de medir la potencia promedio consumida por una carga, también conocida como potencia activa. La figura 1.13 presenta la configuración típica de estos instrumentos. Un par de terminales mide la corriente que circula a través de la línea, en tanto que el segundo par de terminales mide la tensión entre las líneas de interés. La lectura presentada por el wattímetro arroja

$$W = \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T v(\tau) i(\tau) d\tau \quad (1.133)$$

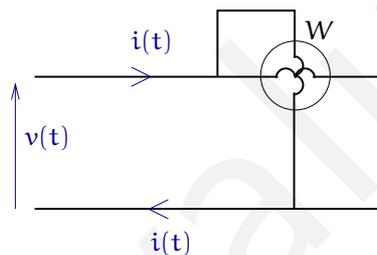


Figura 1.13: Medición de la potencia activa mediante wattímetro en el caso monofásico.

La expresión (1.133) también puede calcularse a partir de su equivalente fasorial, lo cual está dado por

$$W = VI \cos(\varphi) \quad (1.134)$$

La expresión (1.134) corresponde a la potencia activa suministrada a la carga. En consecuencia, el wattímetro permite una lectura de la potencia media (expresada en el dominio del tiempo) o de la potencia activa (expresada en el dominio fasorial).

En el caso monofásico resulta sencillo medir la potencia activa conectando el wattímetro tal como lo ilustra la figura 1.13. El resultado obtenido es directamente la potencia promedio consumida por la carga.

Cuando la potencia se mide en una red trifásica, el resultado se obtiene de forma directa mediante la suma algebraica de las mediciones arrojadas por los

La variable $v(t)$ corresponde a la tensión en el dominio del tiempo, en tanto que V hace referencia a la magnitud de la tensión compleja, expresada en el dominio fasorial.

wattímetros. Lo anterior se puede demostrar considerando que la suma de las lecturas arrojadas por los wattímetros del problema corresponde a

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T v_{ab}(\tau) i_a(\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_0^T v_{cb}(\tau) i_c(\tau) d\tau \quad (1.135)$$

Agrupando (1.135), resulta

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T [v_{ab}(\tau) i_a(\tau) + v_{cb}(\tau) i_c(\tau)] d\tau \quad (1.136)$$

Expandiendo la expresión (1.136) se obtiene

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T [(v_a(\tau) - v_b(\tau)) i_a(\tau) + (v_c(\tau) - v_b(\tau)) i_c(\tau)] d\tau \quad (1.137)$$

Sumando al integrando de (1.137) la expresión $\{v_b(\tau) - v_b(\tau)\} i_b(\tau)$, se obtiene

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T [(v_a(\tau) - v_b(\tau)) i_a(\tau) + (v_c(\tau) - v_b(\tau)) i_c(\tau) + \{v_b(\tau) - v_b(\tau)\} i_b(\tau)] d\tau \quad (1.138)$$

Reescribiendo el resultado dado en (1.138) se obtiene

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \{v_a(\tau) i_a(\tau) + v_b(\tau) i_b(\tau) + v_c(\tau) i_c(\tau)\} d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T v_b(\tau) \{i_a(\tau) + i_b(\tau) + i_c(\tau)\} d\tau \quad (1.139)$$

Dado que en un sistema trifásico se cumple que $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$ (sin importar si es equilibrado o no), entonces se cumple que el resultado (1.139) es equivalente a

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \{v_a(\tau) i_a(\tau) + v_b(\tau) i_b(\tau) + v_c(\tau) i_c(\tau)\} d\tau \quad (1.140)$$

En consecuencia, la expresión (1.140) demuestra que la potencia activa trifásica puede calcularse mediante la suma algebraica de las potencias medidas en los wattímetros. Ello es válido aunque la carga sea desequilibrada, ya que en ningún punto del desarrollo precedente se ha supuesto

Por lo tanto, la suma de los wattímetros conectados según el problema dan cuenta de la potencia activa consumida por la carga trifásica equilibrada, la cual corresponde a

$$P_{3\phi} = 3 \frac{V_{aN}^2}{Z} \cos(\varphi) = 3 \frac{220^2}{\sqrt{60^2 + 80^2}} \cos(\varphi) = 1452 \cos(\varphi) [W] \quad (1.141)$$

Donde φ está definido para este problema según

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \quad (1.142)$$

Desarrollando (1.141) en base a (1.142), se obtiene

$$P_{3\varphi} = 871,2 \text{ [W]} \quad (1.143)$$

Es decir, la suma de las lecturas de los wattímetros conectados a la red indican una potencia activa trifásica de 871,2 [W]. Lo anterior puede ser corroborado calculando directamente las potencias activas medidas por los wattímetros y luego sumando sus mediciones. Para el caso del wattímetro W_1 , su lectura arroja un valor igual a

$$W_1 = V_{ab} I_a \cos(\pi/6 + \varphi) \quad (1.144)$$

En tanto que el segundo wattímetro entrega una lectura igual a

$$W_2 = V_{cb} I_c \cos(\pi/6 - \varphi) \quad (1.145)$$

Dado que en un sistema trifásico equilibrado las magnitudes de las corrientes de línea son las mismas ($I_a = I_b = I_c = I_l$) y que la relación entre las tensiones de línea y de fase está dada por $V_\ell = \sqrt{3} V_\phi$, se tendrá que la suma de las potencias activas medida por los wattímetros está dada por

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3} V_\phi I_l \{\cos(\pi/6 + \varphi) + \cos(\pi/6 - \varphi)\} \quad (1.146)$$

Ahora bien, tomando en consideración que

$$\cos(\pi/6 + \varphi) + \cos(\pi/6 - \varphi) = 2 \cos(\varphi) \cos(\pi/6) \quad (1.147)$$

Es posible expresar (1.146) según

$$W_1 + W_2 = 2 \sqrt{3} V_\phi I_l \cos(\varphi) \cos(\pi/6) \quad (1.148)$$

Finalmente, reemplazando $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, se tiene que la expresión (1.148) lleva a

$$W_1 + W_2 = 3 V_\phi I_l \cos(\varphi) \quad (1.149)$$

El resultado presentado en (1.149) demuestra que la configuración dada en el problema permite obtener la potencia activa trifásica mediante la suma de las lecturas obtenidas a partir de los instrumentos.

Los desfases presentados en las expresiones (1.144) y (1.145) pueden ser explicados mediante un análisis gráfico de los fasores involucrados en las mediciones. La figura 1.14 ilustra la representación gráfica de los fasores y los desfases correspondientes.

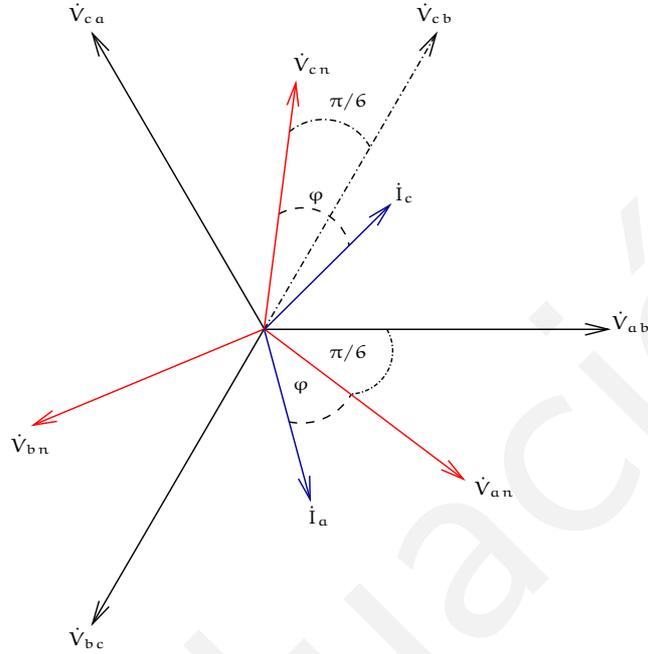


Figura 1.14: Diagrama fasorial con las tensiones y corrientes involucradas en la medición de los wattímetros.

El método de los wattímetros es aplicable en un caso general de un sistema polifásico, como se demuestra a continuación. Suponga un sistema polifásico de n fases, en donde tanto las cargas conectadas a la red como las fuentes de alimentación pueden ser desequilibradas. Suponga además que cada una de las líneas posee un wattímetro que mide la potencia activa con respecto a un nodo de referencia común a todos los instrumentos. La figura 1.15 ilustra gráficamente la distribución de la red polifásica.

Tal y como se ha mostrado hasta el momento, la medición del k -ésimo wattímetro está dada por la definición

$$W_k = \frac{1}{T} \int_0^T \{v_k(\tau) + v_x(\tau)\} i_k(\tau) d\tau \quad (1.150)$$

Si se suma la medición efectuada por cada uno de los n wattímetros, se obtiene

$$\sum_{k=1}^n W_k = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^n \{v_k(\tau) + v_x(\tau)\} i_k(\tau) d\tau \quad (1.151)$$

Distribuyendo la sumatoria y expandiendo la expresión (1.151), resulta

$$\sum_{k=1}^n W_k = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^n v_k(\tau) i_k(\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_0^T v_x(\tau) \sum_{k=1}^n i_k(\tau) d\tau \quad (1.152)$$

Sin pérdida de generalidad puede asumirse que las impedancias se encuentran en configuración estrella (caso, polifásica).

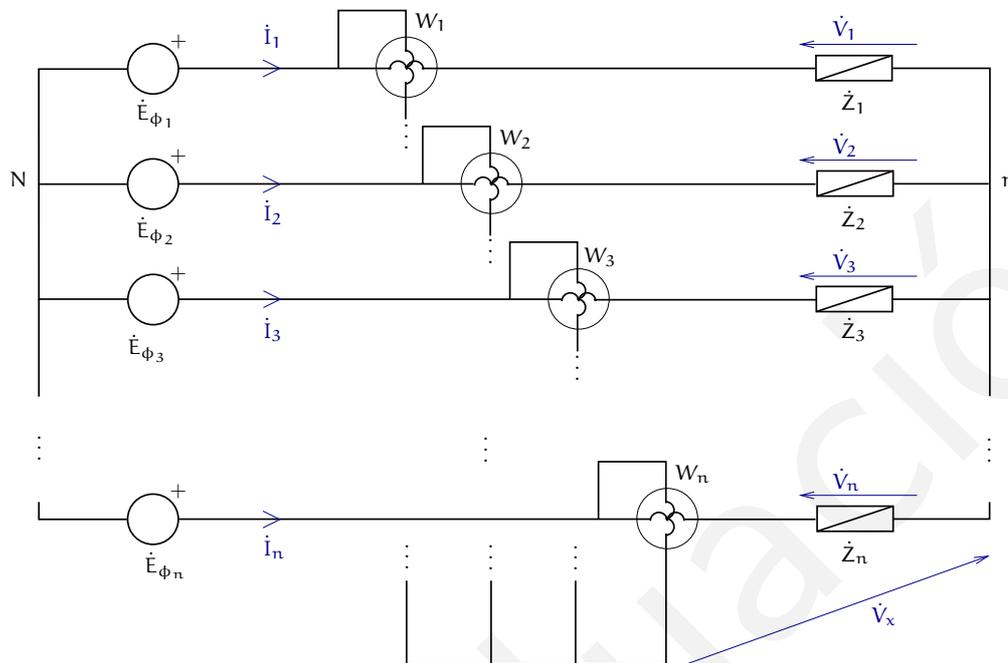


Figura 1.15: sistema polifásico arbitrario.

Dado que en un sistema polifásico siempre se cumple que

$$\sum_{k=1}^n i_k(\tau) = 0 \quad (1.153)$$

Entonces la segunda integral presente en (1.152) es cero, independiente del valor de $v_x(t)$. En consecuencia, es posible elegir el nodo de referencia en cualquier punto de la red, pudiendo ser una de las líneas de la red polifásica. Esta elección hace que el wattímetro que está en esa línea tenga una lectura igual a cero, lo cual permite eliminarlo. Este supuesto es el que permite que la sumatoria dada en (1.152) corresponda a la potencia activa polifásica consumida por la carga conectada a la red y que pueda analizarse el caso trifásico según (1.149).

La igualdad (1.153) es cumplida aún cuando la carga es desequilibrada.

Errores

El presente ejercicio contiene algunas definiciones y cálculos que pueden llevar a errores numéricos como conceptuales. A continuación se presentan los errores más comunes.

Error 1 Considerar que la potencia activa trifásica no puede medirse según (1.149) en sistemas desequilibrados. El resultado deducido en este ejercicio

puede ser aplicado tanto para cargas equilibradas como desequilibradas, razón por la cual el método de los wattímetros constituye un método de medición práctico en los sistemas reales.

Error 2 Considerar que la suma algebraica de las lecturas de los wattímetros entrega la potencia aparente trifásica $P_{ap3\phi}$. Tal como se ha analizado en el problema, la lectura de los wattímetros está relacionada directamente con la potencia activa trifásica consumida por la carga 3ϕ , es decir, la parte real de la potencia aparente trifásica.

Error 3 Manipulación incorrecta de las expresiones (1.144) y (1.145), en especial la manipulación de los ángulos de desfase entre las tensiones y corrientes involucradas en la medición. Una forma de evitar estos errores es esbozar un diagrama fasorial con las tensiones y corrientes involucradas, lo cual permitirá deducir inmediatamente el ángulo de desfase entre las variables involucradas.

Error 4 Considerar una configuración de wattímetros sin un nodo común de medición y aplicar el método precedente. El método de los wattímetros sólo es válido para una configuración de instrumentos con un nodo de medición en común.

Una variante de interés

Dado que el resultado expuesto en esta sección es aplicable a todo tipo de redes polifásicas, entonces es posible analizar redes eléctricas con más de tres fases. Por ejemplo, supongamos que existe una red tetrafásica con una carga conectada de forma que tanto la fuente de alimentación como las impedancias poseen un neutro, el cual no se encuentra conectado. Para efectos prácticos, supondremos que tanto la fuente de alimentación como la carga son equilibradas. Las impedancias conectadas están definidas según el enunciado del problema principal (\dot{Z}), en tanto que la magnitud de la tensión por fase de la red tetrafásica es de $V_{4\phi} = 400$ [V] efectivos.

Para aplicar el método de los wattímetros a esta red, se necesitan $4 - 1 = 3$ medidores con un punto común, el cual corresponderá a cualquiera de las tres líneas. Por lo tanto, existen 4 combinaciones posibles para conectar los medidores en la red. Sin embargo, la suma algebraica de todos ellos dará el mismo resultado, el cual estará dado por

$$P_{4\phi} = 4 \frac{V_{4\phi}^2}{Z} \cos \left(\arctan \left(\frac{4}{3} \right) \right) = 6,4 \cos \left(\arctan \left(\frac{4}{3} \right) \right) \text{ [KW]} \quad (1.154)$$

El análisis por el método de los wattímetros considera un estudio similar al efectuado en el caso trifásico: se considera inicialmente las mediciones en forma independiente y se calculan las expresiones analíticas para sus lecturas, para luego proceder a la suma algebraica de dichos términos y obtener el resultado dado en (1.154).

1.6. Ejercicios suplementarios

Problema 1.7. Tres impedancias iguales son conectadas, en λ , a un generador 3ϕ equilibrado. Luego, las mismas impedancias son conectadas en Δ al mismo generador. Compare las corrientes de línea (magnitud) en ambas situaciones.

Problema 1.8. Una carga equilibrada, en conexión λ , de $(10 + j2)$ $[\Omega]/\phi$ es conectada a un generador 3ϕ de 380 $V_{\ell-\ell}$, a través de líneas de $(1 + j)$ $[\Omega]/\text{línea}$.

1.8.1 Calcule la (magnitud) tensión por fase en la carga.

1.8.2 Calcule en la potencia (activa) disipada en cada línea.

Problema 1.9. Un generador 3ϕ equilibrado de 1000 $V_{\ell-\ell}$ alimenta dos cargas 3ϕ equilibradas. La primera de ellas toma 60 [KVA] a FP $12/13$ IND; la segunda carga disipa 80 [KW] a FP $0,8$ IND.

Calcule la corriente de línea a la salida del generador.

Problema 1.10. Tres impedancias: $(8 + j)$ $[\Omega]$, $(6 + j2)$ $[\Omega]$, y $(4 + j2)$ $[\Omega]$ se conectan en Δ a un generador 3ϕ equilibrado de 380 $V_{\ell-\ell}$, 50 [Hz]. Se desea llevar el FP $_{3\phi}$ a uno. Calcule un banco de condensadores 3ϕ , conectados en Δ .

Problema 1.11. Un generador 3ϕ equilibrado de 380 [V] entre líneas alimenta una carga 3ϕ equilibrada, conexión λ . Si la potencia total consumida por la carga es 45 [KW] a FP = $0,8$ IND, calcule la impedancia (magnitud y fase) de cada fase de la carga.

Problema 1.12. Un generador 3ϕ equilibrado alimenta dos cargas 3ϕ equilibradas, conectadas en paralelo. Las corrientes de línea en las cargas son 300 [A] y 260 [A] con FP = $4/5$ IND y $12/13$ CAP, respectivamente.

1.12.1 Calcule la magnitud de las corrientes de línea a la salida del generador.

1.12.2 Suponga que se conecta, en paralelo con las dos cargas, un banco equilibrado de condensadores que lleva el FP total a 1. Calcule la magnitud de las nuevas corrientes de línea a la salida del generador

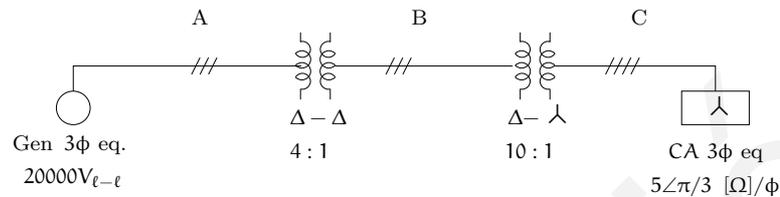
Problema 1.13. Suponga que dos cargas 3ϕ equilibradas, conectadas en paralelo, son alimentadas por un generador también equilibrado que provee 1000 [V] entre líneas. La primera carga, en conexión λ , tiene una impedancia por fase igual a $4 + j3$. La segunda carga, en conexión Δ , tiene una impedancia por fase igual a $12 - j9$.

1.13.1 Calcule la potencia aparente (compleja) por fase en la primera carga

1.13.2 Calcule la corriente de línea (magnitud) a la salida del generador

1.13.3 Calcule la corriente por fase en la segunda carga (magnitud)

Problema 1.14. Considere el sistema 3 ϕ de la figura



1.14.1 Calcule la magnitud de las corrientes de línea en los tres segmentos de transmisión indicados (A,B y C)

1.14.2 Calcule la potencia aparente compleja entregada por el generador

Problema 1.15. Considere el mismo sistema 3 ϕ del problema 1.14 y suponga que se conectan una impedancia $\dot{Z} = 3 - j4$ [Ω] entre las líneas R y S, y otra impedancia del mismo valor, entre las líneas S y T. Calcule las tres corrientes de línea en el segmento A.

Problema 1.16. Una carga 3 ϕ eq. de $8 \angle\pi/4$ [Ω] por fase, en conexión λ , es alimentada por un generador 3 ϕ eq. de 380 V $_{\ell-\ell}$ y secuencia positiva.

1.16.1 Calcule las corrientes de línea y dibuje el diagrama fasorial de tensiones y corrientes de línea.

1.16.2 Suponga que, por accidente, una de las fases de la carga es cortocircuitada. Calcule las nuevas corrientes de línea.

Problema 1.17. Una carga 3 ϕ es conectada en Δ es conectada a un generador 3 ϕ eq. de 2000 V $_{\ell-\ell}$ y secuencia negativa. Las impedancias de la carga son $4\angle 0$, $4\angle\pi/4$ y $4\angle-\pi/4$, en las fases RS, ST y RT respectivamente.

1.17.1 ¿Cuáles serán las lecturas de los dos wattímetros conectados a las líneas R y S, y con terminal común en la línea T?

1.17.2 Calcule la potencia consumida por la carga 3 ϕ a partir de esas lecturas.

Problema 1.18. Analice las ventajas y desventajas de usar generadores 3 ϕ eq. en vez de generadores 4 ϕ equilibrados

Problema 1.19. Un generador 3 ϕ eq. en conexión λ , alimenta una carga 3 ϕ eq., también en conexión λ , a través de un cableado tetrafililar, es decir, con neutro conectado. Investigue en qué porcentaje debería cambiar la magnitud de una (y sólo una) de las impedancias de fase en la carga para que la corriente por el neutro fuese un 10% de la corrientes de línea originales.

Problema 1.20. Un generador 3ϕ eq. en conexión Δ , de 2000 [V] entre líneas, y 60 [Hz], alimenta una carga 3ϕ también en conexión Δ , con impedancias $\dot{Z}_R = 12 + j5$, $\dot{Z}_S = 15 - j12$ y $\dot{Z}_T = 10$, a través de un cableado tri-filar, es decir, con neutro flotante.

1.20.1 Calcule el banco equilibrado de condensadores, en conexión Δ , que se debería conectar en paralelo con esa carga para lograr que la potencia reactiva total sea 0 [VAR].

1.20.2 Calcule las tres corrientes de línea (a la salida del generador) antes y después de conectar los condensadores. Verifique con LTspice. Analice y comente.

En evaluación

Capítulo 2

ANÁLISIS DE REDES DINÁMICAS EN DOMINIO DE LAPLACE

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan redes, relativamente simples, en las que se usa la transformación de Laplace (T.L.) como herramienta de análisis. La idea es mostrar cómo esa herramienta se aplica para dar una solución completa, dadas la red, las condiciones iniciales en $t = 0$, y las excitaciones $\forall t \geq 0$. Así, los modelos en el dominio del tiempo, constituidos por un sistema de ecuaciones diferenciales, son reemplazados por un modelo constituido por ecuaciones algebraicas en la variable compleja s , asociada a la Transformada de Laplace. De esa forma, la red se puede analizar completamente, obteniendo resultados numéricos, usando técnicas clásicas de solución de un sistema de ecuaciones simultáneas algebraicas. Aparte de esa ventaja evidente, la transformación de Laplace permite resolver problemas en donde las condiciones iniciales son discontinuas en $t = 0$. Esta capacidad requiere que la definición de la T.L. se haga como

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

donde lo notable es que el límite inferior es $t = 0^-$. Esta elección permite incluir en el análisis con T.L. fenómenos que ocurren exactamente en $t = 0$.

Adicionalmente, la T.L. hace posible incluir en el análisis excitaciones de variable naturaleza, bajo la condición que exista la transformación de Laplace para las

funciones temporales que describen esas excitaciones.

Las limitaciones básicas que permiten la aplicación de la transformación de Laplace al análisis de redes eléctricas son tres:

- La transformación de Laplace existe para las funciones temporales que describen todas las fuentes de excitación.
- La red es lineal.
- La red es invariante en el tiempo, aunque ciertos casos especiales de variaciones temporales se pueden incluir en esta forma de analizar las redes.

Para maximizar el aprendizaje, es necesario que el estudiante comprenda y maneje con soltura las leyes fundamentales del análisis de redes (LVK, LCK, Tercer Postulado), así como las bases matemáticas de la transformación de Laplace y de la transformación inversa asociada. De igual forma, suponemos que el estudiante ha ya estudiado métodos generales de construcción de modelos para las redes, incluyendo el método de mallas y el método de nodos.

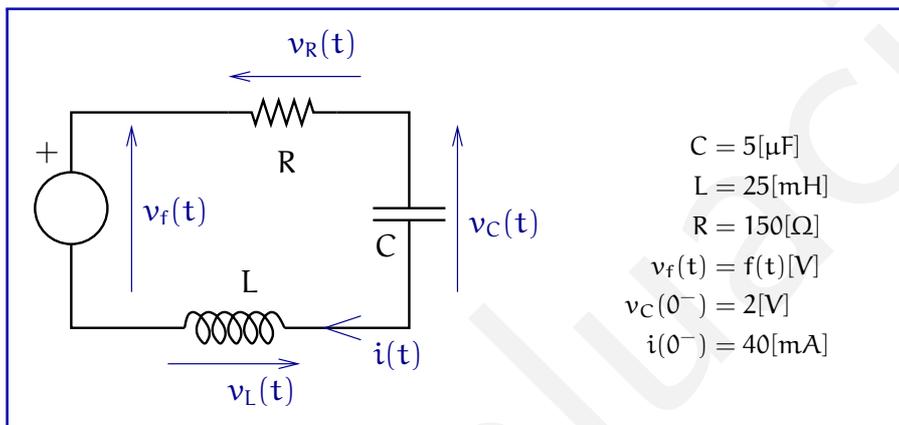
Como una forma de expresar en forma compacta los resultados de los métodos generales de análisis, utilizamos la formulación matricial. Ésta formulación no es otra cosa que una ordenación sistemática de ecuaciones lineales en las incógnitas. Además, una vez obtenida la ecuación matricial, la solución también se puede obtener en forma compacta, a través de la inversión de la matriz de coeficientes. Por todo esto, es necesario que para entender bien la solución a los problemas que aquí se desarrollan, conviene tener un conocimiento básico del álgebra de matrices.

2.2. Redes RLC

2.2.1. Red RLC serie

Problema 2.1.

Considere la red RLC de la figura, se trata de analizarla dadas las condiciones iniciales en el condensador y en el inductor, así como la excitación, $\forall t \geq 0$ con los datos que se indican.



Si $f(t) = 3 \forall t \geq 0$, encuentre expresiones para $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$, $V_C(s) = \mathcal{L}\{v_C(t)\}$ y $V_L(s) = \mathcal{L}\{v_L(t)\}$. A partir de esos resultados, calcule las señales temporales $i(t)$, $v_C(t)$ y $v_L(t)$.

Solución

Primero transformamos la red, preservando la topología, caracterizando los elementos pasivos por sus impedancias y haciendo explícitas las condiciones iniciales. Esta transformación aparece en la figura 2.1.

De esa figura, por aplicación simultánea de la LVK y el Tercer Postulado, se obtiene

$$V_f(s) = RI(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I(s) + sL I(s) - Li(0^-) \quad (2.1)$$

de donde se obtienen las expresiones

$$I(s) = \frac{sCV_f(s) - Cv_C(0^-) + sLi(0^-)}{s^2LC + sRC + 1} \quad (2.2)$$

$$= \frac{40 \cdot 10^{-3}(s + 1000)}{(s + 2000)(s + 4000)}. \quad (2.3)$$

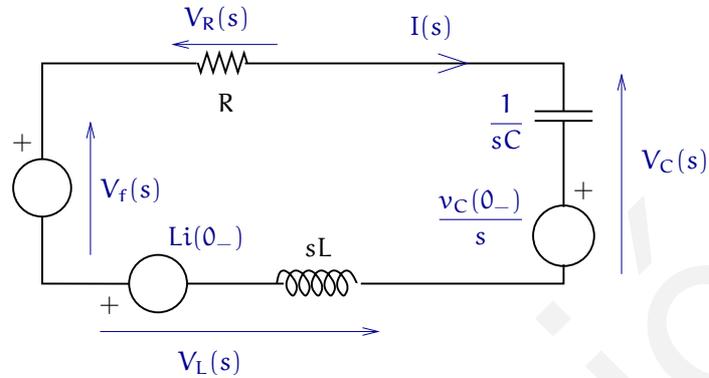


Figura 2.1: Red equivalente en el dominio de la T.L.

Las tensiones quedan dadas por

$$V_L(s) = sLI(s) - Li(0^-) \quad (2.4)$$

$$= 10^{-3} \left(\frac{s(s+1000)}{(s+2000)(s+4000)} - 1 \right) \quad (2.5)$$

$$V_C(s) = \frac{v_C(0^-)}{s} + \frac{1}{sC}I(s) \quad (2.6)$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{8000(s+1000)}{s(s+2000)(s+4000)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+2000} - \frac{3}{s+4000} \quad (2.7)$$

Para obtener las expresiones temporales de la señales, hay que expandir en fracciones parciales, la T.L. de cada una de ellas.

$$\frac{s+1000}{(s+2000)(s+4000)} = \frac{-0,5}{s+2000} + \frac{1,5}{s+4000} \quad (2.8)$$

$$\frac{s(s+1000)}{(s+2000)(s+4000)} = 1 + \frac{1000}{s+2000} + \frac{-3000}{s+4000} \quad (2.9)$$

$$\frac{8000(s+1000)}{s(s+2000)(s+4000)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+2000} + \frac{3}{s+4000} \quad (2.10)$$

Usando estas expansiones en las expresiones (2.3), (2.5) y (2.7), y aplicando T.L. inversa se pueden obtener $i(t)$, $v_L(t)$ y $v_C(t)$ expandiendo primero en fracciones parciales, y luego aplicando la T.L. inversa a cada una de las fracciones.

Así,

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = -20e^{-2000t} + 60e^{-4000t} \text{ [mA]} \quad (2.11)$$

$$v_L(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_L(s)\} = e^{-2000t} - 5e^{-4000t} \text{ [V]} \quad (2.12)$$

$$v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\} = 3 + 2e^{-2000t} - 3e^{-4000t} \text{ [V]} \quad (2.13)$$

Estas expresiones motivan las siguientes observaciones

- Las condiciones iniciales aparecen explícitamente en las expresiones para las T.L de la corriente y las tensiones.
- Se pueden obtener $i(0^+)$ y $v_C(0^+)$ a partir de las expresiones (2.2) y (2.6), usando el Teorema del Valor Inicial, a través de

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 CV_f(s) - sCv_C(0^-) + s^2 LCi(0^-)}{s^2 LC + sRC + 1} \quad (2.14)$$

$$= i(0^-) + \frac{V_f(\infty)}{L} \quad (2.15)$$

$$v_C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV_C(s) = v_C(0^-) + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{I(s)}{C} \quad (2.16)$$

de donde se observa que $i(t)$ es continua en $t = 0$ si y sólo si $V_f(\infty) = 0$. Éste es el caso de este problema, ya que $V_f(s) = 3/s$. También se aprecia que $v_C(t)$ es continua en $t = 0$ bajo la condición que $I(\infty) = 0$; esta condición se cumple siempre, a menos que $v_f(t)$ contenga derivadas de impulsos, lo cual no ocurre en ninguna situación real, y muy rara vez en modelos idealizados. Por supuesto que se cumple en este caso con $V_f(s) = 3/s$.

Note que si $V_f(\infty) \neq 0$, entonces la fuente incluye impulsos (delta de Dirac).

- Si $V_f(s)$ tiene la forma de un cociente de polinomios en s , entonces $I(s)$, $V_C(s)$ y $V_L(s)$ también son cocientes de polinomios.
- $I(s)$ se puede separar en dos sumandos.

Ésta es una propiedad presente en todos los sistemas lineales.

$$I(s) = \underbrace{\frac{sCV_f(s)}{s^2LC + sRC + 1}}_{I_e(s)} + \underbrace{\frac{-Cv_C(0^-) + sLCi(0^-)}{s^2LC + sRC + 1}}_{I_x(s)} \quad (2.17)$$

Uno de ellos, $I_e(s)$ es la T.L. de la corriente debida a la excitación, con condiciones iniciales iguales a cero. El segundo término, $I_x(s)$, es la T.L. de la corriente debida únicamente a las condiciones iniciales (excitación igual a cero).

Esta descomposición también se puede hacer en el caso de las tensiones $V_L(s)$ y $V_C(s)$.

- Las expresiones (2.2), (2.4) y (2.6) pueden ser usadas para determinar los valores a los que tienden $i(t)$, $v_L(t)$ y $v_C(t)$, para $v_f(t)$ constante. Este cálculo requiere el uso del Teorema de Valor Final, como se muestra a continuación

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = 0 \quad (2.18)$$

$$v_L(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_L(s) = 0 \quad (2.19)$$

$$v_C(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_f(s) = v_f(\infty) \quad (2.20)$$

- Otra forma de descomponer las expresiones obtenidas para las tres señales es considerar modos: los **modos forzados**, que se originan en la naturaleza de la excitación, y los **modos naturales** que, como su nombre lo indica, se originan en el comportamiento propio de la red. Una forma de separar ambos grupos de modos es considerar la respuesta que se origina cuando sólo se consideran las condiciones iniciales, es decir, con excitaciones iguales a cero. Las señales temporales que aparecen en este último caso, son los modos naturales. Por ejemplo, en caso de la tensión $v_C(t)$, los modos naturales son e^{-2000t} y e^{-4000t} , y el modo forzado es $e^{0 \cdot t}$, es decir, una constante. Este último, el modo constante, es forzado por el hecho que la excitación es una constante.
- Note que la corriente decae asintóticamente a cero. Ello es consistente con el hecho que la fuente es constante, por lo cual el condensador se carga, asintóticamente también, a un valor constante, **igual al de la fuente**.

Errores

En la solución de este problema, los errores que suelen cometerse son de variada naturaleza; algunos de ellos tienen implicancias conceptuales. Los más frecuentes e importantes son

- Error 1** Errores numéricos que generan expresiones para $i(t)$ y $v_C(t)$ que no satisfacen la condición de continuidad de las condiciones iniciales.
- Error 2** Errores numéricos tales que los valores asintóticos de las variables no son los correctos. En particular, cuando se obtiene $i(\infty) \neq 0$ o $v_C(\infty) \neq E$.
- Error 3** Expresiones para alguna (o varias) de las señales, de modo que ellas crecen sin límite. Ello ocurre por signos erróneos en denominador de las T.L. de las señales.
- Error 4** Las expresiones obtenidas para las señales, no satisfacen el Tercer Postulado para el condensador o para el inductor (o para ambos).
- Error 5** Al calcular $V_C(s)$ y $V_L(s)$ no se incluyen las fuentes equivalentes de condiciones iniciales (ver figura 2.1).

Una variante de interés

Considere la misma red del problema principal, con dos cambios: la tensión de la fuente es cero $\forall t \geq 0$ y la resistencia presente es un parámetro, cuya variación se analiza acá.

En esta variante se desea analizar lo que pasa con la corriente $i(t)$ cuando R tiene cualquier valor en el rango $[0; 200]$ $[\Omega]$. Para ello, usando (2.2) con $V_f(s) = 0$, se tiene que

$$I(s) = \frac{-Cv_C(0^-) + sLCi(0^-)}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{-\frac{1}{L}v_C(0^-) + si(0^-)}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (2.21)$$

$$= \frac{0,04(s - 2000)}{s^2 + 40Rs + 8 \cdot 10^{-6}} \quad (2.22)$$

De estas ecuaciones vemos que el valor de R afecta principalmente las características de los modos naturales de la red, ya que las raíces del denominador de $I(s)$ están dadas por

$$\lambda_{1,2} = -20R \pm 20\sqrt{R^2 - 2 \cdot 10^4} \quad (2.23)$$

La forma general de $i(t)$ se puede obtener a partir de la expansión de $I(s)$ en fracciones parciales

$$I(s) = \frac{K_1}{s - \lambda_1} + \frac{K_2}{s - \lambda_2} \iff i(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.24)$$

donde se ha supuesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (el caso en que $\lambda_1 = \lambda_2$ se discute más abajo).

Para profundizar el análisis, consideramos tres casos. Así, si $R > \sqrt{2} \cdot 100$ $[\Omega]$, λ_1 y λ_2 son números reales. En este caso, $i(t)$ es una combinación lineal de dos señales exponenciales decrecientes. Éste fue el caso del problema principal, donde $R = 150$ $[\Omega]$. Si $R = \sqrt{2} \cdot 100$ $[\Omega]$, se produce una situación especial, en la que $\lambda_1 = \lambda_2 = -20R$, llevando a

$$i(t) = K_{11} e^{\lambda_1 t} + K_{12} t e^{\lambda_1 t} \quad (2.25)$$

Cuando $R < \sqrt{2} \cdot 100$ $[\Omega]$, λ_1 y λ_2 son números complejos (uno conjugado del otro). Sean entonces

$$\lambda_1 = -\sigma + j\omega, \quad \lambda_2 = -\sigma - j\omega; \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (2.26)$$

donde $\sigma = 20R$ y $\omega = 20\sqrt{2 \cdot 10^4 - R^2}$. En este caso, $I(s)$ se puede escribir en la forma

$$I(s) = 0,04 \frac{(s + 20R) - (2000 + 20R)}{(s + 20R)^2 - 400(R^2 - 2 \cdot 10^4)} \quad (2.27)$$

$$= 0,04 \frac{(s + \sigma)}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} - \frac{4 + 0,04R}{\sqrt{2 \cdot 10^4 - R^2}} \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}, \quad (2.28)$$

Recuerde que, cuando los coeficientes del polinomio son reales, las raíces complejas de un polinomio siempre se presentan en pares conjugados

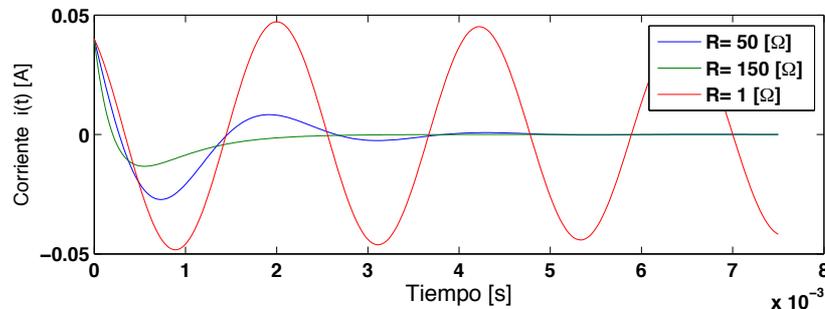
de donde se puede obtener $i(t)$

$$i(t) = 0,04e^{-\sigma t} \cos \omega t - \frac{4 + 0,04R}{\sqrt{2 \cdot 10^4 - R^2}} e^{-\sigma t} \operatorname{seno} \omega t = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.29)$$

Esta última expresión indica que cuando $R < \sqrt{2} \cdot 100 \text{ } [\Omega]$, la corriente tiene la forma de una sinusoidal cuya amplitud decae exponencialmente.

En el caso límite, en el que $R = 0$, se tiene que $\sigma = 0$ y $\omega = 2000\sqrt{2}$, en cuyo caso $\lambda_1 = j\omega$ y $\lambda_2 = -j\omega$.

Para ilustrar el comportamiento de la corriente, a medida que R varía, se presentan en el gráfico adjunto las corrientes que resultan de elegir $R = 1$, $R = 50$ y $R = 150 \text{ } [\Omega]$.



El fenómeno oscilatorio natural (excitaciones iguales a cero, pero con energía inicial acumulada) que se observa para cierto rango de valores de R sólo puede aparecer en redes pasivas, cuando hay condensadores e inductores. En otras palabras, si una red pasiva sólo contiene inductores o sólo condensadores, el comportamiento natural jamás podrá incluir modos oscilatorios. Esto ocurre porque el fenómeno de oscilación en estos sistemas se origina en un proceso periódico de transformación de un tipo de energía (eléctrica en los condensadores) en otro tipo de energía (energía magnética en el inductor), en cada ciclo de transformación hay energía que se disipa en los resistores, por eso la oscilación es amortiguada. En el caso ideal cuando la resistencia es cero, la oscilación se mantiene. Este caso tiene un análogo en sistemas mecánicos masa-resorte con roce viscoso.

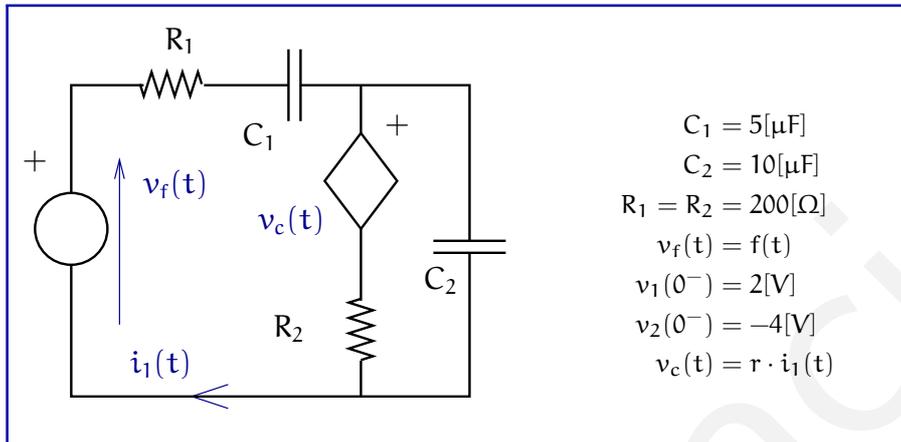
Veremos en el problema siguiente que esta limitación puede desaparecer en redes activas (redes con fuentes controladas), es decir en una red RC con fuentes controladas, también pueden aparecer fenómenos oscilatorios en el comportamiento natural.

2.2.2. Red RC con fuente controlada

Problema 2.2.

La red de la figura se clasifica como una red activa, porque incluye una fuente controlada. La idea con este problema es mostrar como la T.L. permite hacer

un análisis cuantitativo y cualitativo del comportamiento de esta red, a medida que variamos el parámetro de la fuente controlada.



Se pide primero calcular la expresión literal para $I_1(s)$ y luego, usando los valores numéricos dados, estudiar el efecto de variar el parámetro r en el conjunto de números reales. Para este último caso, considere $f(t) = 8 [\text{V}]$.

Solución

Primero llevamos la red al dominio de la T.L., haciendo explícitas las condiciones iniciales. El resultado es el modelo simbólico que se muestra en la figura 2.2.

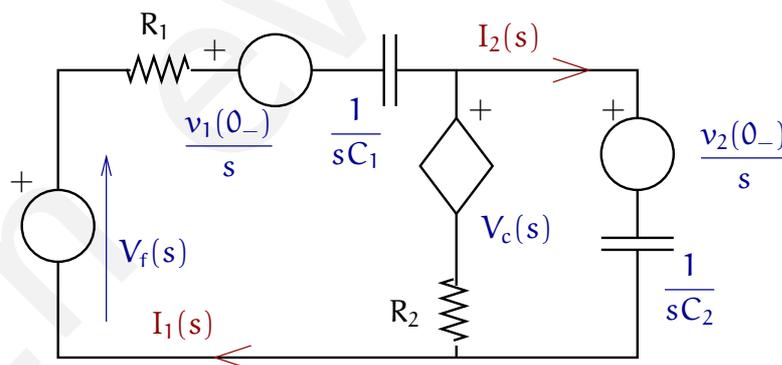


Figura 2.2: Red equivalente en el dominio de la T.L.

Si ahora elegimos $I_1(s)$ e $I_2(s)$ como las corrientes de mallas, podemos escribir el modelo matemático que surge del método de mallas como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + r + \frac{1}{sC_1} & -R_2 \\ -R_2 - r & R_2 + \frac{1}{sC_2} \end{bmatrix}}_{Z_m(s)} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_f(s) - \frac{v_1(0^-)}{s} \\ -\frac{v_2(0^-)}{s} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

a partir de lo cual, invirtiendo la matriz de mallas $Z_m(s)$, se pueden obtener las corrientes,

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} R_2 + \frac{1}{sC_2} & R_2 \\ R_2 + r & R_1 + R_2 + r + \frac{1}{sC_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f(s) - \frac{v_1(0^-)}{s} \\ -\frac{v_2(0^-)}{s} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

donde $\Delta(s)$ es el determinante de $Z_m(s)$, y es dado por

$$\Delta(s) = \frac{p(s)}{s^2 C_1 C_2} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + r C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + 1}{s^2 C_1 C_2}. \quad (2.32)$$

Así,

$$I_1(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \frac{R_2 C_2 s + 1}{s} \left(V_f(s) - \frac{v_1(0^-)}{s} \right) - \frac{R_2}{\Delta(s)} \frac{v_2(0^-)}{s} \quad (2.33)$$

Si usamos la expresión para $\Delta(s)$ dada en (2.32), se llega a

$$I_1(s) = \frac{s C_1 C_2 (R_2 C_2 s + 1)}{p(s)} \left(V_f(s) - \frac{v_1(0^-)}{s} \right) - \frac{s R_2 C_1 C_2}{p(s)} v_2(0^-) \quad (2.34)$$

Respecto de este resultado, se puede destacar lo siguiente

- Si $V_f(s)$ es un cociente de polinomios, entonces $I_1(s)$ también lo es, como la T.L. de todas las demás señales de la red.
- La expresión para $I_1(s)$ se puede descomponer en dos sumandos. El primero, $I_{1e}(s)$, depende de la excitación, y el segundo, $I_{1x}(s)$, del estado inicial.

Ésta es una propiedad de los sistemas lineales.

$$I_1(s) = \underbrace{\frac{s C_1 C_2 (R_2 C_2 s + 1)}{p(s)} V_f(s)}_{I_{1e}(s)} + \underbrace{-\frac{C_1 C_2 (R_2 C_2 s + 1)}{p(s)} v_1(0^-) - \frac{s R_2 C_1 C_2}{p(s)} v_2(0^-)}_{I_{1x}(s)} \quad (2.35)$$

puede verificar a través
 técnica de expansión en
 fracciones parciales.

- Si $v_f(t)$ es constante, entonces $i_1(t)$ contendrá sólo modos naturales, los que están asociados a las raíces del polinomio $p(s)$. Esto ocurre porque, en $I_1e(s)$ se produciría una cancelación del denominador de $V_f(s)$.

Para analizar el efecto que los valores de $r \in \mathbb{R}$ tienen en $i_1(t)$, evaluamos numéricamente la expresión para $I_1(s)$, con lo que se obtiene

$$I_1(s) = 10^{-7} \frac{3,0s + 2,015 \cdot 10^{-5}}{s^2 + (2000 + 2,5r)s + 5 \cdot 10^5} \quad (2.36)$$

Para obtener $i_1(t)$ necesitamos expandir $I_1(s)$ en fracciones parciales. Eso requiere calcular las raíces, λ_1 y λ_2 , del denominador de $I_1(s)$. El resultado¹, para distintos valores de r , se muestra en la tabla 2.1.

Caso	r	λ_1	λ_2	$i_1(t)$
1	100	-2000	-250	$K_{11}e^{-2000t} + K_{12}e^{-250t}$
2	0	-1707	-293	$K_{21}e^{-1707t} + K_{22}e^{-293t}$
3	-100	-1390	-360	$K_{31}e^{-1390t} + K_{32}e^{-360t}$
4	-400	-500+j500	-500-j500	$K_{41}e^{-500t} \cos(500t + K_{42})$
5	-800	$j500\sqrt{2}$	$-j500\sqrt{2}$	$K_{51} \cos(500\sqrt{2}t + K_{52})$
6	-2000	2823	177	$K_{61}e^{2823t} + K_{62}e^{177t}$

Tabla 2.1: Efecto del parámetro de la fuente controlada en la naturaleza de la dinámica de las señales en la red. Los casos en rojo no podrían ocurrir si no estuviese la fuente controlada.

Estos resultados numéricos permiten hacer algunos comentarios adicionales.

- Se observa que variando r se consigue una gran variedad de respuestas dinámicas. En particular, en los casos 1,2 y 3, la forma de $i_1(t)$ es la misma que se obtendría si no existiese la fuente controlada. Nos referimos a que $i_1(t)$ es la combinación lineal de dos exponenciales amortiguadas.

¹Use MAPLE o MATHEMATICA .

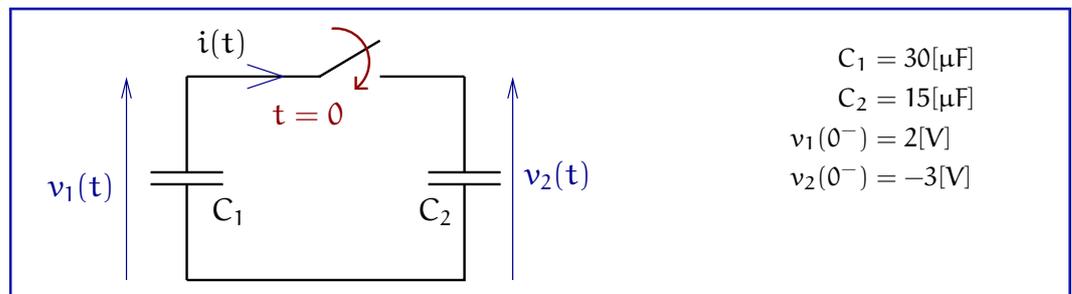
- El caso 4 muestra que es posible conseguir oscilaciones amortiguadas, aunque **sólo hay dos condensadores y ninguna inductancia**.
- El caso 5, en cambio, muestra que la corriente tiene la forma de una oscilación de amplitud constante. Note que esto también ocurre cuando la excitación es cero $\forall t \geq 0$, y la corriente se debe sólo a las condiciones iniciales.
- Los casos 5 y 6 son aún más especiales. En esos casos la corriente crece sin límites, aunque en el caso 5 hay una oscilación de amplitud creciente exponencialmente.
- En general, se puede observar que la presencia de la fuente controlada hace posible que la red exhiba conductas muy diferentes a aquellas que se observan sin ella.

2.2.3. Redes capacitivas e inductivas con degeneraciones

Problema 2.3.

La red de la figura tiene como particularidad que la tensión en los condensadores es discontinua en $t = 0$, excepto en la muy particular situación en la que $v_1(0^-) = v_2(0^-)$.

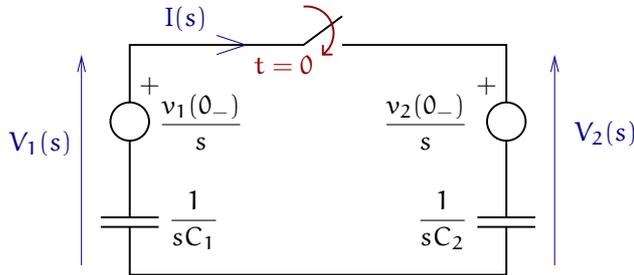
Una red capacitiva es degenerada si existe un camino cerrado, para aplicar LVK, de modo que sólo aparecen tensiones en condensadores y, posiblemente, tensiones de fuentes independientes de voltaje.



Para esta red se desea calcular $v_1(t)$ y $v_2(t)$, $\forall t \geq 0$.

Solución

Como siempre, la estrategia se inicia llevando la red al dominio de la T.L. En esta transformación, la topología de interconexión se preserva, las componentes son representadas por sus respectivas impedancias, y las condiciones iniciales se hacen explícitas, como fuentes equivalentes. De acuerdo a la definición de la transformación de Laplace, dada al comienzo de este capítulo, es necesario y suficiente conocer las condiciones iniciales en $t = 0^-$. El resultado se muestra en la figura a continuación.



Para resolver el problema, necesitamos entonces construir el modelo matemático para la red, tras lo cual calcularemos primero $I(s)$, ya que

$$V_1(s) = -I(s) \cdot \frac{1}{sC_1} + \frac{v_1(0^-)}{s}; \quad V_2(s) = I(s) \cdot \frac{1}{sC_2} + \frac{v_2(0^-)}{s} \quad (2.37)$$

Para el cálculo de $I(s)$ recurrimos a LVK que nos indica que $V_1(s) = V_2(s)$, así

$$-I(s) \cdot \frac{1}{sC_1} + \frac{v_1(0^-)}{s} = I(s) \cdot \frac{1}{sC_2} + \frac{v_2(0^-)}{s} \quad (2.38)$$

de donde se obtiene

$$I(s) = \frac{\frac{v_1(0^-)}{s} - \frac{v_2(0^-)}{s}}{\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (v_1(0^-) - v_2(0^-)) \quad (2.39)$$

Usando la expresión para las tensiones que aparecen en (2.37), se llega a

$$V_1(s) = V_2(s) = \frac{C_1 v_1(0^-) + C_2 v_2(0^-)}{(C_1 + C_2)s} \quad (2.40)$$

A partir de este resultado, y usando la transformación inversa de Laplace, se obtiene

$$v_1(t) = v_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C_1 v_1(0^-) + C_2 v_2(0^-)}{(C_1 + C_2)s} \right\} \quad (2.41)$$

$$= \frac{C_1 v_1(0^-) + C_2 v_2(0^-)}{C_1 + C_2} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.42)$$

Usando los valores numéricos especificados, se llega a

$$v_1(t) = v_2(t) = \frac{1}{3} \text{ [V]} \quad (2.43)$$

Los resultados precedentes motivan los siguientes comentarios

- La corriente $i(t)$ contiene un impulso (delta de Dirac)

$$i(t) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (v_1(0^-) - v_2(0^-)) \delta(t) \quad (2.44)$$

Esto quiere decir que en un tiempo infinitamente breve, hay una transferencia de carga entre ambos condensadores; esa carga transferida es igual a

$$q(t) = \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (v_1(0^-) - v_2(0^-)) \quad (2.45)$$

- La corriente es cero $\forall t \neq 0$, lo cual quiere decir que las tensiones en los condensadores cambian bruscamente en $t = 0$, pero luego permanecen constantes.
- Las tensiones también se pueden escribir como

$$v_1(t) = v_2(t) = \frac{q_1(0^-) - q_2(0^-)}{C_1 + C_2} \quad (2.46)$$

donde $q_1(0^-)$ y $q_2(0^-)$ son las cargas en los condensadores, justo antes de cerrar el interruptor. Esto quiere decir que las tensiones son cero $\forall t \geq 0$ si y sólo si ambas cargas en $t = 0^-$ son iguales en magnitud, pero de signo opuesto.

- Es crucial en la solución de este problema el que la T.L se haya definido como una integral desde $t = 0^-$, porque así se logra que las **condiciones iniciales antes de cerrar el interruptor**, se puedan incorporar al proceso de responder a la pregunta planteada

Errores

En la solución de este problema, los errores que suelen cometerse son pocos, pero más importante que ello, es que los resultados sean consistentes con las leyes físicas

Error 1 La corriente resulta distinta a cero para $t > 0$. Ello es imposible, porque la LVK dice que ambas tensiones son iguales $\forall t \geq 0$, lo cual indica que no puede haber corriente, porque ésta es un flujo de cargas, lo cual desbalancearía las tensiones.

Error 2 El resultado de las tensiones se escribe como

$$v_1(t) = v_2(t) = \frac{C_1 v_1(0^-) - C_2 v_2(0^-)}{C_1 + C_2} \cdot \mu(t) \quad (2.47)$$

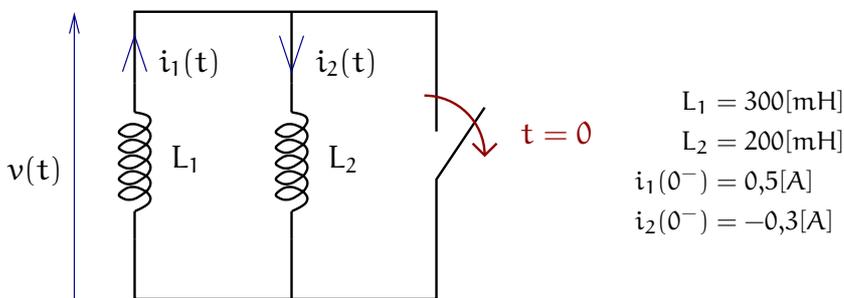
donde $\mu(t)$ es un escalón unitario. Esa respuesta indica, **arbitrariamente**, que las tensiones son iguales a cero para $t < 0$. Y eso, no lo sabemos. Es necesario tener siempre presente, cuando se aplica análisis a partir de $t = 0$ que las condiciones iniciales condensan la historia de la red, pero no dan más información que el valor instantáneo de ciertas variables en $t = 0^-$ (menos sobre lo que ocurrió para $t < 0$).

Error 3 Se llega a que las tensiones son continuas en $t = 0$, es decir, no cambian bruscamente. Ello sólo es posible si la corriente es cero en $t = 0$. A su vez, eso sólo es posible, si las tensiones iniciales son iguales.

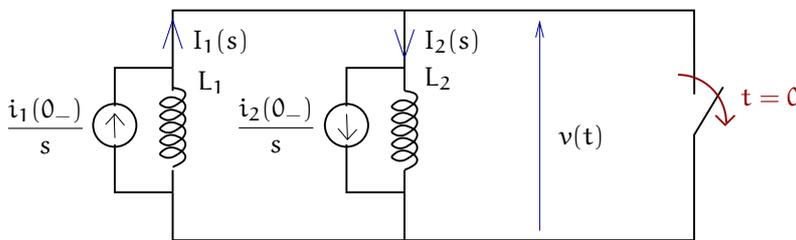
Una variante de interés

La degeneración en redes capacitivas tiene un dual en redes inductivas con degeneraciones. Un ejemplo se muestra en la siguiente figura, donde el interruptor, cerrado para $t < 0$, se abre en $t = 0$.

En estos casos la degeneración aparece al aplicar LCK, de modo que sólo aparecen corrientes en inductores y, posiblemente, corrientes de fuentes independientes de corriente.



En esta red se desea calcular las corrientes $\forall t \geq 0$. Lo primero que hacemos es llevar la red al dominio de la T.L., como se muestra en la siguiente figura.



Aplicando LCK, una vez abierto el interruptor, tenemos que $I_1(s) = I_2(s)$, donde

$$I_1(s) = \frac{i_1(0^-)}{s} - \frac{V(s)}{sL_1}; \quad I_2(s) = \frac{i_2(0^-)}{s} + \frac{V(s)}{sL_2} \tag{2.48}$$

lo cual lleva a

$$V(s) = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (i_1(0^-) - i_2(0^-)) \tag{2.49}$$

y a

$$I_1(s) = I_2(s) = \frac{L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-)}{s(L_1 + L_2)} \tag{2.50}$$

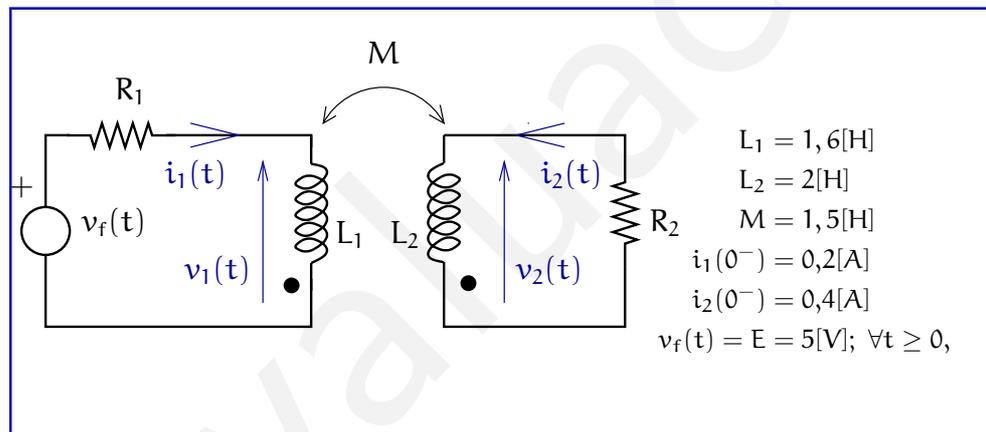
$$i_1(t) = i_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-)}{s(L_1 + L_2)} \right\} \quad (2.51)$$

$$= \frac{L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-)}{L_1 + L_2} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.52)$$

2.2.4. Redes inductivas con acoplamiento magnético

Problema 2.4.

Considere la red de la figura



Se requiere calcular $i_2(t) \forall t \geq 0$.

Solución

Lo primero que es conveniente notar es que la red original también puede dibujarse como aparece en la Figura 2.4. Esta última red sólo se diferencia de la red original, por una conexión en la base del acoplamiento magnético. Esta modificación no altera el valor de las variables, ya que, por simple aplicación de la LCK, se sabe que $i_3(t) = 0$. Esta condición hace que, desde el punto de vista de sus comportamientos, ambas redes son idénticas; sin embargo, esta modificación neutra ayuda a construir una red equivalente a la original, sin acoplamiento.

Las ecuaciones para $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (2.53)$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (2.54)$$

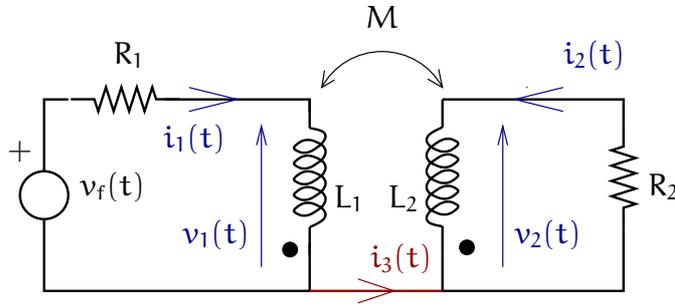


Figura 2.3: Red equivalente en el dominio del tiempo.

Al aplicar transformada de Laplace a estas ecuaciones, se llega a

$$V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - \overbrace{(L_1 i_1(0^-) + Mi_2(0^-))}^{V_{e1}(s)} \quad (2.55)$$

$$V_1(s) = sL_2 I_2(s) + sMI_1(s) - \overbrace{(L_2 i_2(0^-) + Mi_1(0^-))}^{V_{e2}(s)} \quad (2.56)$$

Con las expresiones precedentes, se puede construir la red en el dominio de la T.L. que se muestra en la Figura 2.4.

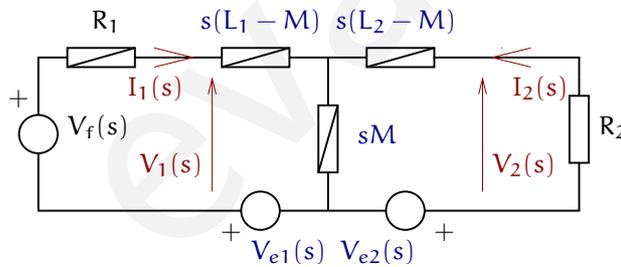


Figura 2.4: Red equivalente en el dominio de la T.L.

En base a la red de la Figura 2.4, y tras aplicación del método de mallas, se obtiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix} sL_1 + R_1 & sM \\ sM & sL_2 + R_2 \end{bmatrix}}_{Z_m(s)} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_f(s) + V_{e1}(s) \\ V_{e2}(s) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Esta ecuación se puede resolver en forma compacta, invirtiendo la matriz

$Z_m(s)$, lo cual lleva a

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} sL_2 + R_2 & -sM \\ -sM & sL_1 + R_1 \end{bmatrix}}{\underbrace{s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2}_{\Delta(s)}} \begin{bmatrix} V_f(s) + V_{e1}(s) \\ V_{e2}(s) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

lo cual lleva a

$$I_2(s) = \frac{1}{\Delta(s)} (-sM(V_f(s) + V_{e1}(s)) + (sL_1 + R_1)V_{e2}(s)) \quad (2.59)$$

$$= \frac{-sMV_f(s)}{\Delta(s)} + \frac{-sMV_{e1}(s) + (sL_1 + R_1)V_{e2}(s)}{\Delta(s)} \quad (2.60)$$

La expresión precedente indica que la forma general de la corriente $i_2(t)$ es

$$i_2(t) = I_0 + I_1 e^{\lambda_1 t} + I_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{o} \quad i_2(t) = I_0 + I_1 e^{\lambda_1 t} + I_2 t e^{\lambda_1 t} \quad (2.61)$$

donde el término constante I_0 se origina en la naturaleza de $v_f(t)$, y los otros términos provienen del comportamiento natural de la red, donde λ_1 y λ_2 son las frecuencias naturales. La forma alternativa que se indica en la ecuación aparece cuando $\lambda_1 = \lambda_2$. Dado que $v_f(t)$ es constante $\forall t \geq 0$

Las frecuencias naturales de esta red, λ_1 y λ_2 , son los valores de s que hacen cero el determinante de $Z_m(s)$, es decir, las raíces de $\Delta(s)$. En este caso, esas frecuencias son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(L_1R_2 + L_2R_1) \pm \sqrt{(L_1R_2 + L_2R_1)^2 - 4R_1R_2(L_1L_2 - M^2)}}{2(L_1L_2 - M^2)} \quad (2.62)$$

Note que el discriminante se puede escribir como

$$(L_1R_2 + L_2R_1)^2 - 4R_1R_2(L_1L_2 - M^2) = (L_1R_2 - L_2R_1)^2 + 4R_1R_2M^2 > 0 \quad (2.63)$$

Como el discriminante es mayor que cero, entonces, las frecuencias naturales son siempre reales. Por otro lado, *Siempre se cumple que $L_1L_2 > M^2$*

$$(L_1R_2 + L_2R_1) > \sqrt{(L_1R_2 + L_2R_1)^2 - 4R_1R_2(L_1L_2 - M^2)} \quad (2.64)$$

por lo cual, las frecuencias naturales son reales y **negativas**.

Si usamos los valores numéricos dados, y desarrollamos en fracciones parciales (ver Apéndice A) se obtiene

$$I_2(s) = \frac{7,6(2875 + s)}{19s^2 + 1,04 \cdot 10^5 s + 4,0 \cdot 10^7} = \frac{0,212}{s + 416,27} + \frac{0,188}{s + 5057,41} \quad (2.65)$$

donde $\lambda_1 = -416,27$ y $\lambda_2 = -5057,41$.

Aplicando T.L. inversa a (2.65) se llega finalmente a

$$i_2(t) = 0,212e^{-416,27t} + 0,188e^{-5057,41t} \quad (2.66)$$

Los resultados precedentes se pueden entender en mayor profundidad a través de las siguientes observaciones:

- Las frecuencias naturales de esta red son siempre reales, con independencia de los valores de las componentes. Eso es lo que indica la ecuación (2.63). Conceptualmente ello se explica porque frecuencias naturales complejas implican oscilaciones (amortiguadas, si hay resistores), lo cual sólo es posible si hubiesen condensadores además de inductores.
- Las tensiones $V_{e1}(s)$ y $V_{e2}(s)$ son constantes en s , lo cual significa que $v_{e1}(t)$ y $v_{e2}(t)$ son deltas de Dirac.
- La corriente $i_1(t)$ tiende a una constante. De la ecuación matricial (2.58) se tiene que

$$I_1(s) = \frac{(sL_2 + R_2)(V_f(s) + V_{e1}(s)) - sMV_{e2}(s)}{\Delta(s)} \quad (2.67)$$

Al aplicar el teorema del valor final (TVF), se obtiene

$$i_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} I_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR_2V_f(s)}{\Delta(s)} = \frac{E}{R_1} \quad (2.68)$$

- La corriente $i_2(t)$, dada por (2.66), tiende asintóticamente a cero. Ello se explica porque, como se demostró en la observación anterior, la corriente $i_1(t)$ tiende a una constante. Por ello, el flujo magnético tiende también a ser constante, con lo que no hay tensión inducida en L_2 y, en consecuencia, la corriente $i_2(t)$ tiende a cero.
- La expresión (2.59) debe ser consistente con todos los datos. Entre ellos, debe satisfacer la condición inicial $i_2(0^-)$, la que es igual a $i_2(0^+)$, ya que no hay degeneraciones. Aplicando el teorema del valor inicial (TVI), se obtiene

$$i_2(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} I_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-sME - s^2MV_{e1}(s) + s(sL_1 + R_1)V_{e2}(s)}{\Delta(s)} \quad (2.69)$$

y, tras aplicar L'Hôpital, se obtiene que ese límite es igual a $i_2(0^-)$.

Una variante de interés

Se desea saber qué cambios en la señal $i_2(t)$ se producirían, si se invirtiese el sentido del acoplamiento, tal como se muestra en la figura.

En este caso las ecuaciones para la red son

La situación es diferente si hay fuentes controladas. En ese caso las frecuencias naturales pueden ser reales o complejas.

El TVF tiene limitaciones; vea el Apéndice A.

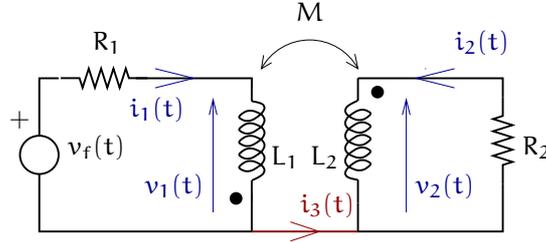


Figura 2.5: Red equivalente en el dominio del tiempo, con acoplamiento de polaridad invertida.

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (2.70)$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (2.71)$$

Se ha indicado, en color granate, el cambio originado por haber revertido la polaridad del acoplamiento. Se trata sólo de un cambio en el signo que acompaña la inductancia mutua. Así, la ecuación (2.59) se convierte en

$$I_2(s) = \frac{sMV_f(s)}{\Delta(s)} + \frac{sMV_{e1}(s) + (sL_1 + R_1)V_{e2}(s)}{\Delta(s)} \quad (2.72)$$

Son embargo, el determinante $\Delta(s)$ no se modifica, porque allí la inductancia M aparece siempre en forma cuadrática. Entonces

$$\Delta(s) = s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2 \quad (2.73)$$

Esta invariancia del determinante implica que las frecuencias naturales (que son raíces de $\Delta(s) = 0$) tampoco cambian. En consecuencia, la expresión para $i_2(t)$ sólo difiere de la original por un cambio de signo, así

$$i_2(t) = -0,212e^{-416,27t} - 0,188e^{-5057,41t} \quad (2.74)$$

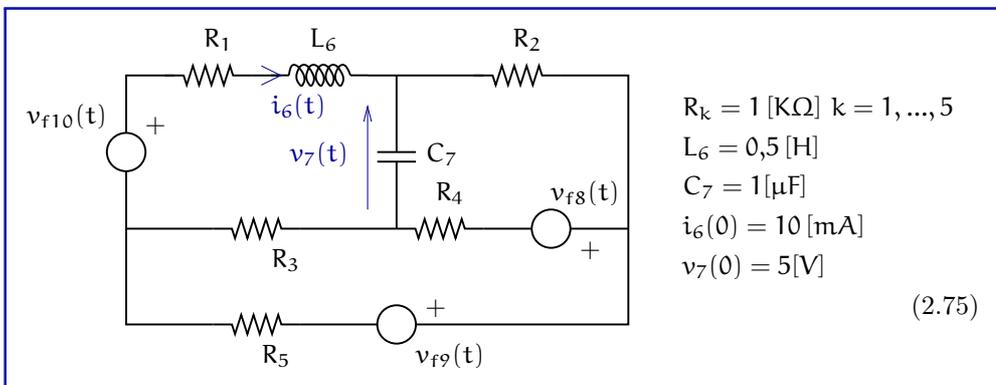
Este resultado no es sorprendente, porque si en la red original, junto con invertir la polaridad del acoplamiento, hubiésemos invertido el sentido de la variable $i_2(t)$, entonces la ecuaciones para la corriente buscada se habrían mantenido sin variaciones.

2.3. Métodos generales y Transformación de Laplace

2.3.1. Método de mallas, sin fuentes controladas

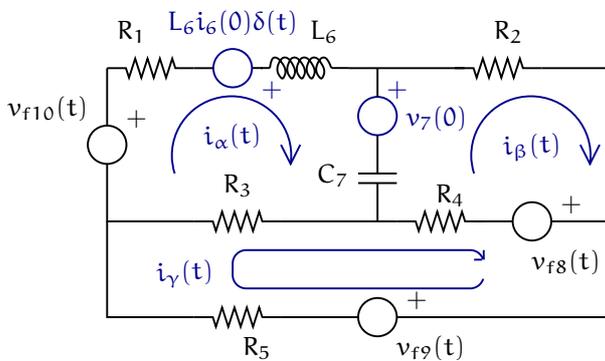
Problema 2.5.

En la red de la figura se pide formular un conjunto consistente de ecuaciones para calcular las corrientes de mallas. ¿Qué puede decir sobre los modos naturales de la red?



Solución

Primero definimos las corrientes de mallas y hacemos explícitas las condiciones iniciales, a través de fuentes equivalentes. Para simplificar el tratamiento, se eligen las tres corrientes de mallas en el mismo sentido. El resultado se muestra en la siguiente figura



Entonces, las ecuaciones de mallas se pueden formular directamente, por aplicación simultánea de la LVK, la LCK y las relaciones terminales de los elementos. En forma compacta

$$\mathbf{Z}_m(s) \cdot \mathbf{I}_m(s) = \mathbf{E}_m(s) \quad (2.76)$$

donde la matriz de impedancia de mallas $\mathbf{Z}_m(s)$ está dada por

$$\mathbf{Z}_m(s) = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + sL_6 + 1/sC_7 & -1/sC_7 & -R_3 \\ -1/sC_7 & R_2 + R_4 + 1/sC_7 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Por su parte, el vector de corrientes de mallas $\mathbf{I}_m(s)$ y el vector de tensiones de excitación $\mathbf{E}_m(s)$ están dados por

$$\mathbf{I}_m(s) = \begin{bmatrix} I_\alpha(s) \\ I_\beta(s) \\ I_\gamma(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_m(s) = \begin{bmatrix} V_{f10}(s) + L_6 i_6(0) - v_7(0)/s \\ v_7(0)/s - V_{f8}(s) \\ V_{f8}(s) - V_{f9}(s) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

A partir de estas ecuaciones, se pueden calcular las corrientes de mallas a través de la fórmula

Los modos forzados están asociados a los valores de s que hacen cero los denominadores de $V_{f8}(s)$, $V_{f9}(s)$ y $V_{f10}(s)$ (que aparecen en el vector $\mathbf{E}_m(s)$).

$$\mathbf{I}_m(s) = \mathbf{Z}_m(s)^{-1} \cdot \mathbf{E}_m(s) \quad (2.79)$$

Así, los modos naturales están asociados a los valores de s que hacen cero el determinante de $\mathbf{Z}_m(s)$. Ese determinante está dado por

$$\begin{aligned} \det \mathbf{Z}_m(s) = & \frac{(L_6 C_7 R_4 R_3 + L_6 C_7 R_2 R_3 + L_6 C_7 R_2 R_4 + L_6 C_7 R_2 R_5 + L_6 C_7 R_4 R_5) s^2}{s C_7} + \\ & \frac{(R_1 C_7 R_4 R_5 + R_1 C_7 R_2 R_5 + R_3 C_7 R_2 R_4 + R_1 C_7 R_2 R_4 + L_6 R_3 + L_6 R_4 + L_6 R_5) s}{s C_7} + \\ & \frac{(R_1 C_7 R_2 R_3 + R_1 C_7 R_4 R_3 + R_3 C_7 R_2 R_5 + R_3 C_7 R_4 R_5) s}{s C_7} + \\ & \frac{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_2 R_5 + R_4 R_5 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_3 R_5}{s C_7} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para estos cálculos use MAPLE o MATHEMATICA .

Reemplazando los valores numéricos se obtiene

$$\det \mathbf{Z}_m(s) = \frac{2,5s^2 + 9500s + 8 \cdot 10^6}{s} \quad (2.81)$$

Los valores de s que hacen cero este determinante son

$$\lambda_1 = -1259,69; \quad y \quad \lambda_2 = -2540,31 \quad (2.82)$$

Entonces, los modos naturales en esta red son

$$e^{-1259,69t} \quad \text{y} \quad e^{-2540,31t} \quad (2.83)$$

Con estos resultados se pueden hacer las siguientes observaciones

- La aplicación del método de mallas da origen a un sistema consistente de ecuaciones, ya que se generan tres ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas (las tres corrientes de mallas).
- Las condiciones iniciales son continuas en $t = 0$, porque no hay degeneraciones.
- Los modos naturales son dos porque hay dos elementos dinámicos y ninguna degeneración.
- En este caso, dados los valores numéricos particulares, los modos son exponenciales decrecientes. Sin embargo, dado que hay un inductor y un condensador, es posible que, con otros valores numéricos de las componentes, los modos naturales se combinene para dar origen a una sinusoidal amortiguada exponencialmente. Lo que no puede ocurrir es que aparezcan modos que no decaigan a cero.
- El vector de corrientes de mallas se puede separar en la siguiente forma

$$\mathbf{I}_m(s) = \underbrace{\mathbf{Z}_m(s)^{-1} \cdot \mathbf{E}_{me}(s)}_{\mathbf{I}_{me}(s)} + \underbrace{\mathbf{Z}_m(s)^{-1} \cdot \mathbf{E}_{mx}(s)}_{\mathbf{I}_{mx}(s)} \quad (2.84)$$

donde

$$\mathbf{E}_{me}(s) = \begin{bmatrix} V_{f10}(s) \\ -V_{f8}(s) \\ V_{f8}(s) - V_{f9}(s) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{mx}(s) = \begin{bmatrix} L_6 i_6(0) - v_7(0)/s \\ v_7(0)/s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Esta descomposición permite identificar, por separado, el efecto de las excitaciones independientes y el de las condiciones iniciales.

- En ambas componentes aparecen los modos naturales; sin embargo, los modos forzados aparecen sólo en $\mathbf{I}_{me}(s)$, ya que sólo allí intervienen las fuentes independientes, cuyos denominadores determinan los modos forzados.

Errores

Los errores mas comunes en este problema son

Error 1 Representación incorrecta de las condiciones iniciales.

Error 2 Omisión de términos o error de signo en la formulación de la LVK

Error 3 Representación incorrecta de las impedancias del inductor y/o del condensador

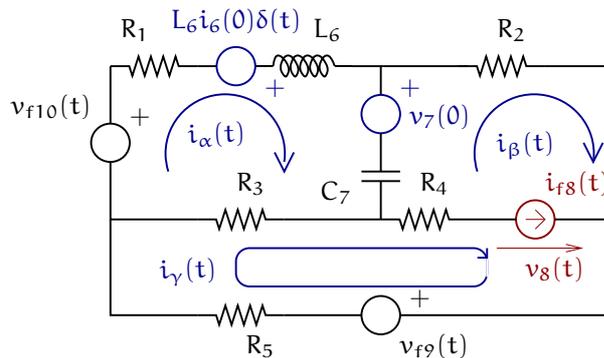
Error 4 Errores algebraicos que conducen a una expresión para $\det \mathbf{Z}_m(s)$ en la que aparecen términos con diferentes signos. Esto genera un error conceptual porque daría origen a modos naturales que crecen en el tiempo.

Error 5 Errores algebraicos que llevan a concluir que hay tres (o más) modos naturales. Ello también conlleva un error conceptual porque habiendo sólo dos componentes dinámicas, sólo puede haber dos modos naturales.

Una variante de interés

Suponga que la fuente independiente de tensión $v_{f8}(t)$ es sustituida por una fuente independiente de corriente $i_{f8}(t)$. Nos interesa averiguar como cambian las ecuaciones del método de mallas.

Para hacer el estudio, consideramos la red eléctrica de la figura



En primer lugar podemos, en las ecuaciones (2.76) a (2.78) reemplazar $V_{f8}(s)$ por $V_8(s)$. Ello, aparentemente resuelve el problema. Sin embargo, la tensión $V_8(s)$ es desconocida, por lo que tendríamos un sistema de tres ecuaciones, con cuatro incógnitas, es decir, nuestro modelo matemático, hasta este punto, es inconsistente. Necesitamos una cuarta ecuación. Esta ecuación surge de usar el hecho que la componente número 8 de la red es una fuente independiente de corriente $i_{f8}(s)$, lo que constituye una información no utilizada hasta ahora. Así, la ecuación faltante es

$$-I_\beta(s) + I_\gamma(s) = I_{f8}(s) \quad (2.86)$$

Con esta relación, las ecuaciones del método de mallas se pueden escribir, en forma compacta como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Z}}_m(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} I_\alpha(s) \\ I_\beta(s) \\ I_\gamma(s) \\ V_8(s) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{I}}_m(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_{f10}(s) + L_6 i_6(0) - v_7(0)/s \\ v_7(0)/s \\ -V_{f9}(s) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{E}}_m(s)} \quad (2.87)$$

Respecto de esta ecuación, conviene formular las siguientes observaciones

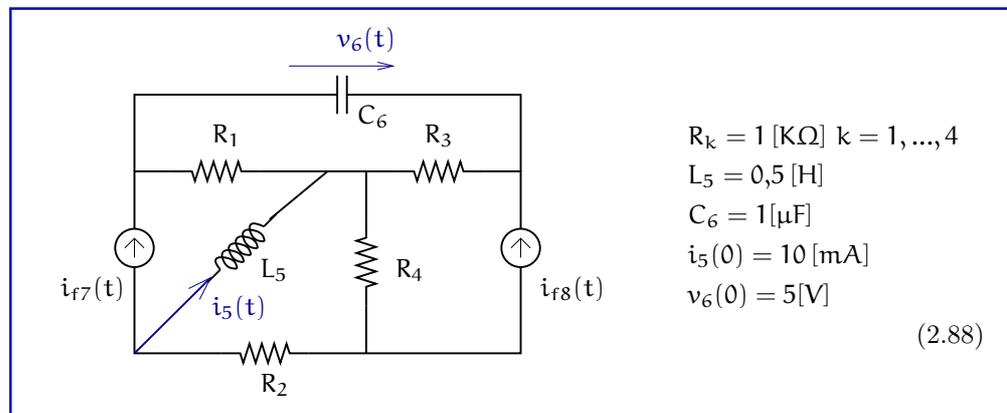
- Se puede observar que el número de incógnitas es cuatro, pero ahora aumentó el número de ecuaciones independientes.
- Si se compara el vector de excitaciones original $\mathbf{E}_m(s)$ con el nuevo $\tilde{\mathbf{E}}_m(s)$, se aprecia que se diferencian sólo en que en este último no aparece el término $V_{f8}(s)$.
- A su vez, el nuevo vector de incógnitas $\tilde{\mathbf{I}}_m(s)$ difiere del original, $\mathbf{I}_m(s)$, sólo en que el primero tiene un elemento adicional: la nueva incógnita $V_8(s)$. Note que el nuevo vector es dimensionalmente híbrido, porque incluye corrientes y tensiones (por simplicidad se preservó la notación I).
- Los modos naturales no son alterados al cambiar la fuente independiente de tensión por una fuente independiente de corriente, ya que las fuentes independientes no tienen ningún efecto en los modos naturales.

En cambio, los modos naturales, en general, sí dependen de las fuentes controladas.

2.3.2. Método de nodos, sin fuentes controladas

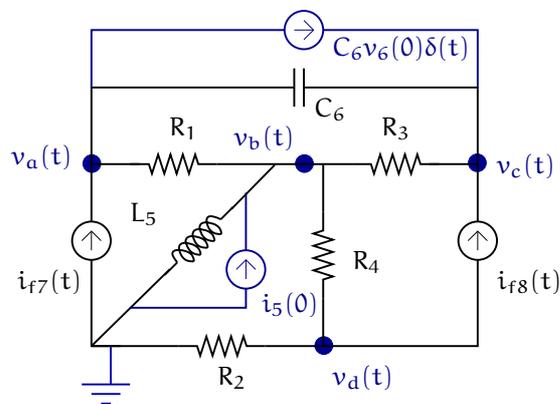
Problema 2.6.

En la red de la figura se pide formular un conjunto consistente de ecuaciones para calcular las tensiones de nodo a tierra. La tierra se elige en el nodo donde inciden los elementos 2, 5 y 7. ¿Qué puede decir sobre los modos naturales de la red?



Solución

Para empezar, asignamos símbolos a las tensiones de nodo (respecto del norte de tierra especificado). Identificamos cuatro nodos, con sus respectivas tensiones $v_a(t)$, $v_b(t)$, $v_c(t)$, $v_d(t)$. Todas ellas han sido elegidas con polaridad positiva respecto de la tierra. Adicionalmente, hacemos explícitas las condiciones iniciales a través de fuentes de corriente equivalentes. El resultado se muestra en la siguiente red



Entonces, las ecuaciones de nodos se pueden formular directamente, por aplicación simultánea de la LCK, la LVK y las relaciones terminales de los elementos. En forma compacta

$$\mathbf{Y}_n(s) \cdot \mathbf{V}_n(s) = \mathbf{I}_n(s) \quad (2.89)$$

donde la matriz de admitancia de nodos $\mathbf{Y}_n(s)$ está dada por

$$\mathbf{Z}_m(s) = \begin{bmatrix} G_1 + sC_6 & -G_1 & -sC_6 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_3 + G_4 + 1/sL_5 & -G_4 & -G_3 \\ -sC_6 & -G_4 & G_4 + sC_6 & 0 \\ 0 & -G_3 & 0 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Note que hemos usado los valores de conductancia, en vez de las resistencias, para así simplificar las expresiones. Por su parte, el vector de tensiones de nodos $\mathbf{V}_n(s)$ y el vector de corrientes de excitación $\mathbf{I}_n(s)$ están dados por

$$\mathbf{V}_n(s) = \begin{bmatrix} V_a(s) \\ V_b(s) \\ V_c(s) \\ V_d(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_n(s) = \begin{bmatrix} I_{f7}(s) - C_6 v_6(0) \\ i_5(0)/s \\ C_6 v_6(0) + I_{f8}(s) \\ -I_{f8}(s) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

A partir de estas ecuaciones, se pueden calcular las tensiones de nodos a través de la fórmula

$$\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{Y}_n(s)^{-1} \cdot \mathbf{I}_n(s) \quad (2.92)$$

Los modos naturales están asociados entonces a los valores de s que hacen cero el determinante de $\mathbf{Y}_n(s)$. Ese determinante está dado por

$$\det \mathbf{Y}_n(s) = \frac{(C_6 G_3 L_5 G_4 G_2 + G_1 G_3 L_5 C_6 G_2) s^2}{s L_5} + \frac{(G_4 C_6 G_3 + G_1 C_6 G_2 + G_1 C_6 G_3 + G_4 C_6 G_2 + G_1 G_3 L_5 G_4 G_2) s}{s L_5} + \frac{G_1 G_4 G_2 + G_1 G_4 G_3}{s L_5} \quad (2.93)$$

Si aplicamos a la expresión precedente los valores numéricos dados, se obtiene

$$\det \mathbf{Y}_n(s) = 2 \cdot 10^{-15} \frac{s^2 + 4500s + 2 \cdot 10^6}{s} \quad (2.94)$$

Los valores de s que hacen cero este determinante son

$$\lambda_1 = -500; \quad y \quad \lambda_2 = -4000 \quad (2.95)$$

Entonces, los modos naturales en esta red son

$$e^{-500t} \quad y \quad e^{-4000t} \quad (2.96)$$

Con estos resultados se pueden hacer las siguientes observaciones

Los modos forzados están asociados a los valores de s que hacen cero los denominadores de $I_{f7}(s)$ e $I_{f8}(s)$ (que aparecen en el vector $\mathbf{I}_n(s)$).

- La aplicación del método de nodos da origen a un sistema consistente de ecuaciones, ya que se generan cuatro ecuaciones linealmente independientes con cuatro incógnitas (las cuatro tensiones de nodos).
- Las condiciones iniciales son continuas en $t = 0$, porque no hay degeneraciones.
- Los modos naturales son dos porque hay dos elementos dinámicos y ninguna degeneración.
- En este caso, dados los valores numéricos particulares, los modos son exponenciales decrecientes. Sin embargo, dado que hay un inductor y un condensador, es posible que, con otros valores numéricos de las componentes, los modos naturales se combinen para dar origen a una sinusoidal amortiguada exponencialmente. Lo que no puede ocurrir es que aparezcan modos que no decaigan a cero.
- El vector de tensiones de nodos se puede separar en la siguiente forma

$$\mathbf{V}_n(s) = \underbrace{\mathbf{Y}_n(s)^{-1} \cdot \mathbf{I}_{ne}(s)}_{\mathbf{V}_{ne}(s)} + \underbrace{\mathbf{Y}_n(s)^{-1} \cdot \mathbf{I}_{nx}(s)}_{\mathbf{V}_{ne}(s)} \quad (2.97)$$

donde

$$\mathbf{I}_{ne}(s) = \begin{bmatrix} I_{f7}(s) \\ 0 \\ I_{f8}(s) \\ -I_{f8}(s) \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{nx}(s) = \begin{bmatrix} C_6 v_6(0) \\ i_5(0)/s \\ C_6 v_6(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Esta descomposición permite identificar, por separado, el efecto de las excitaciones independientes y el de las condiciones iniciales.

- En ambas componentes aparecen los modos naturales; sin embargo, los modos forzados aparecen sólo en $\mathbf{V}_{ne}(s)$, ya que sólo allí intervienen las fuentes independientes, cuyos denominadores determinan los modos forzados.

Errores

Los errores más comunes en este problema son analogos a los que se pueden incurrir en el análisis por mallas

Error 1 Representación incorrecta de las condiciones iniciales.

Error 2 Omisión de términos o error de signo en la formulación de la LCK

Error 3 Representación incorrecta de las admintancia del inductor y/o del condensador

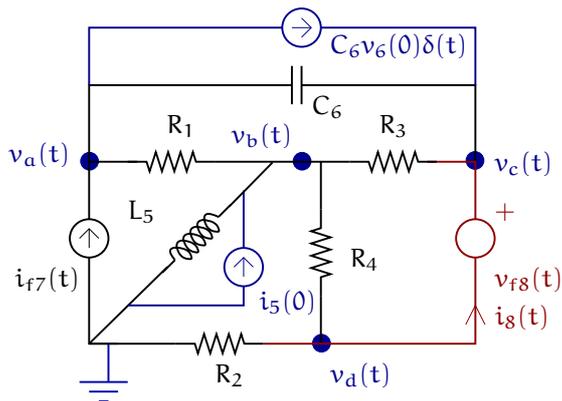
Error 4 Errores algebraicos que conducen a una expresión para $\det \mathbf{Y}_n(s)$ en la que aparecen sumandos con diferentes signos. Esto genera un error conceptual porque daría origen a modos naturales que crecen en el tiempo.

Error 5 Errores algebraicos que llevan a concluir que hay tres (o más) modos naturales. Ello también conlleva un error conceptual porque habiendo sólo dos componentes dinámicas, sólo puede haber dos modos naturales.

Una variante de interés

Suponga que la fuente independiente de corriente $i_{f8}(t)$ es sustituida por una fuente independiente de tensión $v_{f8}(t)$. Nos interesa averiguar como cambian las ecuaciones del método de nodos.

Para hacer el estudio, consideramos la red eléctrica de la figura



En primer lugar podemos, en las ecuaciones (2.89) a (2.91), reemplazar $I_{f8}(s)$ por $I_8(s)$. Ello, aparentemente resuelve el problema. Sin embargo, la corriente $I_8(s)$ es desconocida, por lo que tendríamos un sistema de cuatro ecuaciones, con cinco incógnitas, es decir, nuestro modelo matemático, hasta este punto, es inconsistente. Necesitamos una quinta ecuación. Esta ecuación surge de usar el hecho que la componente número 8 de la red es una fuente independiente de tensión $V_{f8}(s)$, lo que constituye una información no utilizada hasta ahora. Así, la ecuación faltante es

$$V_c(s) - V_d(s) = V_{f8}(s) \tag{2.99}$$

Con esta relación, las ecuaciones del método de nodos se pueden escribir, en forma compacta como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Y}}_n(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a(s) \\ V_b(s) \\ V_c(s) \\ V_d(s) \\ I_8(s) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{V}}_n(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{f7}(s) - C_6 v_6(0) \\ i_5(0)/s \\ C_6 v_6(0) \\ 0 \\ V_{f8}(s) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{I}}_n(s)} \quad (2.100)$$

Respecto de esta ecuación, conviene formular las siguientes observaciones

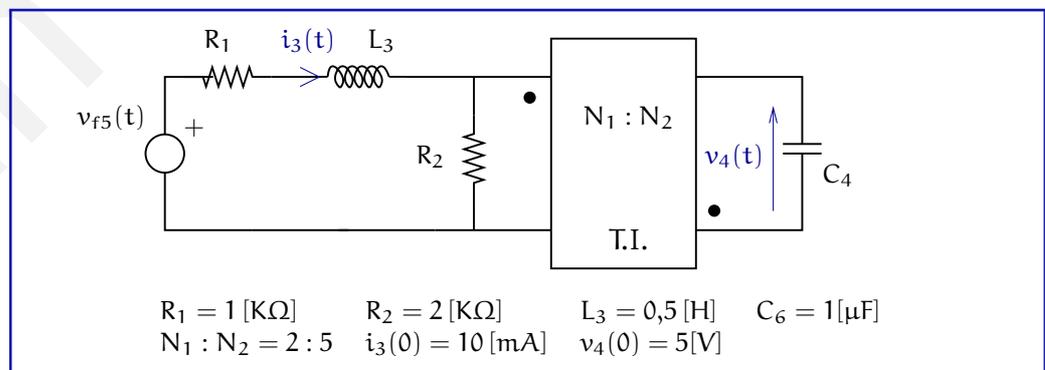
- Se puede observar que el número de incógnitas es cinco, pero ahora aumentó el número de ecuaciones independientes.
- Si se compara el vector de excitaciones original $\mathbf{I}_n(s)$ con el nuevo $\tilde{\mathbf{I}}_n(s)$, se aprecia que se diferencian sólo en que en este último no aparece el término $I_{f8}(s)$.
- A su vez, el nuevo vector de incógnitas $\tilde{\mathbf{V}}_n(s)$ difiere del original, $\mathbf{V}_n(s)$, sólo en que el primero tiene un elemento adicional: la nueva incógnita $I_8(s)$. Note que el nuevo vector es dimensionalmente híbrido, porque incluye corrientes y tensiones (por simplicidad se preservó la notación I).
- Los modos naturales no son alterados al cambiar la fuente independiente de corriente por una fuente independiente de tensión, ya que las fuentes independientes no tienen ningún efecto en los modos naturales.

En cambio, los modos naturales, en general, sí dependen de las fuentes controladas.

2.3.3. Método de mallas, con fuentes controladas

Problema 2.7.

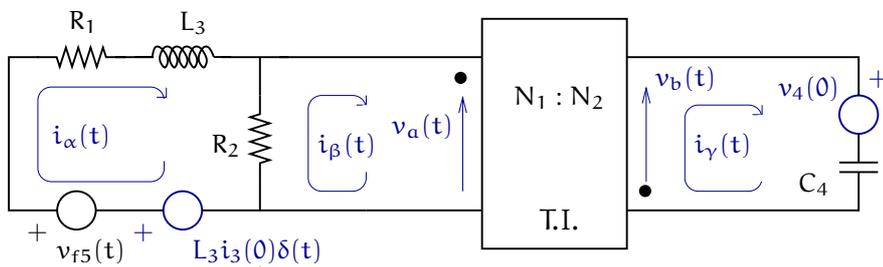
Considere la red de la figura, en la que aparece un transformador ideal con razón de transformación $N_1 : N_2$.



Se requiere aplicar el método de mallas para obtener un modelo matemático consistente. Se pide, además, calcular los modos naturales de esta red.

Solución

Antes de aplicar el método de mallas, definimos las corrientes de mallas, hacemos explícitas las condiciones iniciales (usando fuentes de tensión equivalentes) y definimos las tensiones en ambos lados del transformador ideal. El resultado de muestra en la figura



Con referencia a esta red, formulamos las ecuaciones de mallas. En una primera etapa, tratamos las tensiones en el T.I., como si fuesen fuentes independientes de tensión. Entonces se obtiene

$$\mathbf{Z}_m(s) \cdot \mathbf{I}_m(s) = \tilde{\mathbf{E}}_m(s) \tag{2.101}$$

donde la matriz de impedancia de mallas $\mathbf{Z}_m(s)$ está dada por

$$\mathbf{Z}_m(s) = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + sL_3 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sC_4 \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

Por su parte, el vector de corrientes de mallas $\mathbf{I}_m(s)$ y el vector de tensiones de excitación y del T.I. $\tilde{\mathbf{E}}_m(s)$ están dados por

$$\mathbf{I}_m(s) = \begin{bmatrix} I_\alpha(s) \\ I_\beta(s) \\ I_\gamma(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_m(s) = \begin{bmatrix} V_{f5}(s) + L_3 i_3(0) \\ -V_a(s) \\ V_b(s) - v_4(0)/s \end{bmatrix} \tag{2.103}$$

Este sistema de ecuaciones no es consistente, porque está formado por tres ecuaciones independientes, en **cinco incógnitas**. Las incógnitas son las tres corrientes de mallas y, además, $V_a(s)$ y $V_b(s)$. En consecuencia, necesitamos dos ecuaciones independientes adicionales. Ellas se obtienen de las ecuaciones del T.I., ya que aún no han sido usadas. Esas ecuaciones son

$$N_2 V_a(s) = -N_1 V_b(s); \quad N_1 I_\beta(s) = -N_2 I_\gamma(s) \tag{2.104}$$

Debe satisfacerse el teorema de Tellegen:
 $V_a(s)I_\beta(s) = V_b(s)I_\gamma(s)$.

Agregando estas ecuaciones a las que aparecen en (2.78), se llega al siguiente sistema consistente.

$$\tilde{\mathbf{Z}}_m(s) \cdot \tilde{\mathbf{I}}_m(s) = \mathbf{E}_m(s) \quad (2.105)$$

donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m(s) & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & N_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Z}}_m(s)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_\alpha(s) \\ I_\beta(s) \\ I_\gamma(s) \\ V_a(s) \\ V_b(s) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{I}}_m(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_{f5}(s) + L_3 i_3(0) \\ 0 \\ -v_4(0)/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_m(s)} \quad (2.106)$$

Entonces

$$\tilde{\mathbf{I}}_m(s) = \tilde{\mathbf{Z}}_m(s)^{-1} \cdot \mathbf{E}_m(s) \quad (2.107)$$

Así, los modos naturales están asociados a los valores de s que hacen cero el determinante de $\tilde{\mathbf{Z}}_m(s)$. Éste está dado por

$$\det \tilde{\mathbf{Z}}_m(s) = -\frac{L_3 R_2 N_2^2 C_4 s^2 + (R_1 R_2 N_2^2 C_4 + L_3 N^2) s + R_1 N_1^2 + R_2 N_1^2}{s C_4} \quad (2.108)$$

Al aplicar los valores numéricos se obtiene

$$\det \tilde{\mathbf{Z}}_m(s) = -\frac{25000s^2 + 5,2 \cdot 10^7 s + 1,2 \cdot 10^{10}}{s} \quad (2.109)$$

cuyas raíces son

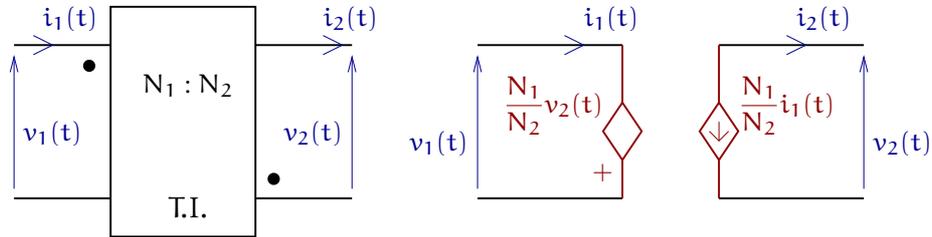
$$\lambda_1 = -1815,63 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -264,37 \quad (2.110)$$

En consecuencia los modos naturales son

$$e^{-1815,63t} \quad \text{y} \quad e^{-264,37t} \quad (2.111)$$

Los resultados obtenidos y los pasos para obtenerlos, merecen los siguientes comentarios

- Este problema corresponde a la categoría de redes con fuentes controladas, porque el T.I. sólo puede describirse usando este tipo de fuentes. Recordemos la equivalencia (para esta polaridad del acoplamiento)



La equivalencia alternativa se obtiene intercambiando las fuentes, y corrigiendo adecuadamente los valores.

- Aunque hay fuentes controladas, en este problema los modos naturales siguen siendo decrecientes. Ello siempre es así para redes RLCM con T.I., ya que a pesar que este último se modela con fuentes controladas, su naturaleza es la de un elemento de cuatro terminales de tipo pasivo y conservativo (no genera ni disipa energía).
- Sin perjuicio del comentario precedente, se puede afirmar que los modos naturales dependen numéricamente del cociente N_1/N_2 .
- Una forma alternativa de analizar esta red es reemplazar la subred que va desde el primario del T.I. hacia la derecha, por otra que no contenga un T.I.. Para hacer ello, notamos que

$$V_b(s) = \frac{I_\gamma(s)}{sC_4} + \frac{v_4(0)}{s} \tag{2.112}$$

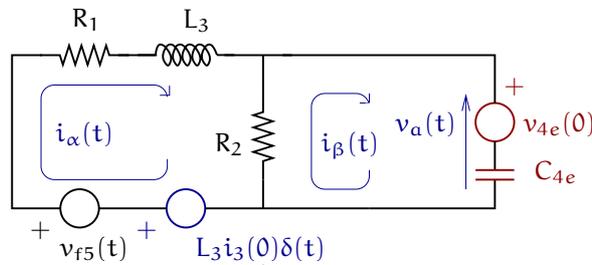
Si ahora usamos (2.104), se obtiene

$$-\frac{N_2}{N_1}V_a(s) = -\frac{N_1}{N_2} \frac{I_\beta(s)}{sC_4} + \frac{v_4(0)}{s} \Rightarrow V_a(s) = \frac{I_\beta(s)}{sC_{4e}} + \frac{v_{4e}(0)}{s} \tag{2.113}$$

donde

$$C_{4e} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 C_4; \quad v_{4e}(0) = -\frac{N_1}{N_2}v_4(0) \tag{2.114}$$

Estos resultados se pueden condensar en la red de la figura siguiente.



Note que las impedancias se reflejan desde el secundario al primario multiplicadas por un factor $(N_1/N_2)^2$, por lo que la capacitancia se refleja multiplicada por el factor $(N_2/N_1)^2$. Por su parte la fuente de tensión se refleja al primario multiplicada por un factor $-N_1/N_2$ (el signo negativo se debe a la polaridad del T.I.).

Errores

Los errores más comunes en este problema son

Error 1 Representación incorrecta de las condiciones iniciales.

Error 2 Omisión de términos o error de signo en la formulación de la LVK

Error 3 Representación incorrecta de las impedancias del inductor y/o del condensador

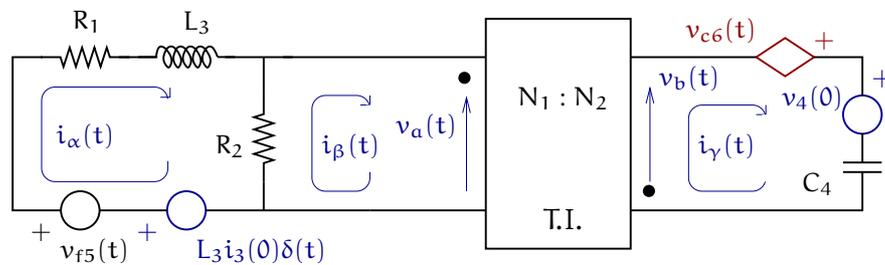
Error 4 Errores algebraicos que conducen a una expresión para $\det \mathbf{Z}_m(s)$ en la que aparecen términos con diferentes signos. Esto genera un error conceptual porque daría origen a modos naturales que crecen en el tiempo.

Error 5 Errores algebraicos que llevan a concluir que hay tres (o más) modos naturales. Ello también conlleva un error conceptual porque habiendo sólo dos componentes dinámicas, sólo puede haber dos modos naturales.

Error 6 Mal tratamiento del T.I. Aquí los errores pueden ir desde errores de signo, hasta otros más graves, como suponer que, por definición, alguna tensión y/o alguna corriente es cero. Para evitar eso, se sugiere representar en forma equivalente el T.I. con las dos fuentes controladas, los valores de esas fuentes y sus orientaciones deben respetar la polaridad del T.I. Debe además verificarse que se cumple el teorema de Tellegen.

Una variante de interés

Supongamos que se agrega una fuente controlada en el lado secundario del T.I., como se muestra en la figura, con $v_{c6}(t) = r i_\alpha(t)$, con $r \in \mathbb{R}$



El tratamiento de esta fuente se hace siguiendo la misma idea básica que se siguió con el T.I., es decir, primero se trata la fuente controlada como si fuese una fuente de tensión independiente, y se pone, con el signo adecuado, en el vector de excitaciones. Luego, se utiliza la relación de Tercer Postulado para la fuente controlada y se re-acomoda matricialmente las ecuaciones, dejando en el vector de excitaciones, solo las fuentes independientes y las fuentes equivalentes para las condiciones iniciales.

Siguiendo esa estrategia, la adición de la fuente controlada introduce un cambio en la ecuación asociada a la malla γ , lo cual se refleja en la matriz $\mathbf{Z}_m(s)$, la que ahora es

$$\mathbf{Z}_m(s) = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + sL_3 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 & 0 \\ -r & 0 & 1/sC_4 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Un aspecto interesante a observar es que ahora $\mathbf{Z}_m(s)$ no es una matriz simétrica. Podemos entonces calcular los modos naturales de la red, calculando primero el determinante de $\tilde{\mathbf{Z}}_m(s)$, la que sigue dada por (2.106), salvo por el hecho que ahora $\mathbf{Z}_m(s)$ esta dada por (2.115). Entonces

$$\det \tilde{\mathbf{Z}}_m(s) = -\frac{L_3 R_2 N_2^2 C_4 s^2 + (R_1 R_2 N_2^2 C_4 + L_3 N^2 + r R_2 N_2 N_1 C_4) s + R_1 N_1^2 + R_2 N_1^2}{s C_4} \quad (2.116)$$

Use MAPLE o MATHEMATICA

Con los valores numéricos dados, resulta

$$\det \tilde{\mathbf{Z}}_m(s) = -\frac{25000s^2 + (5,2 \cdot 10^7 + 20000r)s + 1,2 \cdot 10^{10}}{s} \quad (2.117)$$

De esta expresión se observa que las raíces, λ_1 y λ_2 , de ese determinante pueden ser reales (positivas o negativas), imaginarias o complejas (con parte real positiva o negativa). **Ello depende del valor que toma el parámetro r de la fuente controlada.** A través de cálculos simples se llega a los resultados que aparecen en la tabla siguiente.

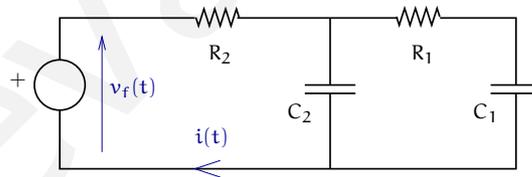
La existencia de fuentes controladas es necesaria para que aparezcan modos naturales crecientes, pero no es suficiente.

r	λ_1, λ_2	Modos naturales
$(-\infty, -4330)$	$\in \mathbb{R}^+$	exponenciales crecientes
$(-4330, -2600)$	$\in \mathbb{C}, \Re\{\lambda_1\} = \Re\{\lambda_2\} > 0$	sinusoidal creciente
-2600	$\in \mathbb{C}, \Re\{\lambda_1\} = \Re\{\lambda_2\} = 0$	sinusoidal pura
$(-2660, -868)$	$\in \mathbb{C}, \Re\{\lambda_1\} = \Re\{\lambda_2\} < 0$	sinusoidal decreciente
$(-868, \infty)$	$\in \mathbb{R}^-$	exponenciales decrecientes

Esta tabla muestra, una vez más, que las fuentes controladas pueden generar nodos naturales crecientes, lo cual es imposible de lograr si la red es sólo del tipo RLCM (incluyendo T.I.).

2.4. Ejercicios suplementarios

Problema 2.8. En la red de la figura se sabe que $v_f(t) = E$, constante $\forall t \geq 0$, $C_1 = 5 \mu\text{F}$, $C_2 = 5 \mu\text{F}$, $R_1 = 100 \Omega$ y $R_2 = 200 \Omega$. Determine, si existen, los valores de las condiciones iniciales en C_1 y en C_2 , de modo que $i(t)$ contenga sólo una exponencial (probablemente sus resultados quedan expresados en función de E).



Problema 2.9. Para la misma red eléctrica del ejercicio precedente, suponga que R_1 y R_2 se pueden elegir arbitrariamente. ¿Qué valores $\in \mathbb{R}^+$ elegiría usted para que en $i(t)$ apareciese una sinusoidal de amplitud amortiguada exponencialmente?

Problema 2.10. Considere la red eléctrica del problema , y suponga que no conoce los valores de las componentes, el valor de la fuente constante E , ni los valores de las condiciones iniciales. Sin embargo, se puede determinar que la corriente está dada por

$$i(t) = 2 - 5e^{-2500t} \cos(1700t + \pi/4) \text{ [mA]} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.118)$$

Calcule, $R, L, C, i_L(0^-), v_C(0^-)$ y E , si es posible.

Problema 2.11. Suponga que se aplica el método de mallas a una red lineal, con condiciones iniciales iguales a cero, obteniéndose las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 4 + \frac{10^4}{s} & -1 - \frac{10^4}{3s} & -2 \\ -1 - \frac{10^4}{3s} & 5 + \frac{10^4}{3s} + 0,02s & -2 - 0,01s \\ -2,5 & -2 - 0,01s & 3 + 0,01s + \frac{10^5}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\alpha(s) \\ I_\beta(s) \\ I_\gamma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{f1}(s) \\ 0 \\ V_{f2}(s) \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

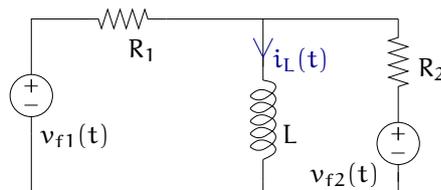
2.11.1 Suponiendo que todas las corrientes de mallas se han definido con la misma orientación, proponga una red que satisfaga estas ecuaciones de mallas.

2.11.2 Suponga que se invierte la orientación de la corriente de la malla γ , ¿cómo se deben modificar las ecuaciones de mallas dadas?

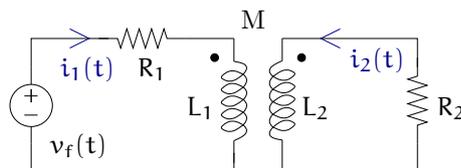
2.11.3 Si suponemos que todas las componentes dinámicas tienen condiciones iniciales distintas de cero, ¿Cómo habría que introducir esas condiciones iniciales en las ecuaciones?

2.11.4 Determine los modos naturales de la red.

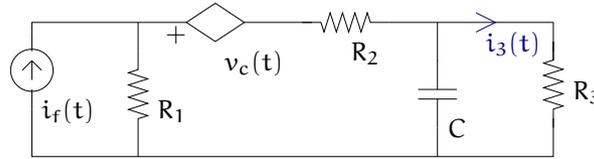
Problema 2.12. En la red de la figura se sabe que $v_{f1}(t) = 10e^{-100t}$ [V], $v_{f2}(t) = 10\mu(t-0,008)$ [V], $L = 0,6$ [H], $R_1 = 100$ [Ω], $R_2 = 300$ [Ω] e $i_L(0) = 0,2$ [A]. Calcule $i_L(t)$, $\forall t \geq 0$



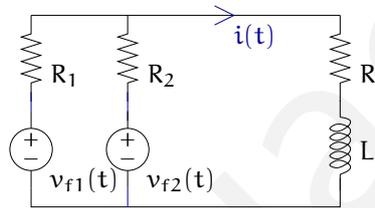
Problema 2.13. En la red de la figura se sabe que $v_f(t) = 10\cos(10t)$ [V], $L_1 = 5$ [H], $L_2 = 2$ [H], $M = 3$ [H], $R_1 = 100$ [Ω], $R_2 = 40$ [Ω], $i_1(0) = 0,2$ [A] e $i_2(0) = 0,8$ [A]. Calcule $i_2(t)$, $\forall t \geq 0$.



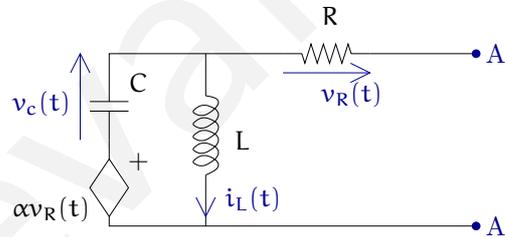
Problema 2.14. En la red de la figura se sabe que $i_f(t) = te^{-10^4 t}$, $v_c(t) = r \cdot i_3(t)$, $r \in \mathbb{R}$, $i_3(0) = -0,1$ [A], $C_1 = 3$ [μ F], $R_1 = 100$ [Ω], $R_2 = 100$ [Ω] y $R_3 = 200$ [Ω]. Determine, $i_3(t) \forall t \geq 0$.



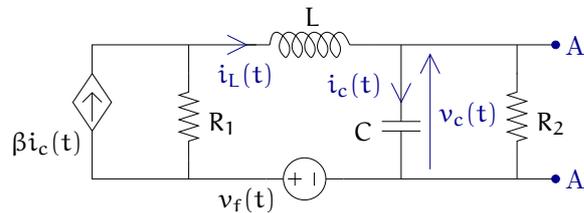
Problema 2.15. En la red de la figura se sabe que $v_{f1}(t) = 100 \cos(314t)$, $v_{f2}(t) = 100 \cos(314t - \pi/6)$, $i(0) = 1$ [A], $L = 10$ [mH], $R_1 = 4$ [Ω], $R_2 = 4$ [Ω] y $R_3 = 20$ [Ω]. Calcule $i(t) \forall t \geq 0$.



Problema 2.16. Calcule el equivalente Thevenin para la red que se muestra en la figura, con los siguientes datos: $L = 2$ [H], $R = 1$ [K Ω], $C = 1$ [μ F], $v_c(0) = 8$ [V], $i_L(0) = 0,2$ [A].

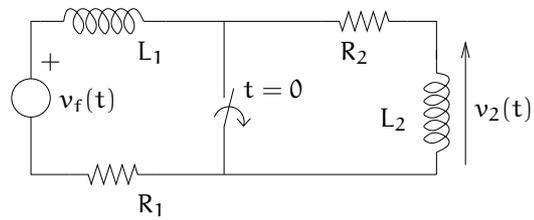


Problema 2.17. Calcule el equivalente Norton para la red que se muestra en la figura, con los siguientes datos: $v_f(t) = 12$ [V], $L = 2$ [H], $R_1 = R_2 = 1$ [K Ω], $C = 1$ [μ F], $v_c(0) = 8$ [V], $i_L(0) = 0,2$ [A].

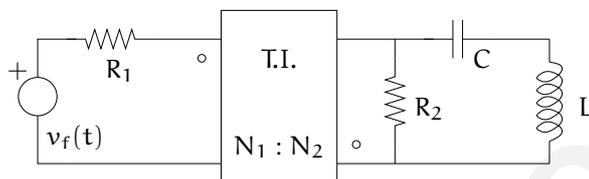


Problema 2.18. El interruptor de la red está cerrado $\forall t < 0$, y se abre en $t = 0$. Calcule $v_2(t) \forall t \geq 0$.

$$v_f(t) = 6 \text{ [V]}, R_1 = 3 \text{ [\Omega]}, R_2 = 2 \text{ [\Omega]}, L_1 = 0,1 \text{ [H]}, L_2 = 0,3 \text{ [H]}.$$



Problema 2.19. Determine cómo varían los modos naturales de la red de la figura, en función de la razón de transformación $N_1 : N_2$.



En evaluación

Capítulo 3

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE REDES ELÉCTRICAS

3.1. Introducción

La descripción de la respuesta en frecuencia de las redes eléctricas es una herramienta de utilidad en variadas aplicaciones.

En esencia, esta descripción tiene que ver con cómo varía la respuesta de la red cuando se varía la frecuencia de una excitación sinusoidal aplicada a esa red. El ámbito de aplicaciones incluye, por ejemplo, procesamiento de señales de audio y vídeo, fidelidad de transmisión de información y selectividad (o filtraje).

La aplicabilidad de esta herramienta requiere de ciertas propiedades teóricamente restrictivas de la red eléctrica bajo análisis: linealidad, e invariancia en el tiempo. Decimos *teóricamente*, porque pequeñas desviaciones de estas características, no invalidan la utilidad de la descripción.

La descripción de la respuesta en frecuencia de una red eléctrica está unívocamente ligada a dos elecciones: una, en qué parte de la red se inyecta una excitación sinusoidal (un tono puro), y la segunda, cuál es la señal que se elige como respuesta. Un cambio en cualquiera de estas dos elecciones genera un resultado distinto.

Supongamos pues que la única excitación en una red es una senoide de frecuencia angular ω_1 . Entonces, la señal elegida como respuesta contiene una senoide, también de frecuencia ω_1 , más una combinación lineal de los modos naturales de la red. Si la red es estable, esos modos decaen asintóticamente a cero, en consecuencia, como nos interesa únicamente el estado estacionario, sólo observaremos la respuesta estacionaria. Note además que, en este marco de análisis, las condiciones iniciales de la red no afectan el resultado, ya que sólo aparecen en la respuesta dando mayor o menor magnitud a los modos naturales.

Para calcular la respuesta en frecuencia, imaginemos una fuente de tensión (o de corriente) de valor $A \cos(\omega_1 t + \alpha)$, y una respuesta (tensión o corriente) de

valor $B \cos(\omega_1 t + \beta)$. Entonces, la respuesta en frecuencia de esta red, a frecuencia $\omega = \omega_1$, puede ser caracterizada por el número complejo

$$H(j\omega_1) = \frac{B}{A} e^{j(\beta - \alpha)}$$

En otras palabras, la magnitud de la respuesta en frecuencia describe la relación (amplificación o atenuación) entre la amplitud de la senoide de excitación y la de aquella de la respuesta. Por su parte, el ángulo, describe el desfase entre ambas sinusoides.

Para poder seguir los desarrollos presentados en este capítulo, es necesario que el estudiante esté familiarizado con ciertos conocimientos sobre el análisis de redes eléctricas. Este conjunto de conocimientos previos incluyen los métodos generales de análisis y el tratamiento fasorial de las redes lineales, estables e invariantes en el tiempo, en presencia de excitaciones sinusoidales. Adicionalmente se supone que el estudiante tiene conocimiento y habilidad en el cálculo con números complejos.

En este texto de ejercicios, cuando sea necesario, se usará el siguiente par que define la transformada fasorial

$$\mathcal{P}\{C \cos(\omega t + \gamma)\} = \frac{C}{\sqrt{2}} e^{j\gamma} = \frac{C}{\sqrt{2}} (\cos \gamma + j \operatorname{seno} \gamma)$$

$$\mathcal{P}^{-1}\{D e^{j\delta}\} = \sqrt{2} D \cos(\omega t + \delta) = \sqrt{2} D \cos(\delta) \cos(\omega t) - \sqrt{2} D \operatorname{seno}(\delta) \operatorname{seno}(\omega t)$$

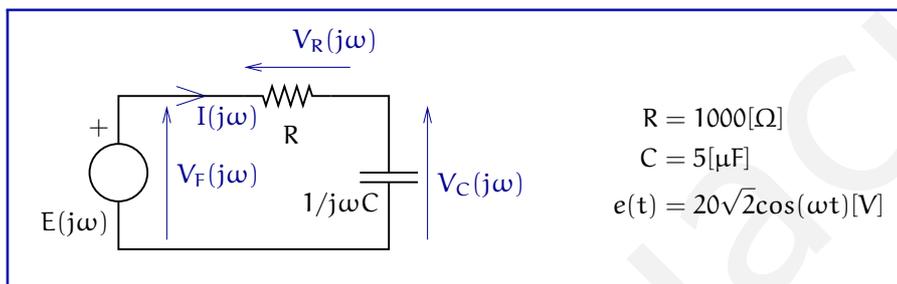
En estas definiciones, $\mathcal{P}\{\circ\}$ denota la transformada fasorial y $\mathcal{P}^{-1}\{\circ\}$ se usa para definir la transformada fasorial inversa. Naturalmente que para obtener la transformada fasorial inversa de un número complejo, se debe conocer la frecuencia angular ω . Sin embargo, en este texto, ω será una variable, en función de la cual describiremos el comportamiento de la red eléctrica en estudio.

3.2. Respuesta en frecuencia de redes pasivas.

3.2.1. Respuesta en frecuencia de una red RC

Problema 3.1.

Considere la red RC de la figura, el propósito en este problema es analizar su respuesta en frecuencia, lo cual exige que la red esté operando en estado estacionario, es decir, que la magnitud de los modos naturales del sistema se haya hecho despreciable.



- 3.1.1** Calcule los cocientes $V_C(j\omega)/E(j\omega)$ y $V_R(j\omega)/E(j\omega)$ y construya sus gráficos de magnitud y fase.
- 3.1.2** Determine, a partir de los gráficos, la ganancia (o pérdida) y el desfase para las funciones de transferencia calculadas cuando $\omega = 0, 1; 1$ y $10[\text{rad/s}]$.

Solución

Se insiste en la ventaja, de expresar el resultado en términos literales, antes de comenzar con la solución numérica del problema. De esta manera, se evitan errores de arrastre en los cálculos numéricos que se deben efectuar y se mantiene un orden en el desarrollo del ejercicio.

Recurriendo al conocimiento de análisis de redes eléctricas resulta sencillo obtener las expresiones para las tensiones complejas $V_R(j\omega)$ y $V_C(j\omega)$. Utilizando la idea de un divisor de tensiones en el plano complejo, se obtiene

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (3.1)$$

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (3.2)$$

Para una buena comprensión de los desarrollos que siguen, se recomienda revisar las ideas de divisor de tensión y transformada fasorial.

En estas ecuaciones, se han usado R y $1/j\omega$, que corresponden a las impedancias del resistor y el condensador, respectivamente.

Por su parte, el cociente

$$\frac{\mathcal{P}\{\text{transformada fasorial de la senoide de salida}\}}{\mathcal{P}\{\text{transformada fasorial de la senoide en la entrada}\}} \quad (3.3)$$

es un número complejo, que depende de ω , es decir, es una función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, conocida como función de transferencia.

La notación $V_R(j\omega)$ se refiere a un número complejo, en tanto $|V_R(j\omega)|$ representa la magnitud de dicho número.

A partir de los resultados anteriores, es posible señalar lo siguiente:

- Es recomendable analizar el circuito para los extremos del rango de frecuencias. Así, a frecuencia 0, el condensador se comporta como circuito abierto, dado que $\frac{1}{j\omega C} \rightarrow \infty$. En consecuencia, la tensión presente en el condensador corresponde a la tensión de la fuente de excitación y la resistencia no presenta caída de tensión, debido a que $i(t) = 0$. Por otra parte, cuando se trabaja a altas frecuencias ($f \rightarrow \infty$) el condensador se comporta como cortocircuito, ya que $\frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0$, por lo que la tensión presente en el condensador tiende a 0 y, como resultado, $V_R = E$. Este análisis debe concordar con los resultados obtenidos en forma analítica. De no ser así se debe revisar ya sea el análisis cualitativo o el trabajo algebraico respectivo.
- El análisis cualitativo efectuado para $V_R(j\omega)$ es correcto, lo cual es avalado por la expresión obtenida en (3.1). Lo mismo se puede concluir para $V_C(j\omega)$. Para verificar lo anterior, basta sólo con llevar las expresiones (3.1) y (3.2) a los límites respectivos (evaluarlas cuando $f \rightarrow 0$ y $f \rightarrow \infty$).
- La red, con salida observada $V_R(j\omega)$, se comporta como un discriminador (atenuador, en este caso) de señales de bajas frecuencias, privilegiando aquellas cuyo componente espectral está más desplazado a frecuencias altas. Se puede hablar entonces de un **comportamiento pasa-altos**.
- Por otro lado, la red con salida observada $V_C(j\omega)$ tiene un comportamiento complementario al de $V_R(j\omega)$, privilegiando aquellas componentes de bajas frecuencias. Por ende su comportamiento puede ser catalogado como **pasa-bajos**.
- Se debe recalcar que la respuesta en frecuencia del sistema depende del producto RC y no de sus valores individuales. Nótese que los denominadores para las expresiones (3.1) y (3.2) **son idénticos**.
- Otro aspecto importante que se debe resaltar al observar las expresiones (3.1) y (3.2) es que son **independientes de las condiciones iniciales del sistema**. Esta característica se debe a que las condiciones iniciales sólo aparecen en la respuesta afectando las amplitudes de los modos naturales, y éstos, bajo la suposición de estabilidad, son de magnitud despreciable en estado estacionario.

Reemplazando los valores entregados inicialmente, en (3.1) y (3.2) , resulta

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{j1,57}{1 + j1,57} \quad (3.4)$$

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{1 + j1,57} \quad (3.5)$$

Las gráficas de magnitud y ángulo de la respuesta en frecuencia de las funciones de transferencia (3.4) y (3.5) se presentan en las figuras 3.2 y 3.1. Estos diagramas fueron obtenidos mediante el uso de MATLAB.

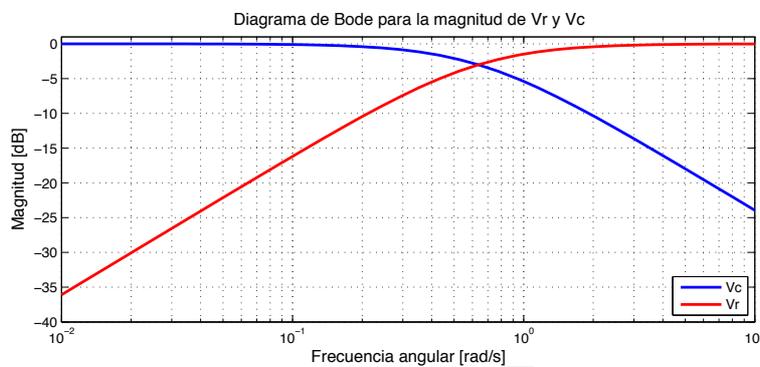


Figura 3.1: Diagrama de Bode de la magnitud de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el condensador (en azul).

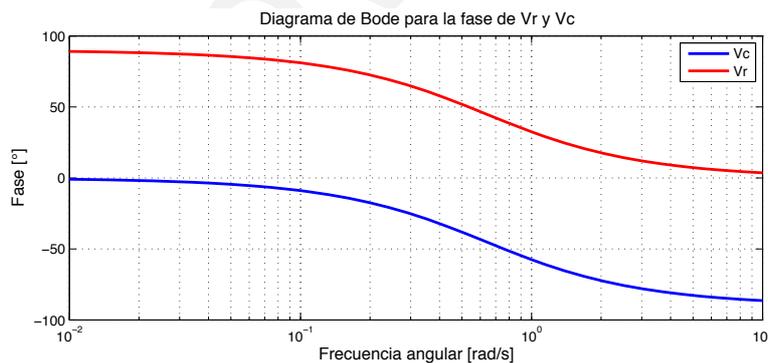


Figura 3.2: Diagrama de Bode de la fase de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el condensador (en azul).

Las figuras presentadas corresponden a **Diagramas de Bode**. Los Diagramas de Bode constituyen una de las formas más importantes de representación gráfica de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal, pues permite observar el comportamiento tanto de la magnitud (en dB) como del desfase (en grados o radianes) en función de la frecuencia. La magnitud en dB de un cociente entre magnitudes se calcula como $20 \log_{10} (|V_{out}(j\omega)|/|V_{in}(j\omega)|)$.

La magnitud en dB de una señal arbitraria se define como
 $|V|_{dB} = 20 \log_{10} |V|$

Para responder a la segunda pregunta es suficiente observar en el diagrama de Bode de magnitud la respuesta del sistema a las frecuencias señaladas. Así, cuando $\omega = 1/10$ [rad/s], el cociente de (3.4) presenta una **atenuación** de 16 [dB] (o una ganancia de -16 [dB]), lo que transformado a magnitud resulta en

$$\frac{|V_R(j\omega)|}{|E(j\omega)|} = 10^{-16/20} \approx 0,158 \quad (3.6)$$

En cuanto al desfase introducido a dicha frecuencia se puede apreciar desde la figura 3.1 que su valor a $\omega = 1/10$ [rad/s] es de 81° aproximadamente.

De la misma manera, para $\omega = 1$ [rad/s] el cociente (3.4) presenta un valor aproximado de

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} \approx 10^{-1,49/20} \angle 32^\circ \approx 0,842 \angle 32^\circ \quad (3.7)$$

Por último, para $\omega = 10$ [rad/s] la expresión (3.4) toma el valor de

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} \approx 10^{-0,018/20} \angle 3,6^\circ \approx 0,998 \angle 3,6^\circ \quad (3.8)$$

Por otra parte, la respuesta en frecuencia de la expresión (3.5) se deduce a partir de los diagramas 3.2 y 3.1, presentando los siguientes valores

Para $\omega = 1/10$ [rad/s]:

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} \approx 10^{-0,108/20} \angle -9^\circ \approx 0,988 \angle -9^\circ \quad (3.9)$$

Para $\omega = 1$ [rad/s]:

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} \approx 10^{-5,44/20} \angle -57,5^\circ \approx 0,535 \angle -57,5^\circ \quad (3.10)$$

Finalmente, para $\omega = 10$ [rad/s]:

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} \approx 10^{-24/20} \angle -86^\circ \approx 0,063 \angle -86^\circ \quad (3.11)$$

Debe insistirse en la complementariedad de las expresiones (3.4) y (3.5), la que queda a la vista, al apreciar tanto la representación gráfica de su respuesta en frecuencia, como los resultados analíticos al reemplazar los valores dados en el enunciado. También se observa que, al sumar dichas ecuaciones, miembro a miembro, se obtiene que

$$\frac{V_R(j\omega) + V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = 1 \quad (3.12)$$

La expresión (3.12) es consistente con la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK).

Errores

Este problema puede ser un gran desafío para el estudiante que, habiendo aprobado un curso básico de redes eléctricas, no haya podido dominar correctamente el concepto que soporta la idea de la transformada fasorial y su relación con los números complejos. Así, las falencias en este tema pueden ser diversas, de las cuales se listan las más frecuentes

Error 1 Suma de números complejos en magnitud (la magnitud de la suma de dos números complejos **no corresponde** a la suma de sus magnitudes, **a menos que ambos números tengan el mismo ángulo**).

Error 2 Errores de manipulación de ecuaciones, por ejemplo, no se arrastra la componente j de la parte imaginaria, incidiendo en que el resultado final sea incorrecto.

Error 3 Mezclar variables temporales ($v(t)$) y complejas ($V(j\omega)$).

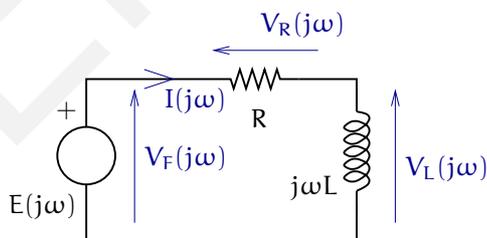
Error 4 Olvidar el factor $\sqrt{2}$ al momento de llevar la expresión desde el plano fasorial al plano temporal. Esto es consistente con el uso del valor RMS como magnitud de la transformada fasorial.

Error 5 Mezclar grados con radianes, en la especificación de ángulos.

Una variante de interés

Una variante interesante para el caso anterior es considerar una red RL y analizar su respuesta en frecuencia. Un comportamiento como el descrito en el ejercicio anterior no sólo es conseguido cuando se utilizan mallas resistivas y capacitivas, sino que también se logra un resultado dual utilizando inductores en lugar de condensadores.

El circuito presentado a continuación permitirá observar la respuesta en frecuencia de una red RL



$$\begin{aligned} R &= 1000 \text{ } [\Omega] \\ L &= 0,5 \text{ } [\text{H}] \\ e(t) &= 20\sqrt{2}\cos(\omega t) \text{ } [\text{V}] \end{aligned}$$

Para obtener las transferencias entre la entrada y cada una de las componentes de la red basta sólo con realizar un tratamiento sencillo sobre las variables a observar. De esta manera se puede analizar la respuesta en frecuencia de la red.

Luego de un sencillo tratamiento matemático se consigue:

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega L/R} \quad (3.13)$$

$$\frac{V_L(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R} \quad (3.14)$$

Las expresiones (3.13) y (3.14) presentan un comportamiento complementario al analizado para las transferencias (3.1) y (3.2). En efecto, la salida observada en el inductor posee un comportamiento pasa-altos, que es complementario al comportamiento pasa-bajos observado en el condensador del ejercicio principal. Lo mismo se puede concluir para la respuesta en frecuencia de la salida observada en el resistor para la red RL: su comportamiento es pasa-bajos. La contraparte a la transferencia anterior se encuentra en el ejemplo principal, en donde la respuesta en frecuencia de la salida observada en el resistor posee un comportamiento pasa-altos.

Lo expuesto anteriormente es simple de verificar si se efectúa el análisis para los extremos del rango de frecuencias, tomando el caso de una señal continua (frecuencia 0) y una oscilación cuya frecuencia tiende a infinito.

El resultado numérico de las transferencias (3.13) y (3.14) para el ejemplo descrito corresponde a

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega/2000} \quad (3.15)$$

$$\frac{V_L(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{j\omega/2000}{1 + j\omega/2000} \quad (3.16)$$

Las transferencias (3.15) y (3.16) pueden ser representadas gráficamente mediante diagramas de Bode, los cuales son presentados en las figuras 3.3 y 3.4.

3.2.2. Respuesta en frecuencia de una red RLC

Problema 3.2.

Considere la red RLC de la figura a continuación. El propósito de este ejercicio será analizar la respuesta en frecuencia de la salida, observada en la combinación LC en paralelo.

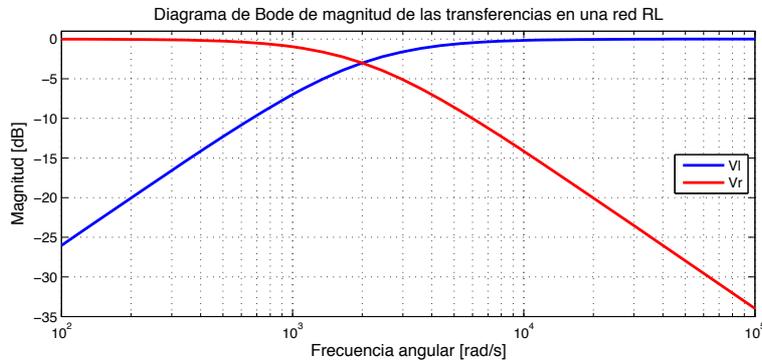


Figura 3.3: Diagrama de Bode de la magnitud de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el inductor (en azul).

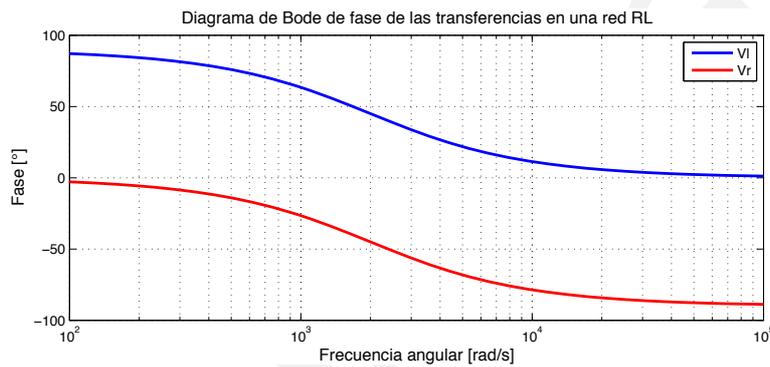
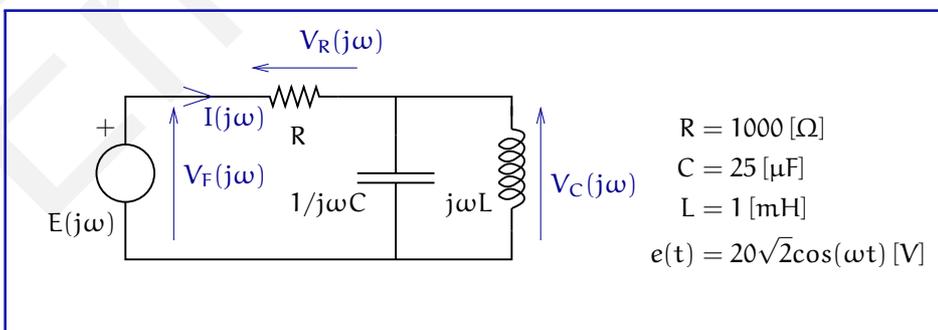


Figura 3.4: Diagrama de Bode de la fase de las funciones de transferencia desde la tensión de entrada, a la tensión en el resistor (en rojo) y el inductor (en azul).



3.2.1 Calcule $V_C(j\omega)/E(j\omega)$ y $V_R(j\omega)/E(j\omega)$ y construya sus gráficas.

3.2.2 Determine a partir de los gráficos la ganancia (o pérdida) y el desfase para las funciones de transferencia calculadas cuando $\omega = 10000, 20000$ y 30000 [rad/s].

Solución

Las relaciones pedidas pueden ser determinadas en forma literal mediante la aplicación directa del divisor de tensiones respectivo a cada una de las tensiones observadas a la salida.

En efecto, el resultado obtenido para las expresiones solicitadas son

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{j\omega L \cdot 1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C}}$$

$$\boxed{\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{R(1 - \omega^2 LC)}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}} \quad (3.17)$$

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\frac{j\omega L \cdot 1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C}}{R + \frac{j\omega L \cdot 1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C}}$$

$$\boxed{\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}} \quad (3.18)$$

De las ecuaciones (3.17) y (3.18), se debe notar que:

- A similitud de lo efectuado en la sección anterior, se analiza el comportamiento de la red para los extremos del rango de frecuencias. Cuando la tensión de salida es observada en R se aprecia que, para $f \rightarrow 0$, la tensión de salida es la misma tensión de entrada, ya que a dicha frecuencia $j\omega L \rightarrow 0$ y, por ende, toda la tensión de entrada es aplicada completamente a la resistencia. Cuando $f \rightarrow \infty$ ocurre que $1/j\omega C \rightarrow 0$ y, en consecuencia, la tensión en el resistor es nuevamente la tensión de entrada ya que la malla LC se comporta como cortocircuito a dicha frecuencia. Por consiguiente, es natural pensar que si la tensión observada en R en los extremos del rango de frecuencia es la misma, entonces debe existir una frecuencia a la cual la tensión observada en el resistor es mínima (o máxima).
- Por otra parte, si ahora se analiza la tensión de salida observada en C se aprecia el caso complementario al anterior: la tensión de salida es 0 en los extremos del rango de frecuencia. Por consiguiente, debe existir una frecuencia a la que la tensión de salida observada en C es máxima.

Lo de máximo y mínimo se refiere, no a la señal temporal, sino que a la magnitud de su transformada fasorial.

- El análisis cualitativo efectuado para $V_R(j\omega)$ es correcto, lo cual es avalado por la expresión obtenida en (3.17). Lo mismo se puede concluir para $V_C(j\omega)$. Para verificar lo anterior, basta sólo con llevar las expresiones (3.17) y (3.18) a los límites respectivos (evaluarlas cuando $f \rightarrow 0$ y $f \rightarrow \infty$).
- La red, con salida observada $V_R(j\omega)$, se comporta como un discriminador (atenuador) de un rango intermedio de frecuencias. Se puede hablar entonces de un **comportamiento elimina-banda**.
- Por otro lado, la red con salida observada $V_C(j\omega)$ tiene un comportamiento complementario al de $V_R(j\omega)$, privilegiando aquellas señales cuyo intervalo de frecuencia es discriminado por $V_R(j\omega)$. Por ende su comportamiento puede ser catalogado como **pasa-banda**.
- El punto crítico de esta red corresponde al momento en que la expresión $1 - \omega^2 LC$ se hace cero. Por lo tanto, la frecuencia crítica f_c puede ser calculada como:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.19)$$

- La expresión (3.19) depende únicamente de los valores que adopten las componentes L y C; por lo tanto **el valor de la resistencia no tiene influencia alguna sobre la frecuencia central del circuito**.
- La frecuencia expresada en (3.19) corresponde al valor de la oscilación de entrada en [Hz] tal que la magnitud de $V_R(j\omega)$ es mínima y también a la cual $V_C(j\omega)$ alcanza su máximo.

Tomando los valores de las componentes entregadas al inicio del ejercicio y reemplazándolos en (3.17) y (3.18), resulta

$$\frac{V_R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1000(1 - 2,5 \cdot 10^{-9}\omega^2)}{1000(1 - 2,5 \cdot 10^{-9}\omega^2) + j10^{-3}\omega} \quad (3.20)$$

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{j10^{-3}\omega}{1000(1 - 2,5 \cdot 10^{-9}\omega^2) + j10^{-3}\omega} \quad (3.21)$$

Analizando la respuesta en frecuencia tanto en magnitud como en fase de las ecuaciones (3.20) y (3.21) se obtienen los diagramas de Bode entregados en las figuras 3.5 y 3.6.

Se debe hacer notar que, para el caso de la tensión observada en R, la magnitud de la tensión presente en la salida es casi idéntica para todo el espectro de frecuencias, salvo para una banda estrecha de frecuencias.

Si se observan la figuras 3.5 y 3.6 se tiene que la magnitud de la señal de salida permanece idéntica en amplitud y fase salvo para frecuencias cercanas a 20000[rad/s], en donde se produce una caída abrupta de la magnitud y un cambio brusco de fase.

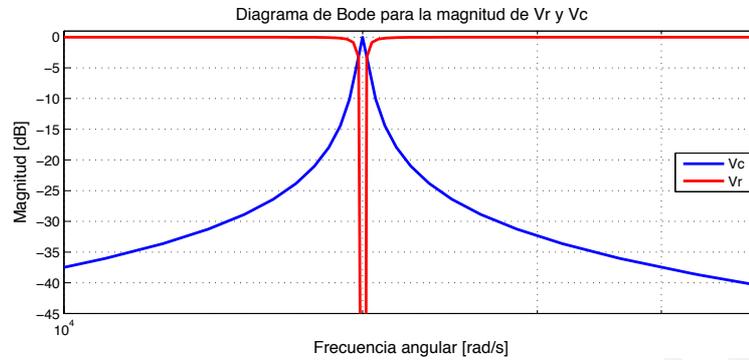


Figura 3.5: Diagrama de Bode para la magnitud de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC.

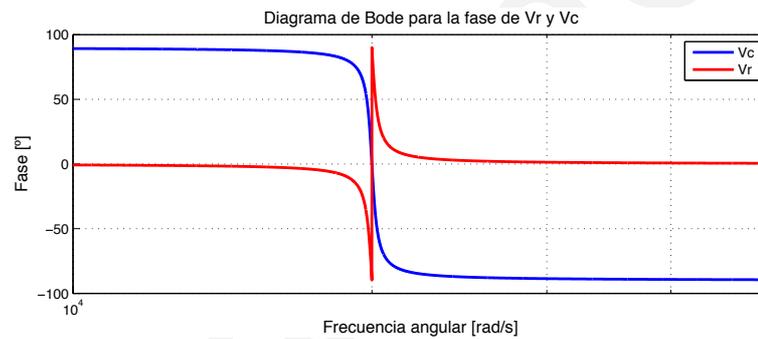


Figura 3.6: Diagrama de Bode para la fase de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC.

La frecuencia angular antes citada corresponde puede ser calculada a partir de la expresión (3.19), lo cual entrega

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2,5 \cdot 10^{-9}}} = 20000[\text{rad/s}] \quad (3.22)$$

Nótese además que la frecuencia de $20000[\text{rad/s}]$ corresponde a la frecuencia a la cual se consigue máxima salida a través del condensador, ya que debe cumplirse la expresión (3.12) en todo momento, por lo que si la magnitud de la tensión presente en R es nula, entonces se cumplirá que la magnitud de la señal observada en C será la magnitud de la tensión de entrada.

Para calcular los valores de magnitud y fase para los tres casos solicitados, basta con observar los respectivos diagramas de Bode para obtener dichos valores.

Para $\omega = 10^4$ [rad/s] se tiene

$$\frac{V_R(j10^4)}{E(j10^4)} \approx 1 \angle 0^\circ \quad (3.23)$$

$$\frac{V_C(j10^4)}{E(j10^4)} = 10^{-37,43/20} \angle 89^\circ \approx 0,013 \angle 89^\circ \quad (3.24)$$

Para $\omega = 2 \cdot 10^4$ [rad/s] los resultados obtenidos son

$$\frac{V_R(j2 \cdot 10^4)}{E(j2 \cdot 10^4)} \approx 0 \angle 270^\circ \quad (3.25)$$

$$\frac{V_C(j2 \cdot 10^4)}{E(j2 \cdot 10^4)} = 1 \angle 0^\circ \quad (3.26)$$

Finalmente, cuando $\omega = 3 \cdot 10^4$ [rad/s] los resultados obtenidos son

$$\frac{V_R(j3 \cdot 10^4)}{E(j3 \cdot 10^4)} \approx 1 \angle 1^\circ \quad (3.27)$$

$$\frac{V_C(j3 \cdot 10^4)}{E(j3 \cdot 10^4)} = 10^{-32,35/20} \angle 89^\circ \approx 0,024 \angle 89^\circ \quad (3.28)$$

A partir de los resultados anteriores es posible apreciar la selectividad del circuito RLC propuesto. Mientras que la salida observada en R permanece invariante salvo para un rango selecto de frecuencias que suprime, la salida observada en C posee la característica complementaria: a la frecuencia central presenta máxima amplitud en la tensión presente en la salida.

Errores

El ejercicio antes desarrollado puede dar lugar a una gran cantidad de errores tanto de formulación como conceptuales. Algunos de ellos son listados a continuación.

Error 1 Errores en la formulación del modelo (cálculos de impedancias equivalentes, formulación del divisor de tensiones, entre otros).

Error 2 Intercambiar el comportamiento en frecuencia de un inductor por el de un condensador y viceversa. Esto no debe dar a confusión si se recuerda que a frecuencia 0 el inductor se comporta como cortocircuito y el condensador como circuito abierto.

Error 3 Formulación incorrecta para la expresión para convertir la magnitud en [dB] a su valor real.

Error 4 Mezclar frecuencias angulares [rad/s] con frecuencias temporales [Hz].

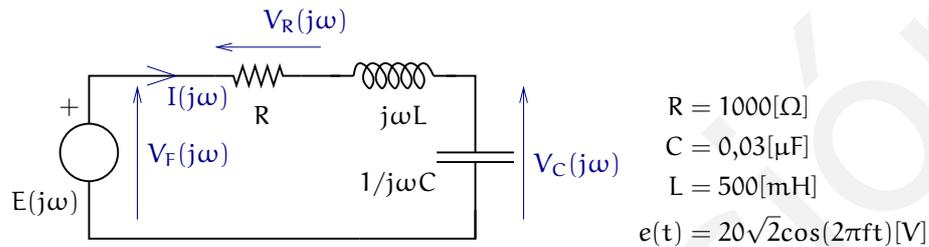
Error 5 Mezclar variables temporales (t) con variables angulares ($j\omega$).

La descripción entregada es válida sólo cuando el circuito se encuentra operando en estado estacionario.

Recordar que $\omega = 2\pi f$ [rad/s].

Una variante de interés

Una variante del problema anterior que posee un comportamiento bastante interesante es el circuito RLC serie. Para el análisis a efectuar se tomará como referencia el siguiente circuito:



Para comparar los resultados obtenidos se determinarán las transferencias de entrada a salida en las mismas componentes de la red.

Ahora el análisis algebraico se simplifica, pues al ser un circuito RLC serie sólo se necesita de un divisor de tensiones simple para obtener el resultado deseado. Así pues, las transferencias resultantes son:

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \quad (3.29)$$

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \quad (3.30)$$

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \quad (3.31)$$

$$\frac{V_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \quad (3.32)$$

Si se observan las ecuaciones (3.30) y (3.32) se puede apreciar que poseen un comportamiento análogo a (3.18). En efecto, la frecuencia central de la red corresponde a aquella que hace que el factor $1 - \omega^2 LC$ sea 0. En consecuencia, se obtiene

$$\omega_{c \text{ serie}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.33)$$

La expresión (3.33) es idéntica a (3.19). Estas expresiones son características de las redes RLC como las presentadas en los problemas tratados en esta sección. Nótese que no es posible generalizar dicho valor, pues existen configuraciones

de éstas componentes que entregan un valor diferente. Es más, puede que dicho valor ni siquiera exista dada la topología.

Ahora bien, a dicha frecuencia se tiene que la transferencias (3.30) y (3.32) corresponden a

$$\frac{V_C(j\omega_{c \text{ serie}})}{E(j\omega_{c \text{ serie}})} = \frac{-j}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.34)$$

$$\frac{V_R(j\omega_{c \text{ serie}})}{E(j\omega_{c \text{ serie}})} = 1 \quad (3.35)$$

A partir de la expresión (3.35) es posible deducir que la transferencia (3.32) siempre valdrá 1 para la frecuencia central, no importando los valores de las componentes utilizadas para conformar la red.

Por otra parte, al evaluar numéricamente (3.34) se obtiene

$$\frac{V_C(j\omega_{c \text{ serie}})}{E(j\omega_{c \text{ serie}})} = -4,08j \quad (3.36)$$

El resultado obtenido en (3.36) refleja una característica especial de esta red: **es capaz de entregar una tensión mayor a la suministrada por la excitación de entrada**, la cual debe ser medida en alguna de las componentes dinámicas de la red.

Lo anterior es avalado por los diagramas de Bode de las expresiones (3.30) y (3.32) desarrollados mediante MATLAB, lo cual resulta en las figuras 3.7 y 3.8.

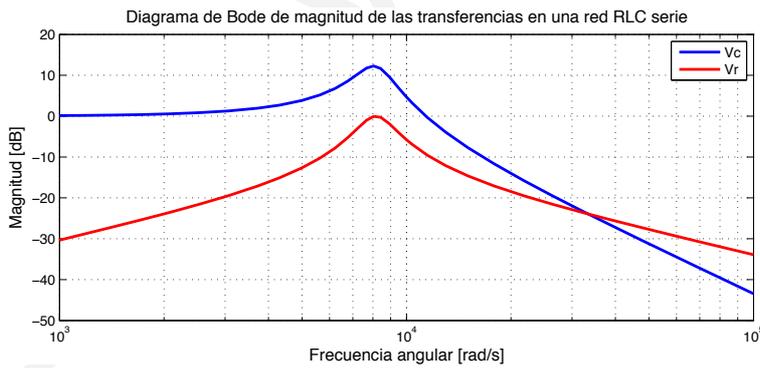


Figura 3.7: Diagrama de Bode para la magnitud de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC serie.

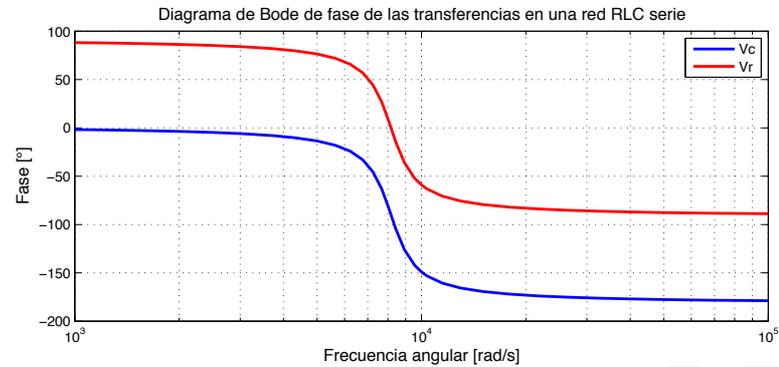


Figura 3.8: Diagrama de Bode para la fase de las señales $V_R(j\omega)$ (en rojo) y $V_C(j\omega)$ (en azul) con respecto a la señal de entrada en una red RLC serie.

A partir del diagrama 3.7 se observa que la máxima magnitud de salida se presenta a una frecuencia cercana a $8 \cdot 10^3$ [rad/s]. En efecto, reemplazando los valores numéricos para las componentes dadas en (3.33) se obtiene

$$\omega_{c \text{ serie}} = \frac{1}{\sqrt{0,03 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}} = 8164,97 \text{ [rad/s]} \quad (3.37)$$

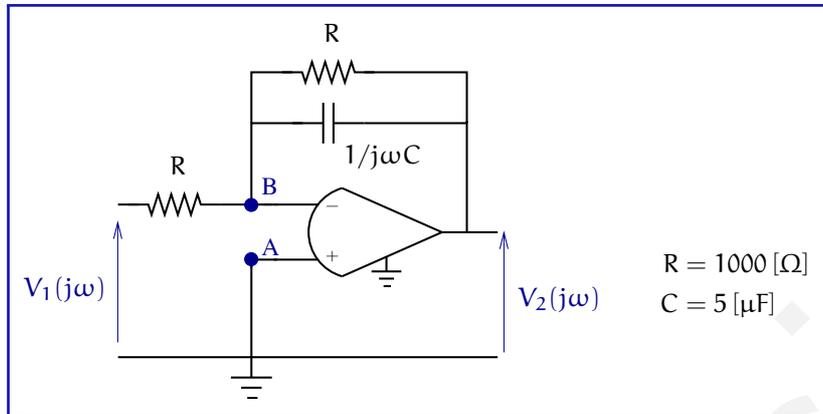
Por otra parte, la transferencia (3.30) tiene un comportamiento en magnitud bastante especial que es posible deducir a partir de la figura 3.7: es capaz de amplificar la señal de entrada para un rango específico de frecuencias (cercano a $\omega_{c \text{ serie}}$). Lo anterior ocurre debido a que la red RLC serie entra en resonancia con la señal de entrada cuando la frecuencia de ésta es cercana a la frecuencia central de la red. La resonancia de una red está íntimamente ligada con los modos naturales del sistema, cuyo análisis requiere el uso de la Transformada de Laplace para su descripción.

3.3. Respuesta en frecuencia de redes activas.

3.3.1. Respuesta en frecuencia de una red RC implementada con AO

Problema 3.3.

Considere la red de la figura



3.3.1 Determine la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ y construya los diagramas de Bode de magnitud y fase.

3.3.2 Analice el caso anterior considerando que se conecta a la salida del AO una resistencia de $1000 [\Omega]$.

Solución

La transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ se puede deducir tomando en consideración que el AO ideal posee características bien específicas, a saber:

- La ganancia diferencial tiende a infinito.
- La tensión diferencial es cero.
- La corriente de entrada al AO es cero.

Tomando en cuenta los aspectos antes mencionados es posible determinar sin mayores complicaciones la transferencia solicitada.

Aplicando el teorema de Millman al nodo B se obtiene

$$\frac{V_1(j\omega)(R // 1/j\omega C) + V_2(j\omega)R}{R + R // 1/j\omega C} = 0 \quad (3.38)$$

Donde $R // 1/j\omega C$ denota la impedancia equivalente paralelo entre R y $1/j\omega C$. La tensión obtenida en (3.38) es 0 debido a que la tensión presente en el nodo A del circuito corresponde a la referencia y, de acuerdo a lo expresado anteriormente, dicha referencia aparece igualmente en el nodo B de la red.

La impedancia equivalente en paralelo resulta ser:

$$R // 1/j\omega C = \frac{R}{1 + j\omega RC} \quad (3.39)$$

Recuerde realizar los cálculos en forma algebraica y luego evaluar los resultados.

Si se emplea la expresión (3.39) y se reemplaza en (3.38) se obtiene

$$V_1(j\omega) \frac{R}{1 + j\omega RC} + V_2(j\omega)R = 0 \quad (3.40)$$

Finalmente, la transferencia resultante $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ resulta ser

$$\boxed{\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{1}{1 + j\omega RC}} \quad (3.41)$$

Observando la expresión (3.41) es posible determinar lo siguiente:

- Haciendo la salvedad del signo presente en la transferencia calculada, debe notarse la similitud de la transferencia expresada en (3.2) y la obtenida en este ejemplo, lo cual permite concluir que ambas redes son completamente equivalentes desde su punto de vista de respuesta en frecuencia.
- El signo menos presente en la salida del AO indica simplemente una inversión de fase de π [rad] (o 180°), lo cual se debe a la retroalimentación negativa dada por la configuración de la red.
- El resultado cuantitativo obtenido es coincidente con el análisis cualitativo que se puede desarrollar para esta topología de red. Cuando $\omega \rightarrow 0$, el condensador se comporta como circuito abierto y, por ende, el AO queda configurado como amplificador inversor de ganancia -1 . Por otra parte, cuando $\omega \rightarrow \infty$, la impedancia presentada por el condensador tiende a 0 (cortocircuito), por ende $V_2(j\omega)$ queda conectado al nodo B del AO y, en consecuencia, la tensión presente a la salida corresponde a la referencia dada para el ejemplo (es decir, 0 [V]).

Evaluando numéricamente la expresión (3.41) es posible llegar a lo siguiente

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{1}{1 + j5 \cdot 10^{-3} \omega} \quad (3.42)$$

El resultado presentado puede ser representado gráficamente mediante la ayuda de MATLAB a través de los diagramas de Bode.

Las figuras 3.9 y 3.10 presentan la respuesta en frecuencia de la red descrita para este ejemplo.

De los diagramas antes presentados se puede observar la similitud de (3.41) en cuanto a su respuesta en frecuencia con respecto a la expresión (3.2). Sin embargo, dicha equivalencia está limitada sólo al caso en que las redes se encuentran descargadas, es decir, que no poseen una componente eléctrica conectada a la salida, que demande corriente de la red bajo análisis.

Analizando el segundo problema, el conectar una carga resistiva a la salida del amplificador no modifica en forma alguna la respuesta en frecuencia de la red, pues una característica importante de los amplificadores operacionales ideales

El análisis desarrollado para $\omega \rightarrow 0$ se efectúa en estado estacionario.

Esto no es así en el caso de la red RC pasiva, ya que al conectarle una resistencia, cambia la función de transferencia.

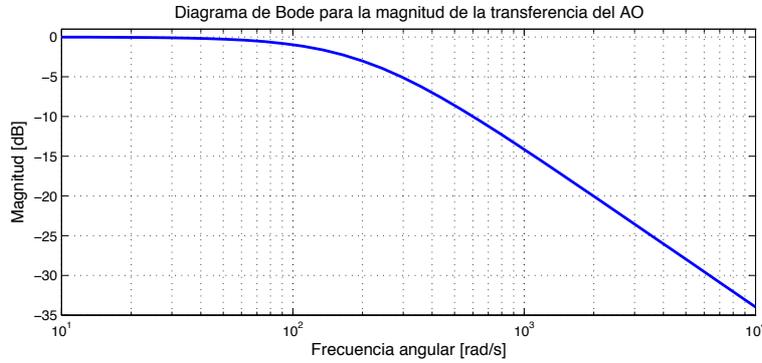


Figura 3.9: Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia del amplificador operacional.

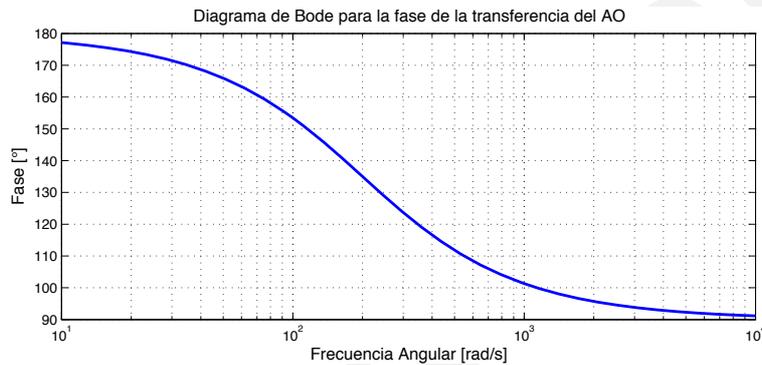


Figura 3.10: Diagrama de Bode para la fase de la transferencia del amplificador operacional.

es que **la tensión de salida es independiente de las componentes conectadas a su salida**. En otras palabras, la tensión de salida del AO es impuesta *para el resto del mundo* independiente de qué es lo que se halle conectado a ella (resistores, condensadores, inductores, otro AO, etc.). Esto se debe a la naturaleza ideal del AO.

Errores

Los errores que se pueden cometer al desarrollar un ejercicio como el presentado anteriormente son muy diversos. Los principales (y que deben destacarse) son:

Error 1 Error en la formulación del LVK.

En la práctica esta insensibilidad a la carga está limitada a un rango finito de valores para la corriente demandada.

Error 2 Reemplazar la impedancia del condensador erróneamente (usar $j\omega C$ en vez de $1/j\omega C$).

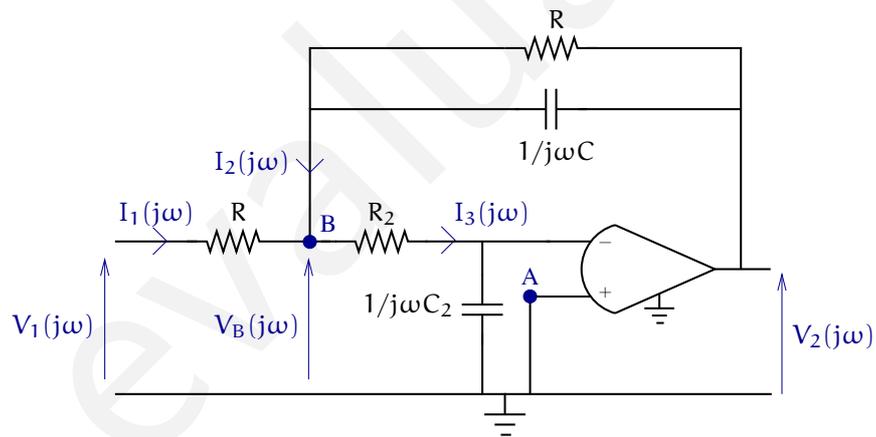
Error 3 Errores en la formulación del LCK en el AO. Debe tenerse presente que existe un flujo de corriente no sólo por los terminales operativos del componente, sino que también lo hay a través de los terminales de polarización.

Error 4 Manipulación incorrecta de unidades.

Error 5 Deducción incorrecta del comportamiento cualitativo de la red.

Una variante de interés

La red anteriormente analizada puede ser tratada en forma más realista si se considera que el AO real se puede modelar mejor por un AO de ganancia finita, al cual se agrega a su entrada una malla RC serie, tal como se ilustra en la siguiente figura.



Valores razonables de estas componentes suelen ser del orden de $1 [M\Omega]$ para el caso de la resistencia (R_2) y $1 [pF]$ en el caso de la capacitancia (C_2). En la nomenclatura técnica, estos valores suelen denominarse como **resistencia de entrada** y **capacitancia de entrada**.

El análisis para este caso se hará tomando en consideración que la ganancia diferencial del AO, K , es elevada, pero finita. Además, ya no se cumplirá la igualdad de tensiones entre los terminales del AO como se apreciará a continuación.

Considerando el carácter no ideal del AO, se tendrá que la tensión $V_2(j\omega)$ puede expresarse como

$$V_2(j\omega) = -K \cdot \frac{V_B(j\omega)}{1 + j\omega R_2 C_2} \quad (3.43)$$

Por otra parte, si se aplica LCK en el nodo B se obtiene

$$I_1(j\omega) + I_2(j\omega) = I_3(j\omega) \quad (3.44)$$

$$\frac{V_1(j\omega) - V_B(j\omega)}{R} + (V_2(j\omega) - V_B(j\omega)) \left(j\omega C + \frac{1}{R} \right) = \frac{j\omega C_2 \cdot V_B(j\omega)}{1 + j\omega R_2 C_2} \quad (3.45)$$

Tomando la expresión (3.43) y reemplazando $V_B(j\omega)$ en el resultado expuesto en (3.45), se obtiene que la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ resulta ser

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{K}{K - 2 + j\omega R((K - 1)C - C_2) - \omega^2 R R_2 C C_2} \quad (3.46)$$

El resultado obtenido en (3.46) resulta una expresión más compleja que la obtenida en (3.41). En principio, se podría pensar que el resultado analítico obtenido en (3.46) dista de lo obtenido para un AO ideal. No obstante, en el caso de un AO ideal, el valor de K tiende a infinito. Si se toma el límite para (3.46) cuando $K \rightarrow \infty$ se tendrá

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (3.47)$$

Lo cual concuerda con el resultado obtenido para el análisis efectuado cuando se considera un AO ideal.

Considerando los mismos valores entregados para R y C en el problema principal, y para el AO valores de $R_2 = 1$ [M Ω], $C_2 = 1$ [pF] y $K = 10^4$, se obtienen los diagramas de Bode de magnitud y fase de las figuras 3.11 y 3.12.

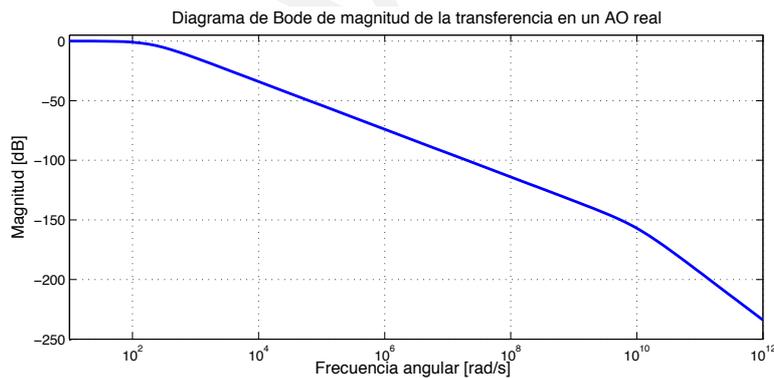


Figura 3.11: Diagrama de Bode de magnitud para la transferencia de un modelo de AO más realista.

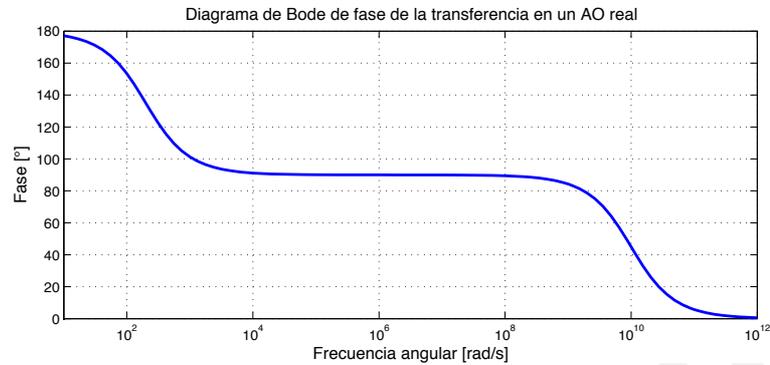
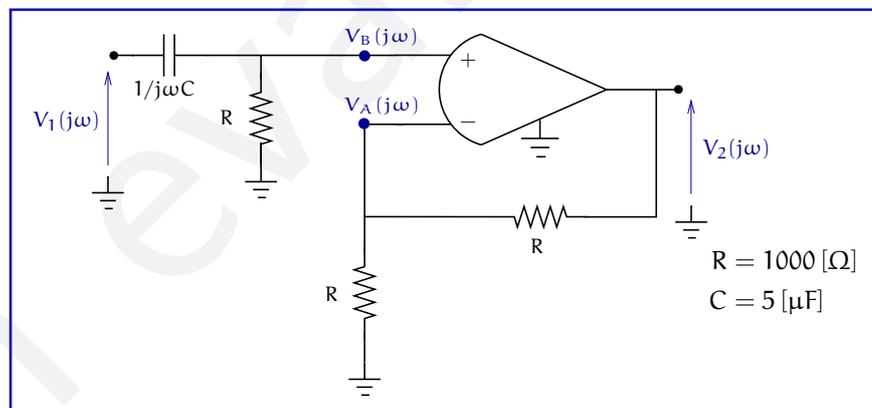


Figura 3.12: Diagrama de Bode de fase para la transferencia de un modelo de AO más realista.

3.3.2. Respuesta en frecuencia de una red RC complementaria

Problema 3.4.

Dada la red de la figura, se buscará establecer la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ y su respuesta en frecuencia.



3.4.1 Determine la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ y construya los diagramas de Bode de magnitud y fase.

3.4.2 ¿Qué ocurrirá si se conecta este circuito en cascada con el presentado en la sección 3.3.1? ¿Y en caso de que se conectaran en paralelo, es decir, que sus salidas se sumen?

Solución

La red de este problema exhibe un comportamiento complementario al de la red del problema anterior. Además, posee una transferencia bastante especial y en la cual se puede apreciar otra de las características importantes de los amplificadores operacionales.

Efectuando un análisis sobre los nodos A y B y utilizando las propiedad de igualdad de tensiones en los nodos A y B (característica inherente al amplificador operacional) se tiene

$$\frac{R}{R + 1/j\omega C} V_1(j\omega) = \frac{R}{2R} V_2(j\omega) \quad (3.48)$$

$$\boxed{\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{2j\omega RC}{1 + j\omega RC}} \quad (3.49)$$

La expresión (3.49) es bastante especial en cuanto a su respuesta en frecuencia: nótese que para $\omega \rightarrow \infty$ la transferencia tiende a $V_2(j\omega)/V_1(j\omega) = 2$, es decir, **la red presenta una amplificación de la señal de entrada, siempre y cuando ω adopte valores elevados**. El criterio que permite determinar los valores de ω para los cuales se cumple esta relación en forma aproximada son aquellos cuya frecuencia angular ω sea mayor a $1/RC$. La deducción de esta relación quedará explícita en un capítulo posterior.

Además, es posible destacar lo siguiente:

- La sub-malla RC presente a la entrada del amplificador operacional posee una respuesta en frecuencia que es independiente de las impedancias conectadas a la salida del AO. Lo anterior se debe a que las corrientes presentes en los terminales de entrada del AO son despreciables. Por ende, la corriente que circula en la malla de entrada sólo lo hace a través del condensador y la resistencia, **generándose un divisor de tensión**.
- La retroalimentación presente entre la salida y el nodo A es la que permite ajustar la ganancia de la red. En términos estrictos, variando las resistencias presentes en esta sub-malla es posible ajustar la ganancia del circuito e influir sobre la respuesta en frecuencia del sistema. Esta retroalimentación no está limitada a ser sólo implementada mediante resistores, sino que también pueden utilizarse componentes dinámicas (inductores y condensadores).
- El comportamiento descrito está limitado al caso de un AO ideal. Un acercamiento más realista del modelo considera una ganancia diferencial K finita (aunque elevada), lo que conduce a una tensión diferencial diferente a cero. Como se vió en la sección anterior, este comportamiento dinámico del AO adquiere relevancia para frecuencias elevadas. Además, la ganancia diferencial de este dispositivo disminuye conforme aumenta la frecuencia de trabajo.

- Un análisis cualitativo sobre esta red corrobora lo obtenido en (3.49): cuando $\omega \rightarrow 0$, el condensador se comporta como circuito abierto. En consecuencia, no existirá tensión aplicada al nodo B y, por consiguiente, no habrá tensión de salida, de acuerdo a la propiedad de tensión diferencial nula de un AO ideal. Por otra parte, cuando $\omega \rightarrow \infty$, el condensador se comporta como cortocircuito; por ende, la tensión aplicada al mismo nodo corresponderá a la tensión de entrada y en la salida se tendrá una tensión igual al doble de ésta (debido al efecto amplificador del AO combinado con la realimentación resistiva al terminal negativo).

Si se reemplazan los valores entregados para las componentes utilizadas, se tendrá que la transferencia (3.49) resulta ser

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{j10^{-2}\omega}{1 + j5 \cdot 10^{-3}\omega} \quad (3.50)$$

Cuya respuesta en frecuencia puede apreciarse en los diagramas de Bode de magnitud y fase 3.13 y 3.14 respectivamente, en donde se corrobora el comportamiento pasa-altos de la red analizada.

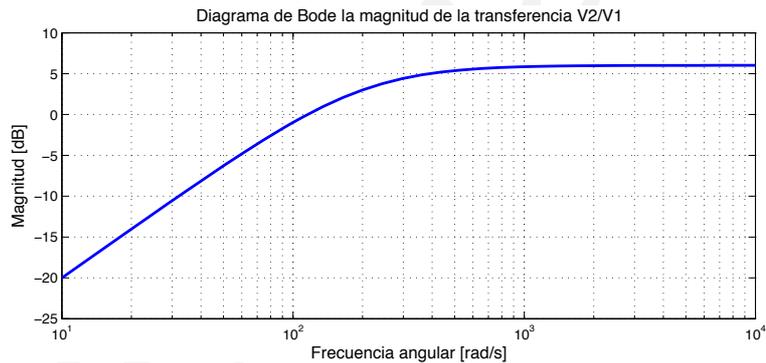


Figura 3.13: Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de la red pasa-altos.

Las figuras presentadas permiten constatar con mayor claridad la naturaleza amplificadora de la red activa pasa-altos descrita, la cual posee un comportamiento análogo al presentado en la expresión (3.1), con la salvedad de que en este caso la máxima magnitud relativa que se consigue cuando $\omega \rightarrow \infty$ es de 2, que corresponde a 6 [dB] aproximadamente.

Cuando se emplean las redes analizadas en los problemas presentados en esta sección y en la sección 3.3.1 para utilizarlas en forma combinada, se obtienen resultados bastante peculiares

- Si se conectan las redes en serie (más conocida como conexión en cascada), se tendrá que la transferencia final corresponderá al producto de las transferencias, lo cual constituye otra de las características especiales de estos

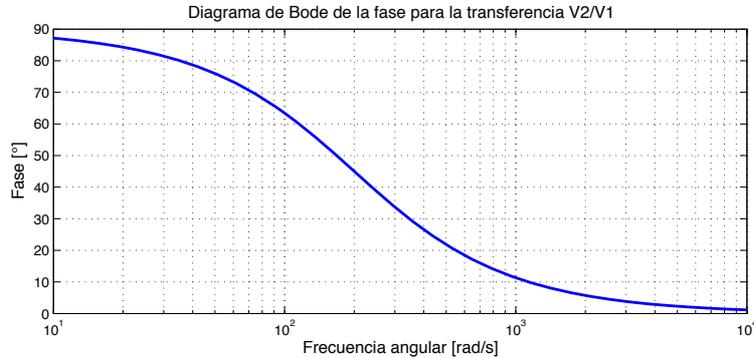


Figura 3.14: Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de la red pasa-altos.

dispositivos. La transferencia final resulta del producto dado por (3.41) y (3.49), la cual corresponde a

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \frac{2j\omega RC}{1+j\omega RC} \quad (3.51)$$

La transferencia de dos o más redes con AO conectadas en cascada corresponde al producto de las transferencias individuales.



Figura 3.15: Conexión de 2 redes en cascada.

El diagrama de Bode de magnitud de (3.51) se presenta en la figura 3.16, asumiendo $R = 1000 \text{ } [\Omega]$ y $C = 5 \text{ } [\mu\text{F}]$.

El comportamiento en frecuencia de la interconexión en cascada de un filtro pasa-altos y un filtro pasa-bajos permite obtener la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-banda, no importando el orden de precedencia de estas transferencias.

- La interconexión en paralelo de las redes antes descritas da como resultado las figuras 3.18 y 3.19. Se aprecia que el comportamiento en frecuencia de la interconexión en paralelo resulta un pasa-todo. Sin embargo, si bien la magnitud se mantiene prácticamente constante (salvo por la diferencia de amplificación existente entre la red pasa-altos y la red pasa-bajos) un desfase dependiente de la frecuencia. En consecuencia, al conectar en paralelo un filtro pasa-altos y uno pasa-bajos, resulta una **red desfasadora**.

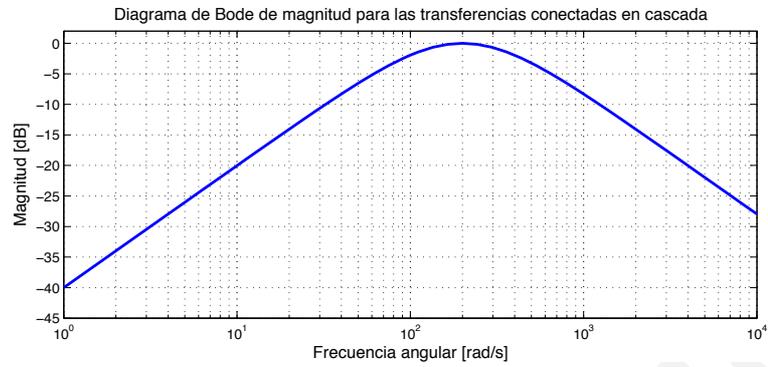


Figura 3.16: Diagrama de Bode para la magnitud de la interconexión de dos transferencias en cascada.

La transferencia resultante de la conexión en paralelo es

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{-1 + j2\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (3.52)$$

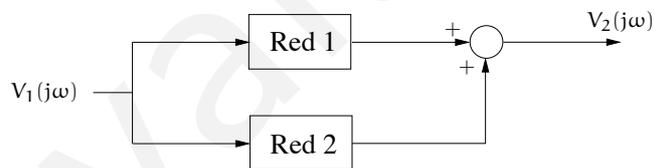


Figura 3.17: Conexión de 2 redes en paralelo.

La cual concuerda con lo observado en los diagramas de Bode presentes en 3.18 y 3.19.

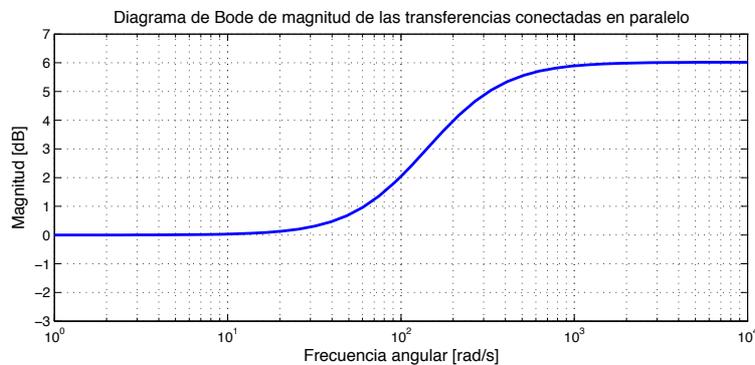


Figura 3.18: Diagrama de Bode para la magnitud de la interconexión de dos transferencias en paralelo.

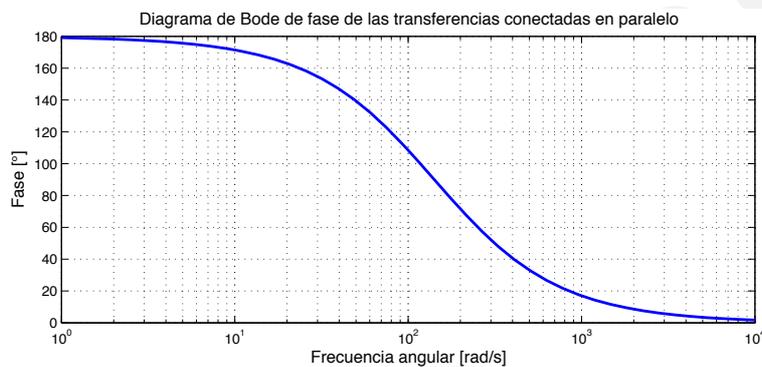


Figura 3.19: Diagrama de Bode para la fase de la interconexión de dos transferencias en paralelo.

Errores

Existen variados errores que pueden presentarse al desarrollar un ejercicio como el presentado anteriormente, de los cuales pueden destacarse:

Error 1 Formulación incorrecta de las leyes de interconexión (LVK y LCK).

Error 2 Operatoria incorrecta con números complejos.

Error 3 Tratamiento incorrecto del AO ideal. Se debe recordar que este dispositivo posee características especiales que hacen que la transferencia entre la salida y la entrada dependa sólo de las componentes externas que conforman la red.

Error 4 Inversión del comportamiento en frecuencia de las componentes dinámicas. Es decir, que se confunda la respuesta en frecuencia de un con-

densador por la de un inductor y viceversa. Para evitar lo anterior se recomienda recordar lo que sucede en los extremos del rango de frecuencias, pues lo anterior permitirá deducir qué comportamiento corresponde a cada componente.

Una variante de interés

Una variante al problema analizado es considerar que el AO no es ideal y que posee una ganancia elevada pero finita de valor K (tal como se analizó en 3.3.1). Consideraremos ahora que dicha ganancia depende de la frecuencia de trabajo, presentando un comportamiento pasabajos dado por

$$K(j\omega) = \frac{K_{\max}}{1 + j\omega/\omega_c} \quad (3.53)$$

Por ende, la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ debe considerar el carácter no ideal del AO. De esta manera, aplicando el principio de funcionamiento del AO se tiene

$$V_2(j\omega) = K(j\omega) \cdot (V_B(j\omega) - V_A(j\omega)) \quad (3.54)$$

Reemplazando los valores de $V_B(j\omega)$ y $V_A(j\omega)$ conocidos en la expresión (3.54) se tiene

$$V_2(j\omega) = K(j\omega) \cdot \left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} V_1(j\omega) - \frac{1}{2} V_2(j\omega) \right) \quad (3.55)$$

Lo que resulta en

$$\boxed{\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{2 \cdot K(j\omega)}{1 + K(j\omega)} \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}} \quad (3.56)$$

La expresión (3.56) es concordante con lo obtenido para (3.49) pues, cuando $K \rightarrow \infty$, se tendrá

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{j2\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (3.57)$$

Es decir, la expresión (3.49) resulta de la idealización de (3.56).

Acorde a lo anaizado en la variante del problema 3.3.1, la ganancia del AO puede presentar una respuesta en frecuencia de tipo pasa-bajos. Normalmente, las características de funcionamiento del AO se encuentran dentro de los márgenes ideales para un rango de frecuencias bastante amplio, aunque existe igualmente una amplia variedad de anchos de banda para estos dispositivos, siendo el típico (para AO's tradicionales) de 1 [MHz].

Para la variante analizada se considerará una respuesta en frecuencia bastante más atenuada, tomando como ancho de banda una frecuencia inferior a 1 [MHz] a fin de hacer más ilustrativo el efecto de la variación de la ganancia

*El índice Kilo (K) es
alente a 1000 unidades
(nota: glosario).*

del AO sobre la respuesta en frecuencia obtenida para la red. Supongamos, entonces, que el valor de ω_c es de 10 [Krad/s]. En consecuencia, la transferencia (3.56) resulta (suponiendo $K_{max} = 10^4$)

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{2 \cdot 10^4}{1 + 10^4 + j \cdot 10^{-4}\omega} \cdot \frac{j5 \cdot 10^{-3}\omega}{1 + j5 \cdot 10^{-3}\omega} \quad (3.58)$$

Al graficar los diagramas de Bode de magnitud y fase de (3.58) se obtienen las figuras 3.20 y 3.21. En estas figuras se puede apreciar la importancia que tiene el ancho de banda del AO real en el modelo final obtenido para una red pasa-altos. Se aprecia claramente que la red selecciona un rango de frecuencias específico. En otras palabras, lo que debiese ser un comportamiento pasa-altos, en realidad es un **comportamiento pasa-banda**.

Normalmente el rango de frecuencias de interés para la señal de entrada no cubre todo el espectro de frecuencias, sino que se encuentra acotado a un rango específico, ya sea porque la señal no posee un espectro muy ancho o bien porque el ancho de banda de interés no es infinito. Por ende, la aproximación de un AO ideal funciona correctamente dentro de un rango específico que, para este caso, está acotado a 10^7 [rad/s].

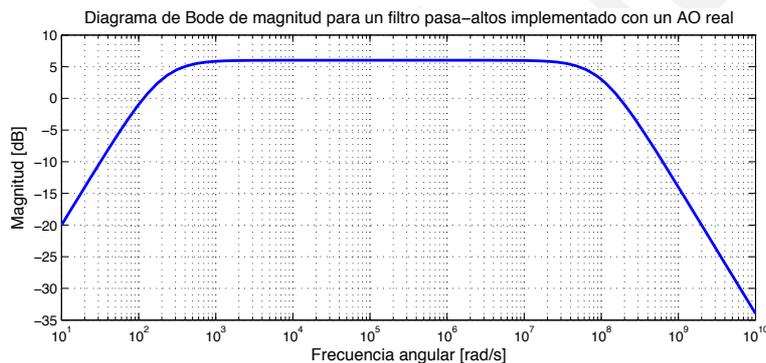


Figura 3.20: Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de la red pasa-altos implementada con un AO real.

3.3.3. Respuesta en frecuencia de una red de segundo orden implementada con AO

Problema 3.5.

Considere el circuito de la figura. El objeto de este apartado será determinar las características más importantes de esta red. Seguidamente se concluirán algunas ideas de utilidad en capítulos posteriores.

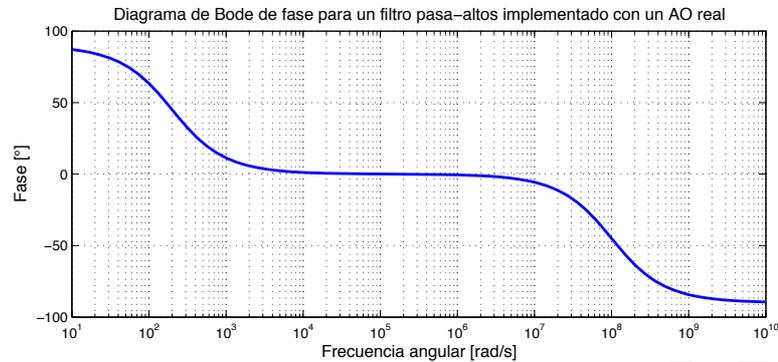
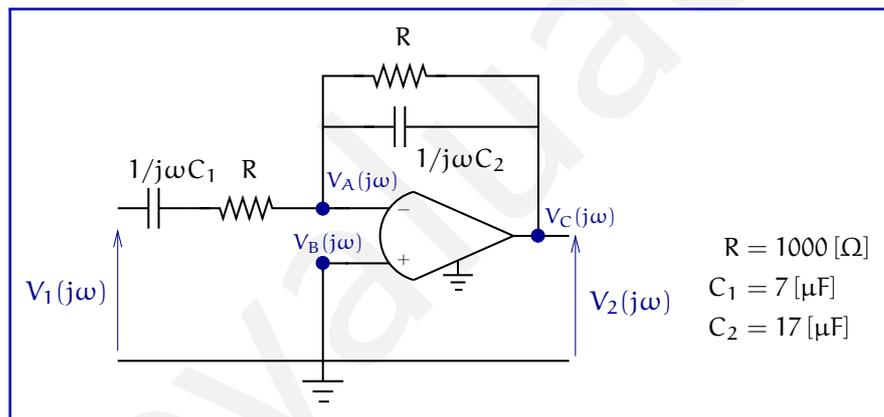


Figura 3.21: Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de la red pasa-altos implementada con un AO real.



- 3.5.1** Determine la transferencia entrada-salida de la red $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$.
- 3.5.2** A partir de la transferencia obtenida concluya la naturaleza del filtro.
- 3.5.3** Tomando como referencia las respuestas anteriores, ¿Qué es lo que hace a este circuito tan especial?.

Solución

Para el cálculo de la transferencia solicitada es necesario utilizar las propiedades de un AO ideal. Considerando que la tensión diferencial entre los terminales de entrada del AO es cero, entonces se tiene que $V_A(j\omega) = 0$. Este resultado será clave para deducir la transferencia de esta red.

Por otra parte, la admitancia $Y_{eq}(j\omega)$ de las componentes conectadas entre el nodo A y C es:

Impedancia se calcula como
 $Y(j\omega) = 1/Z(j\omega)$

$Y_{eq}(j\omega)$.

$$Y_{eq}(j\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C_2 = \frac{1 + j\omega RC_2}{R} \quad (3.59)$$

En consecuencia, la impedancia equivalente $Z_{eq}(j\omega)$ corresponde a

$$Z_{eq}(j\omega) = \frac{1}{Y_{eq}(j\omega)} = \frac{R}{1 + j\omega RC_2} \quad (3.60)$$

Utilizando el teorema de Millman para determinar $V_A(j\omega)$ en función de $V_1(j\omega)$ y $V_2(j\omega)$ se tiene

$$V_A(j\omega) = \frac{\left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) V_2(j\omega) + Z_{eq}(j\omega) \cdot V_1(j\omega)}{R + 1/j\omega C_1 + Z_{eq}(j\omega)} \quad (3.61)$$

Pero, acorde a lo revisado anteriormente, $V_A(j\omega) = 0$, por lo que se tendrá

$$0 = \left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) V_2(j\omega) + Z_{eq}(j\omega) \cdot V_1(j\omega) \quad (3.62)$$

Desarrollando la expresión (3.62) se obtiene

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{Z_{eq}(j\omega)}{R + 1/j\omega C_1} \quad (3.63)$$

Finalmente, a partir de (3.63) se obtiene la respuesta en frecuencia de la red, la cual es:

$$\boxed{\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{j\omega RC_1}{1 - \omega^2 R^2 C_1 C_2 + j\omega R(C_1 + C_2)}} \quad (3.64)$$

A partir de la transferencia (3.64) es posible observar lo siguiente

- La naturaleza de la red queda expuesta al considerar tanto el análisis cualitativo como la transferencia analíticamente obtenida. En ambos casos se llegará a la misma conclusión: cuando $\omega \rightarrow 0$, la tensión observada en $V_2(j\omega)$ tenderá a 0, en tanto que para $\omega \rightarrow \infty$ se observará una tensión nula en $V_2(j\omega)$. En consecuencia, debe existir un máximo para la transferencia antes señalada en alguna frecuencia intermedia. Por lo tanto, el filtro antes descrito posee un **comportamiento pasa-banda**.
- La mayor magnitud de la transferencia se obtiene cuando la parte real del denominador se hace cero. Es decir

$$\boxed{1 - \omega_c^2 R^2 C_1 C_2 = 0 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}} \quad (3.65)$$

- Al evaluar la expresión (3.64) para $\omega = \omega_c$ se obtiene

$$\frac{V_2(j\omega_c)}{V_1(j\omega_c)} = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (3.66)$$

El resultado expuesto en (3.66) puede hacer concluir, en forma precipitada, que la magnitud de la transferencia para este tipo de red no depende de los valores adoptados por los resistores. El resultado analítico obtenido es resultado de la simplificación impuesta en el circuito para los resistores utilizados, los cuales son idénticos. Por lo tanto, **el resultado obtenido no es generalizable.**

- La magnitud de la transferencia evaluada en la frecuencia central será menor a 1, pues $C_1 < C_2 + C_1$.
- Una de las características especiales de esta red corresponde a que **es posible obtener un comportamiento pasa-banda utilizando sólo resistores y condensadores**, lo cual permite suprimir el inductor de la red, tal como se expresa en (3.18). Como se verá posteriormente, esta característica permite simplificar el diseño de filtros, debido a que existe una mayor gama de valores para condensadores que para inductores. Esto responde la última pregunta de esta sección.

Evaluando numéricamente la expresión (3.64) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{j7 \cdot 10^{-3}\omega}{1 - 1,19 \cdot 10^{-4}\omega^2 + j24 \cdot 10^{-3}\omega} \quad (3.67)$$

Acorde a (3.65), la frecuencia en donde se obtiene la máxima magnitud para la transferencia (3.67) corresponde a

$$\omega_c = \frac{1}{1000\sqrt{119 \cdot 10^{-12}}} \approx 91,67 \text{ [rad/s]} \quad (3.68)$$

Si se evalúa la expresión (3.67) para $\omega = \omega_c$ resulta

$$\frac{V_2(j\omega_c)}{V_1(j\omega_c)} = -\frac{7}{24} \quad (3.69)$$

Se recuerda que
 $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$.

noindent lo que, en [dB], corresponde a

$$\left. \frac{|V_2(j\omega_c)|}{|V_1(j\omega_c)|} \right|_{dB} = -10,702 \text{ [dB]} \quad (3.70)$$

Es decir, la magnitud de la ganancia de la transferencia (3.67) no superará los $-10,7 \text{ [dB]}$ para todo el rango de frecuencias cubierto (desde $\omega = 0$ a $\omega \rightarrow \infty$).

Los análisis efectuados anteriormente son respaldados por los diagramas de Bode de la transferencia descrita, los cuales son presentados en las figuras 3.22 y 3.23.

De los diagramas de Bode presentados se puede apreciar la concordancia del valor de la frecuencia central calculada en forma teórica con el observado en forma gráfica, así como también el valor de la magnitud en dB conseguido a dicha frecuencia.

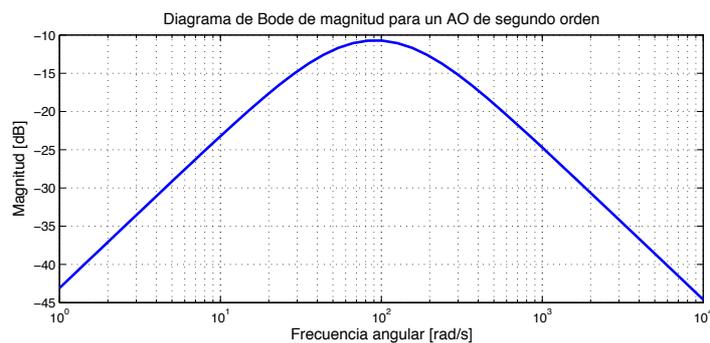


Figura 3.22: Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de una red de segundo orden con AO.

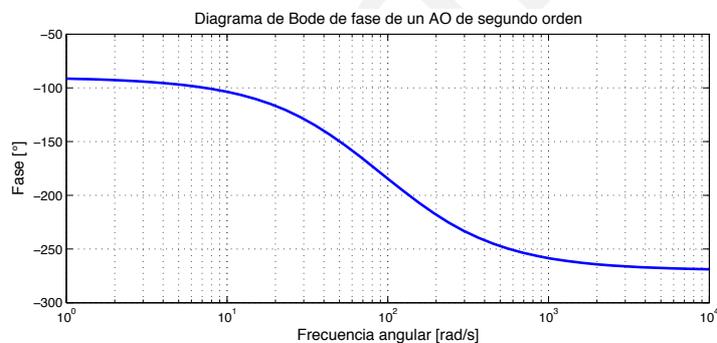


Figura 3.23: Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de una red de segundo orden con AO.

Errores

Los errores que se pueden cometer al resolver un problema de esta índole pueden ser diversos y tener origen en los fundamentos de redes eléctricas. A continuación se mencionan los principales.

Error 1 Manipulación incorrecta de números complejos tanto en su desarrollo como en su operatoria.

Error 2 Aplicación errónea del teorema de Millman.

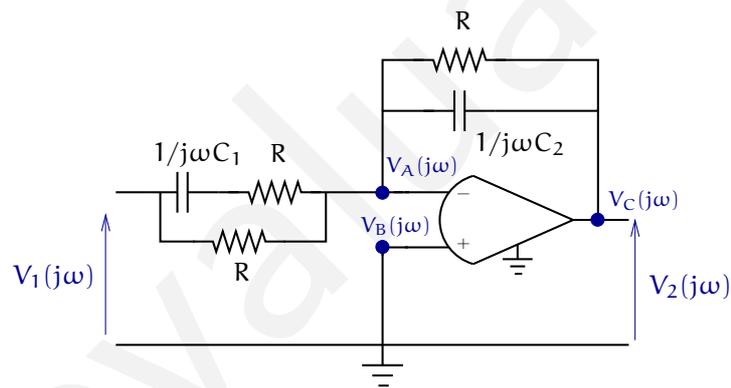
Error 3 Formulación incorrecta del LVK sobre la red.

Error 4 Inversión del comportamiento de las componentes dinámicas de la red cuando se efectúa un análisis cualitativo de la respuesta en frecuencia.

Error 5 Aplicar incorrectamente los teoremas de reducción de redes eléctricas (redes equivalentes en serie y paralelo).

Una variante de interés

Supongamos ahora que la red anterior posee una resistencia en paralelo a la submalla de entrada, tal como se presenta en la figura.



La respuesta en frecuencia de esta red puede calcularse considerando que la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ corresponde a un amplificador operacional operando como inversor, tal como se presenta en la figura 3.24, donde la ganancia está dada por la ecuación (3.71).

$$\boxed{\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{Z_F(j\omega)}{Z_I(j\omega)}} \quad (3.71)$$

En el caso de interés, las impedancias $Z_F(j\omega)$ y $Z_I(j\omega)$ resultan ser

$$Z_F(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC_2} \quad (3.72a)$$

$$Z_I(j\omega) = \frac{R(1 + j\omega RC_1)}{1 + 2j\omega RC_1} \quad (3.72b)$$

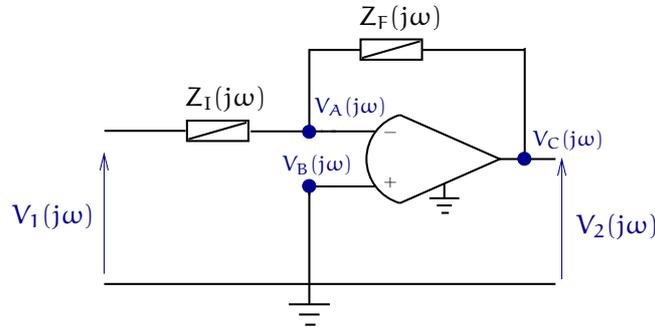


Figura 3.24: Amplificador inversor convencional implementado con AO.

Por lo tanto, la relación $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ resulta

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{1 + 2j\omega RC_1}{(1 + j\omega RC_1)(1 + j\omega RC_2)} \quad (3.73)$$

La transferencia (3.73) presenta una magnitud de 1 cuando $\omega \rightarrow 0$ y tiende a 0 cuando $\omega \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el comportamiento de esta red es, aparentemente de tipo pasa-bajos y no pasa-banda como en el caso analizado en el problema principal.

El mismo resultado deducido con la transferencia (3.73) puede obtenerse efectuando un análisis cualitativo de la respuesta en frecuencia de la red. Cuando $\omega \rightarrow 0$, los condensadores actúan como circuito abierto; en consecuencia, la ganancia presentada es -1 , pues sólo se encuentran conectadas las resistencias de retroalimentación y la conectada entre $V_1(j\omega)$ y el nodo A. Por otra parte, cuando $\omega \rightarrow \infty$, los condensadores actúan como cortocircuito; por lo tanto, $V_2(j\omega) \rightarrow 0$, pues dicha tensión tiende a ser la misma a la que se presenta en el nodo A, la cual es 0 debido a la igualdad de tensiones entre los nodos A y B.

Analizando en términos numéricos la expresión (3.73), esta relación resulta en la relación (3.74) tomando como valores de las componentes las mismas que las descritas para el problema principal.

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{1 + j14 \cdot 10^{-3}\omega}{(1 + j7 \cdot 10^{-3}\omega)(1 + j25 \cdot 10^{-3}\omega)} \quad (3.74)$$

La respuesta en frecuencia antes descrita es presentada en los diagramas de Bode de magnitud y fase presentes en las figuras 3.25 y 3.26. En éstas se comprueba el carácter pasa-bajos de la red.

Las figuras presentadas permiten concluir que la determinación de la respuesta en frecuencia para una red dada no dan pie para deducir el comportamiento

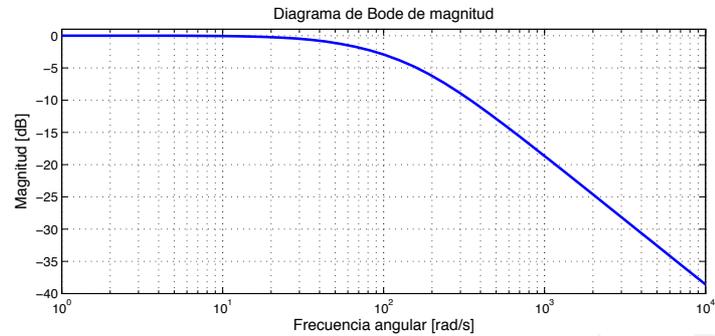


Figura 3.25: Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia de una variante del filtro pasa-banda.

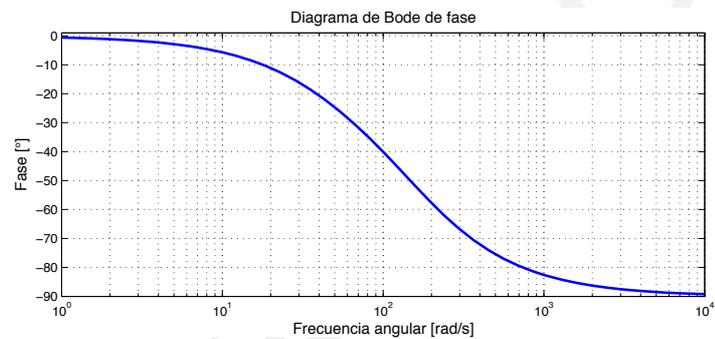


Figura 3.26: Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de una variante del filtro pasa-banda.

de una variante de ésta, pues su comportamiento es completamente diferente, a pesar de que la modificación sea sólo adicionar una simple resistencia a la red.

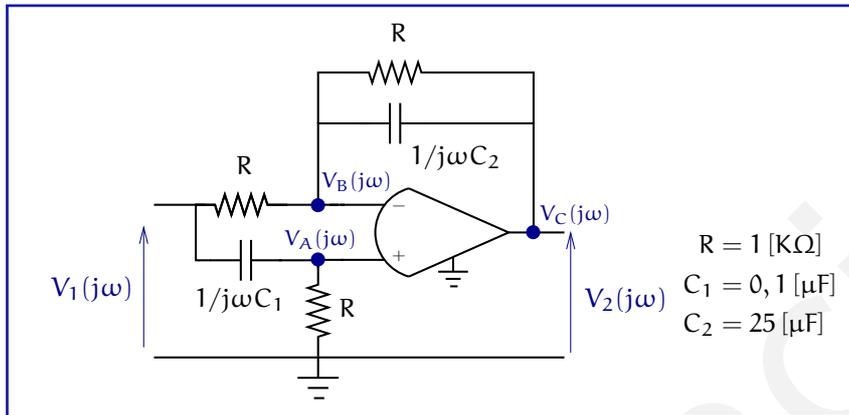
Además, puede destacarse que la respuesta en frecuencia obtenida no difiere mayormente con respecto a la respuesta en frecuencia de la red analizada en la sección 3.3.1. Por ende, resultará en un mejor diseño la implementación de un filtro pasa-bajos como el presentado en dicha sección y no el precedente, debido a la mayor cantidad de componentes requeridos.

3.3.4. Respuesta en frecuencia de una red complementaria de segundo orden mediante AO

Problema 3.6.

Considere el circuito de la figura. El propósito de esta sección será analizar la respuesta en frecuencia de la red e inferir algunas características relevantes para

este tipo de circuitos.



3.6.1 Determine la transferencia entrada-salida de la red $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$.

3.6.2 A partir de la transferencia obtenida concluya la naturaleza del filtro.

Solución

El tratamiento analítico es similar a los procedimientos efectuados en los ejercicios anteriores. Teniendo en consideración que las tensiones $V_A(j\omega)$ y $V_B(j\omega)$ son idénticas, entonces se obtiene:

$$V_B(j\omega) = \frac{j\omega RC_1}{1 + j\omega RC_1} V_1(j\omega) \quad (3.75)$$

Además, aplicando el teorema de Millman sobre el nodo B resulta la siguiente expresión

$$V_B(j\omega) = \frac{R \cdot V_2(j\omega) + Z_{eq}(j\omega) \cdot V_1(j\omega)}{R + Z_{eq}(j\omega)} \quad (3.76)$$

Donde $Z_{eq}(j\omega) = R/(1 + j\omega RC_2)$. El desarrollo de la expresión (3.76) origina

$$V_B(j\omega) = \frac{(1 + j\omega RC_2)V_2(j\omega) + V_1(j\omega)}{2 + j\omega RC_2} \quad (3.77)$$

Finalmente, reemplazando la expresión (3.77) en (3.75) se obtiene la transferencia del sistema.

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = - \frac{1 + \omega^2 R^2 C_1 C_2 + j\omega RC_1}{1 - \omega^2 R^2 C_1 C_2 + j\omega R(C_1 + C_2)} \quad (3.78)$$

La transferencia (3.78) puede ser analizada en forma numérica asignando valores a las componentes de la red. Si se usan los valores dados, es decir, $R = 1$ [K Ω], $C_1 = 0,1$ [μ F] y $C_2 = 25$ [μ F], entonces se obtienen los diagramas de Bode presentes en las figuras 3.27 y 3.28, siendo la transferencia del sistema la presentada en (3.79)

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{1 + 2,5 \cdot 10^{-6}\omega^2 + j10^{-4}\omega}{1 - 2,5 \cdot 10^{-6}\omega^2 + j25,1 \cdot 10^{-3}\omega} \quad (3.79)$$

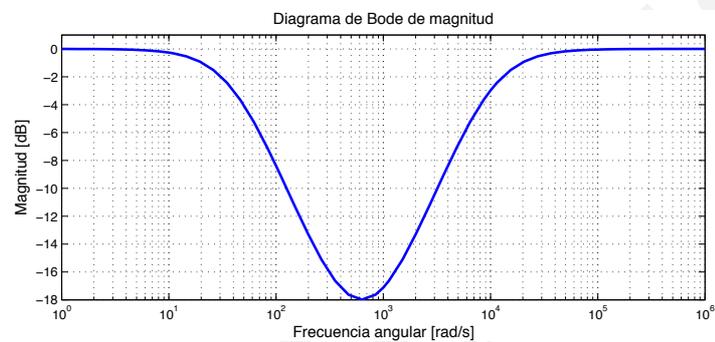


Figura 3.27: Diagrama de Bode para la magnitud de la transferencia en un AO de segundo orden elimina-banda.

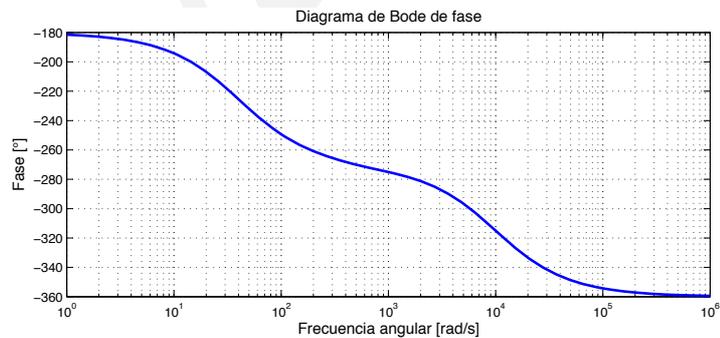


Figura 3.28: Diagrama de Bode para la fase de la transferencia de una red con AO elimina-banda.

Si bien el análisis cuantitativo de la expresión (3.78) posee una mayor complejidad que para los casos anteriormente vistos, sigue resultando sencillo efectuar un análisis cualitativo de la respuesta en frecuencia de la red. Así, cuando $\omega \rightarrow 0$, se aprecia que los condensadores tienden a comportarse como circuitos

abiertos y, por ende, la red presentada resulta ser un simple inversor de ganancia -1 . Cuando $\omega \rightarrow \infty$ los condensadores actúan como cortocircuito; en consecuencia, la red entrega a la salida (presente en $V_2(j\omega)$) la misma tensión presente a la entrada (identificada como $V_1(j\omega)$). Por ende, resulta natural pensar que debe existir un rango de frecuencias para los cuales la red presente una atenuación, concluyendo así que ésta exhibe, probablemente, un comportamiento elimina-banda. Lo anterior es corroborado al observar los diagramas de Bode de la transferencia del sistema.

Errores

Error 1 Deducción incorrecta de la respuesta en frecuencia de la red en forma cualitativa. Es relevante que este análisis sea efectuado correctamente, pues permite corroborar los resultados analíticamente obtenidos y descubrir errores algebraicos.

Error 2 Deducir numéricamente la respuesta en frecuencia de la red. Se sugiere que los cálculos algebraicos que deban realizarse sean efectuados utilizando expresiones literales y no numéricas, pues introducen una mayor probabilidad de error.

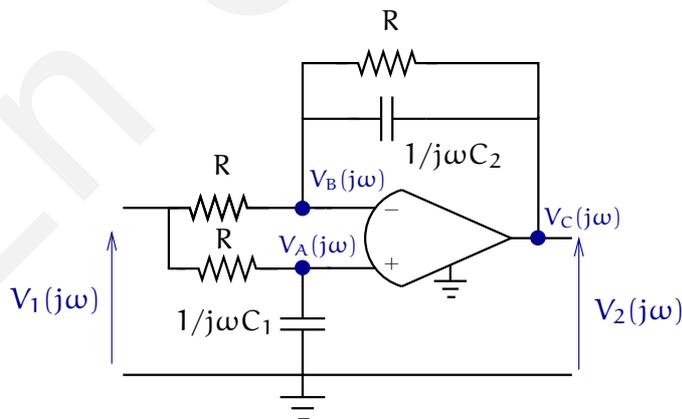
Error 3 Manipulación incorrecta de números complejos.

Error 4 Reducción incorrecta de redes equivalentes.

Error 5 Planteamiento errado de LVK o LCK (o ambos).

Una variante de interés

Supongamos que se ha implementado la red presentada en el problema principal, pero se ha cometido un error de conexión tal como el que se presenta en la figura.



En esta variante se apreciará el impacto, en la respuesta en frecuencia, que tiene el intercambio de dos componentes de la red. La relación $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ será determinada mediante el método de nodos. Las ecuaciones relevantes para el análisis son

$$0 = (V_2(j\omega) - V_B(j\omega)) \left(\frac{1}{R} + j\omega C_2 \right) + (V_1(j\omega) - V_B(j\omega)) \frac{1}{R} \quad (3.80a)$$

$$0 = (V_1(j\omega) - V_A(j\omega)) \frac{1}{R} - V_A(j\omega) j\omega C_1 \quad (3.80b)$$

$$V_A(j\omega) = V_B(j\omega) \quad (3.80c)$$

El conjunto de ecuaciones (3.80a) a (3.80c) permiten obtener la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ despejando las variables auxiliares $V_A(j\omega)$ y $V_B(j\omega)$ en función de $V_2(j\omega)$ y $V_1(j\omega)$. Si se toma la ecuación (3.80b) y se despeja $V_A(j\omega)$ resulta

$$V_A(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC_1} V_1(j\omega) \quad (3.81)$$

Ahora bien, utilizando la relación (3.80c) y reemplazando el valor de $V_B(j\omega)$ en (3.80a) se tendrá la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$, la cual es

$$\boxed{\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{1 + j\omega R(C_2 - C_1)}{(1 + j\omega RC_1)(1 + j\omega RC_2)}} \quad (3.82)$$

La expresión (3.82) presenta una respuesta en frecuencia bastante distante del comportamiento elimina-banda que se pretende imponer a la red. Es más, el tipo de respuesta en frecuencia que presenta corresponde a la de un filtro pasa-bajos. Lo anterior puede ser comprobado evaluando dicha transferencia para las frecuencias extremas. Cuando $\omega \rightarrow 0$, la expresión (3.82) tiende a 1, en tanto que cuando $\omega \rightarrow \infty$ el resultado obtenido tiende a 0. El mismo resultado puede ser deducido si se aplica un análisis cualitativo a la red: cuando $\omega \rightarrow 0$, los condensadores se comportan como circuito abierto y, por ende, la tensión $V_2(j\omega)$ es forzada a $V_1(j\omega)$ debido a que no existen corrientes circulando a través del circuito y, en consecuencia, $V_2(j\omega)$ queda al mismo potencial del nodo B, el cual está a una tensión igual a $V_1(j\omega)$. Cuando $\omega \rightarrow \infty$, los condensadores actúan como cortocircuito y hacen que la tensión $V_B(j\omega)$ tienda a 0, logrando que $V_2(j\omega)$ también tienda a 0.

Si se toman como valores para los componentes los mismos adoptados para el problema principal (lo cual es razonable, pensando que esta variante resulta de un error en la implementación de la red elimina-banda analizada), la relación (3.82) resulta

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{1 + j24,9 \cdot 10^{-3}}{(1 + j10^{-4}\omega)(1 + j25 \cdot 10^{-3}\omega)} \quad (3.83)$$

Analizando el resultado expuesto en (3.83) mediante diagramas de Bode, se obtienen los diagramas expuestos en 3.29 y 3.30.

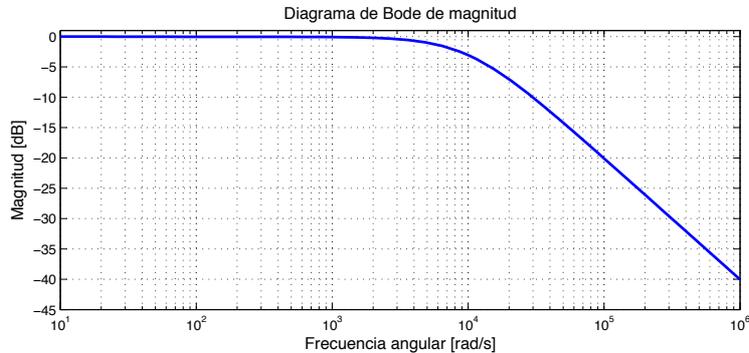


Figura 3.29: Diagrama de Bode para la magnitud para una red elimina-banda mal implementada.

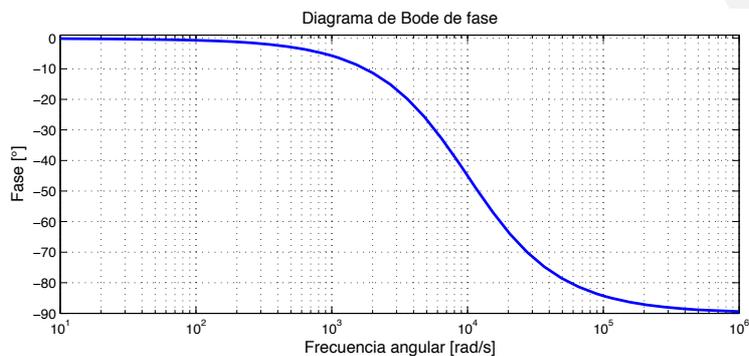


Figura 3.30: Diagrama de Bode para la fase para una red elimina-banda mal implementada.

3.4. Ejercicios suplementarios

Problema 3.7. Suponga que se desea obtener una respuesta en frecuencia $H(j\omega) = V_o(j\omega)/V_e(j\omega)$, que cumple con

$$|H(j\omega)| = \frac{9 \cdot 10^6}{\omega^2 + 9 \cdot 10^6} \quad (3.84)$$

3.7.1 Proponga una red lineal que cumpla con esta característica, usando sólo resistores y condensadores.

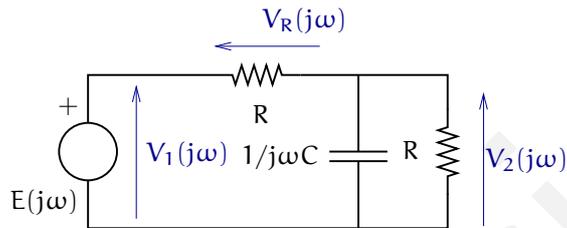
3.7.2 Proponga una red lineal que cumpla con esta característica usando además amplificadores operacionales.

Problema 3.8. Dada la red de la figura, determine

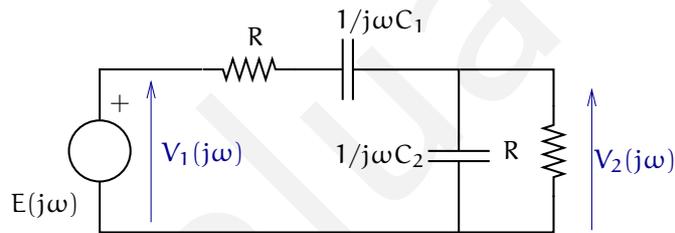
3.8.1 La relación $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ y $V_R(j\omega)/V_1(j\omega)$.

3.8.2 ¿Cómo se relacionan las dos transferencias antes calculadas?

3.8.3 ¿Qué diferencia presenta esta red con la propuesta en 3.2.1?



Problema 3.9. Considere la siguiente red, en donde $C_1 = 5 [\mu\text{F}]$, $C_2 = 10 [\mu\text{F}]$, $R = 1 [\text{K}\Omega]$.

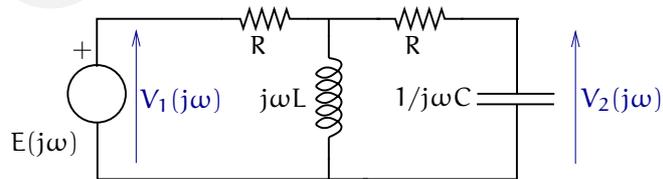


3.9.1 Determine cualitativamente la respuesta en frecuencia de la red.

3.9.2 Determine la relación $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$.

3.9.3 Dibuje el diagrama de Bode de magnitud y fase.

Problema 3.10. Considere la red presentada en la siguiente figura.



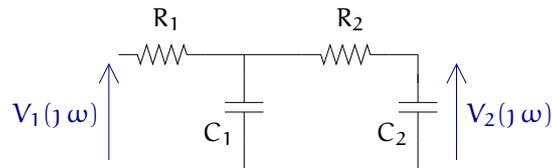
Considere que $R = 1 [\text{K}\Omega]$, $C = 3 [\mu\text{F}]$, $L = 100 [\text{mH}]$. En base a estos datos, determine

3.10.1 La respuesta en frecuencia de la red en forma cualitativa. ¿Qué tipo de comportamiento presenta?

3.10.2 La transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$.

3.10.3 Si las componentes dinámicas de la red se intercambian (es decir C se conecta en la posición de L y viceversa), determine la nueva respuesta en frecuencia de la red $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$. ¿Cómo se relaciona esta respuesta en frecuencia con la calculada en el punto anterior?.

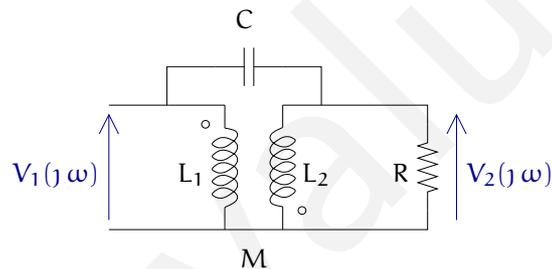
Problema 3.11. Considere la red presentada en la siguiente figura.



3.11.1 Determine la respuesta en frecuencia de la red en forma cualitativa. ¿Qué tipo de comportamiento presenta?.

3.11.2 Usando las mismas cuatro componentes, proponga una red (no trivial) que tenga una característica complementaria a la anterior.

Problema 3.12. Considere la red presentada en la siguiente figura.



3.12.1 Determine la relación $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ y determine la naturaleza de la respuesta en frecuencia.

3.12.2 Repita el análisis anterior si se remueve el condensador.

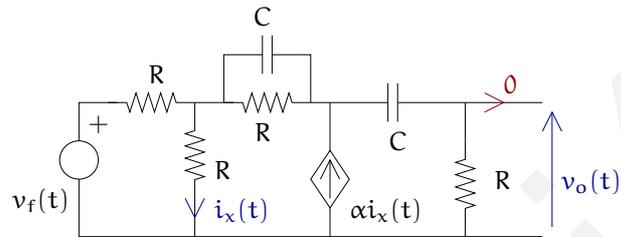
Problema 3.13. Un pulso de alto 5 [V] y ancho τ [s] se transmite por una línea no ideal cuya respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ está dada por

$$H(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} \quad (3.85)$$

Al final de la línea un dispositivo debe decidir si la señal recibida corresponde a un pulso enviado, o es sólo ruido. Para ello, su algoritmo está programado para reconocer que se trata de un pulso si el voltaje recibido supera 3 [V] en algún instante.

Determine que relación deben satisfacer T y τ para evitar un *falso negativo*, es decir, decidir que se trata de ruido, cuando efectivamente se recibió un pulso, deformado por la limitada respuesta en frecuencia de la línea.

Problema 3.14. Para la red de la figura se sabe que $v_f(t) = V_e \cos(\omega t)$ y que $R = 20 \text{ [K}\Omega\text{]}$ y $C = 15 \text{ [}\mu\text{F}\text{]}$.



- 3.14.1** Determine las condiciones que debe cumplir α para que $v_o(t)$ alcance estado estacionario y sea también una pura senoide de la misma frecuencia que la de $v_f(t)$.
- 3.14.2** Suponiendo que α satisface las condiciones calculadas precedentemente, calcule amplitud y fase de $v_o(t)$ en estado estacionario.

Capítulo 4

FILTROS ANALÓGICOS

4.1. Introducción

En el capítulo precedente se desarrollaron problemas sobre la respuesta en frecuencia de redes lineales, estables e invariantes en el tiempo. Tal como se dijo en la introducción de ese capítulo, una de las aplicaciones medulares de la capacidad de las redes de discriminar según frecuencia es el filtraje. De hecho, el tema de filtros, que se ejemplificará en este capítulo pudo incorporarse en el capítulo anterior; sin embargo, dada su importancia, se prefirió tratarlo en un capítulo independiente.

Como el título indica, nos centraremos en aquellos filtros que se construyen con redes eléctricas (pasivas y activas), por lo que son sistemas de tiempo continuo y de magnitudes continuas. A estos filtros se denomina filtros analógicos, en contraposición a los filtros digitales, los que se caracterizan por ser implementados en programas almacenados y ejecutados, usualmente, en procesadores digitales dedicados.

Uno de los aspectos de mayor importancia en el diseño de filtros guarda relación con la teoría de aproximación. El objetivo de esa teoría es lograr filtros que se puedan realizar físicamente, y que sean los más cercanos posibles (de acuerdo a cierto criterio de optimización) a la característica de un filtro ideal. Ese filtro ideal, en el caso pasa-banda, tiene las características que se muestran en la figura 4.1.

Se ha demostrado que estas características son imposibles de implementar físicamente, porque un sistema lineal con esa respuesta en frecuencia debería tener un comportamiento no causal. Ello significa que el sistema respondería antes que la excitación sea aplicada. Entonces aparece la teoría de aproximación, en la que se busca una función de transferencia de un filtro lineal causal e invariante en el tiempo, cuya respuesta en frecuencia sea *parecida* a la de la Figura 4.1. Hay distintos criterios para medir la distancia entre un filtro realizable y la característica del filtro ideal mostrada. Esos distintos criterios dan origen a distintas realizaciones, tales co-

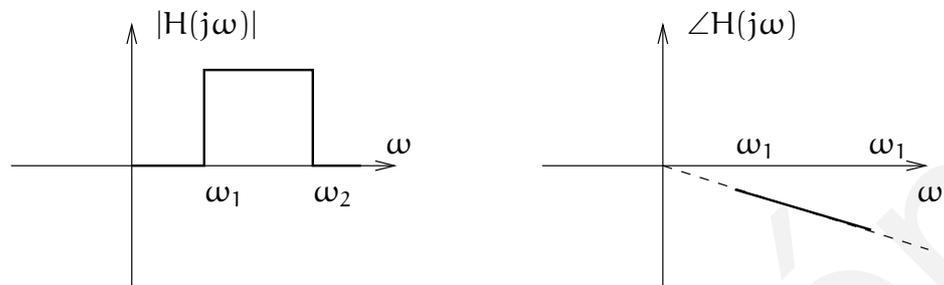


Figura 4.1: Características ideales de magnitud y fase de un filtro pasa banda

mo Butterworth, Chebyshev y otros. Estas aproximaciones se desarrollan para filtros pasa-bajos y se pueden extender a filtros pasa-altos, pasa-bandas y elimina-bandas a través de escalamientos y transformaciones en frecuencia.

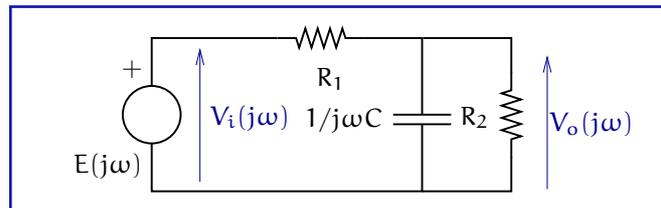
Para obtener el máximo provecho de los problemas de este capítulo, el estudiante debe tener un buen manejo de los conceptos y las herramientas relacionados con la respuesta en frecuencia de redes eléctricas.

4.2. Diseño de filtros pasivos.

4.2.1. Diseño de filtros pasivos de primer orden

Problema 4.1.

Dada la red RC de la figura, se procederá a diseñar los valores de las componentes de forma tal de obtener el filtro deseado.



4.1.1 Describa cualitativamente el comportamiento de la red y determine la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$.

4.1.2 En base a las deducciones efectuadas en la pregunta anterior, diseñe la red para que la frecuencia de corte se encuentre en 10 [KHz], con una ganancia a frecuencia 0 de -6 [dB].

Dado que hay una única componente dinámica, sólo puede haber una frecuencia de corte.

Solución

La descripción cualitativa de la respuesta en frecuencia de la red permitirá tener un primer acercamiento al problema. Cuando $\omega \rightarrow 0$, el condensador presentará un comportamiento análogo al de un circuito abierto; en consecuencia toda la corriente fluye a través de la resistencia R_2 , por lo que es posible efectuar un divisor de tensiones resistivo, el cual resulta en

$$\frac{V_o(j0)}{V_i(j0)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.1)$$

Por otra parte, cuando $\omega \rightarrow \infty$, el condensador presenta un comportamiento de cortocircuito; por lo tanto, el valor de $V_o(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ tiende a 0. En base a los análisis efectuados es posible concluir que la red de la figura (con salida observada en $V_o(j\omega)$) es un filtro pasa-bajos.

Esta conclusión descansa en la simplicidad de la red, ya que la respuesta en frecuencia es monótona.

Ahora que se conoce el comportamiento de la red, se procede a determinar la expresión analítica para la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$, la cual puede ser obtenida en forma directa al efectuar el divisor de tensiones correspondiente en la red bajo análisis. De esta manera se llega a

$$V_o(j\omega) = \frac{(j\omega C)^{-1}/R_2}{R_1 + (j\omega C)^{-1}/R_2} V_i(j\omega) \quad (4.2)$$

En donde

$$\frac{1}{j\omega C} // R_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \quad (4.3)$$

Reemplazando la expresión (4.3) en (4.2) se obtiene la transferencia en estudio ($V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$), la cual queda expresada como:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} \quad (4.4)$$

El resultado expresado en la ecuación (4.4) coincide con lo expresado en forma cualitativa para la respuesta en frecuencia de la red entregada: cuando $\omega \rightarrow 0$, la transferencia (4.4) tiende a lo expresado en (4.1), en tanto que el cociente tiende a 0 en la medida que $\omega \rightarrow \infty$.

Antes de pasar al proceso de diseño de las componentes de la red, es necesario enfatizar algunas ideas:

- Con el propósito de hacer más sencillo el proceso de diseño del filtro, se debe expresar la transferencia (4.4) de la forma

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{K_0}{1 + j\omega/\omega_c} \quad (4.5)$$

En donde K_0 corresponde a la ganancia a frecuencia 0 de la transferencia y ω_c es la frecuencia de corte deseada.

- El resultado expresado en (4.5) puede ser utilizado como base para esbozar el diagrama de Bode asintótico para la respuesta en frecuencia de la red.
- Las componentes a utilizar en el diseño de la red deben poseer *valores juiciosos*, es decir, las resistencias a emplear no pueden ser muy pequeñas (del orden de las decenas de Ω o inferiores) ni tampoco muy elevadas (del orden de los $M\Omega$). A su vez, los valores para los condensadores utilizados no pueden ser muy elevados. Valores no más allá de las centenas de μF resultan factibles de encontrar en el mercado.

La razón que hay detrás de estas limitantes se encuentra en la realizabilidad del filtro: si bien es posible encontrar en el mercado resistencias con valores muy pequeños, su implementación en un filtro resulta infactible desde el punto de vista energético, pues resistencias muy pequeñas implican grandes corrientes y, en consecuencia, grandes potencias a disipar. Por otra parte, valores muy elevados de resistencias hacen que la red sea muy susceptible a interferencia electromagnética, ya que valores muy pequeños de corrientes (que pueden ser el producto de inducciones electromagnéticas en los cables) generan caídas de tensión no despreciables en los resistores. También es necesario destacar que las tolerancias de las

componentes reales empleadas influyen sobre la respuesta en frecuencia de la red, siendo más crítica su variación para valores extremos.

En el caso de los condensadores, su limitante se encuentra en la factibilidad de hallar en el mercado componentes de valores elevados; si bien es posible encontrar condensadores del orden de los mF, su valor y tamaño físico son muy elevados.

En base a las consideraciones entregadas anteriormente, se procederá a efectuar el diseño solicitado. Se comenzará analizando la ganancia a frecuencia 0. Para ello, es necesario que se recuerde la definición de dB:

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log (|T(j\omega)|) \quad (4.6)$$

En donde $T(j\omega)$ corresponde a la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ en nuestro caso.

Por otra parte, al expresar la transferencia (4.4) acorde a (4.5) se obtiene

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + j\omega R_1 R_2 C / (R_1 + R_2)} \quad (4.7)$$

Una ganancia de -6 [dB] a frecuencia 0 implica que:

$$-6 = 20 \log (|V_o(j0)/V_i(j0)|) \Rightarrow \left| \frac{V_o(j0)}{V_i(j0)} \right| \approx 0,5 \quad (4.8)$$

Empleando el resultado expuesto en (4.8) en la transferencia (4.1) (que corresponde a la misma condición expresada para K_0 en (4.7)) resulta

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \quad (4.9)$$

Lo que se traduce en

$$\frac{R_1}{R_2} = 1 \quad (4.10)$$

Por lo tanto, eligiendo $R_1 = R_2$ se cumple la condición de ganancia de -6 [dB] a frecuencia 0.

Utilizando el resultado expuesto en (4.10), es posible obtener la condición para la frecuencia de corte. Observando la expresión (4.7) se aprecia que el valor de ω_c corresponde a

$$\omega_c = \frac{2}{R_1 C} \quad (4.11)$$

Aplicando a la expresión (4.11) el requerimiento de diseño dado en el enunciado resulta en

$$R_1 C = \frac{1}{10^4 \pi} \quad (4.12)$$

Así, se elige en forma arbitraria $R_1 = R_2 = 1$ [K Ω]. Por lo tanto, el valor de C resulta ser

$$C = \frac{1}{10^4 \pi R_1} \approx 31,8 \text{ [nF]} \quad (4.13)$$

En consecuencia, la transferencia (4.4) resulta ser

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{10^3}{2 \cdot 10^3 + j0,0318\omega} \quad (4.14)$$

Utilizando el software MATLAB se esbozan los diagramas de Bode de magnitud y fase para la transferencia (4.14), los cuales se presentan en las figuras 4.2 y 4.3.

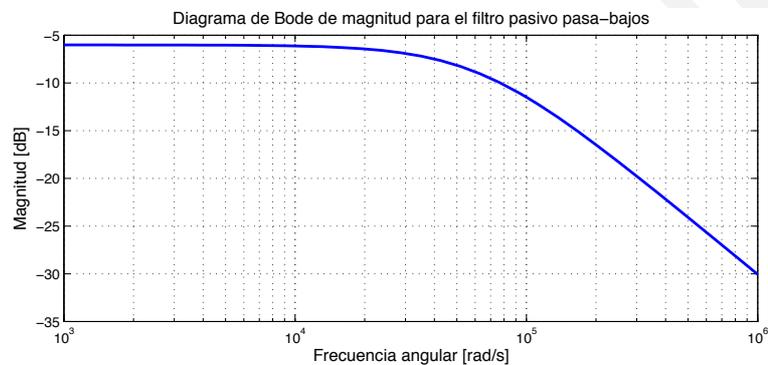


Figura 4.2: Diagrama de Bode de magnitud para un filtro pasivo pasa-bajos RC.

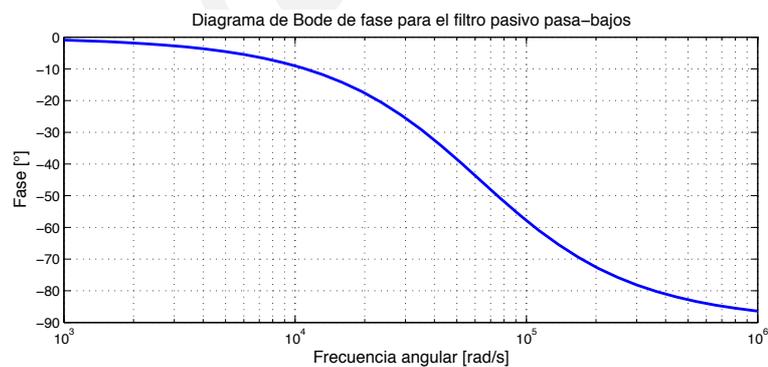


Figura 4.3: Diagrama de Bode de fase para un filtro pasivo pasa-bajos RC.

Una ganancia de -6 [dB] es equivalente a una atenuación de 6 [dB], es decir, equivale a una ganancia de magnitud igual a 0,5.

En el diagrama presentado en la figura 4.2 se aprecia que los valores de diseño adoptados cumplen con los requerimientos solicitados en el enunciado del problema, presentándose una ganancia de -6 [dB] a frecuencia 0 y una caída de 3 [dB] a $f_c = 10$ [KHz].

Errores

El problema presentado en esta sección requiere del estudiante una sólida base en álgebra de números complejos y análisis en frecuencia de redes eléctricas. En consecuencia, los errores más frecuentes a la hora de resolver un problema de este tipo son

Error 1 Errores algebraicos en el tratamiento de expresiones con números complejos.

Error 2 Deducción incorrecta del análisis cualitativo para la respuesta en frecuencia de la red.

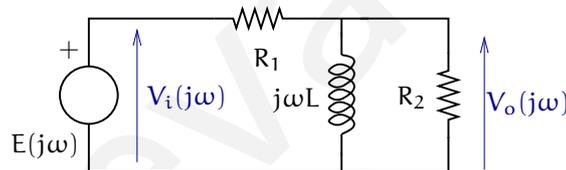
Error 3 Errores en la conversión de dB a magnitud y viceversa.

Error 4 Elección inadecuada de valores para las componentes utilizadas en la red.

Resulta útil recordar que una caída de 3 [dB] corresponde a una ganancia de $1/\sqrt{2}$. A su vez, una caída de 20 [dB] corresponde a una ganancia igual a $1/10$.

Una variante de interés

Supongamos ahora que la respuesta en frecuencia deseada $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ corresponde a la apreciada en la red RL de la figura. La respuesta en frecuencia observada en la componente dinámica de esta red será el complemento de la respuesta obtenida en el problema principal. Supongamos que los requerimientos de diseño son los mismos que los solicitados para la red RC.



El análisis cualitativo de la red indica que presenta un comportamiento pasaltos (cuando la salida es observada en R_2). Lo anterior se verifica analizando el comportamiento de la red para los extremos del rango de frecuencias. Cuando $\omega \rightarrow 0$, el inductor se comporta como un cortocircuito, por lo que $V_o(j0) = 0$. Por otro lado, cuando $\omega \rightarrow \infty$, el inductor es análogo a un circuito abierto, por lo que la tensión $V_o(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ tiende a

$$V_o(j\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i(j\infty) \quad (4.15)$$

Al calcular la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ se obtiene

$$\boxed{\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{j\omega L R_2}{R_1 R_2 + j\omega L (R_1 + R_2)}} \quad (4.16)$$

Ahora bien, la transferencia (4.16) puede ser escrita en la forma canónica para un filtro pasa-altos:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = K_\infty \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \quad (4.17)$$

Donde K_∞ corresponde a la ganancia cuando $\omega \rightarrow \infty$ y ω_c es la frecuencia de corte de la red. Efectuando operaciones algebraicas sobre la expresión (4.16) se obtiene

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{j\omega L(R_1 + R_2)/R_1 R_2}{1 + j\omega L(R_1 + R_2)/R_1 R_2} \quad (4.18)$$

El requerimiento de ganancia $K_\infty = -6$ [dB] lleva a la misma relación obtenida en (4.10) para el caso de la red RC.

Por otra parte, la frecuencia de corte se puede expresar en función de las componentes de la red como

$$\omega_c = \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \quad (4.19)$$

Utilizando el resultado expuesto en (4.10) y reemplazando a R_1 en (4.19) se obtiene

$$\omega_c = \frac{R_2}{2L} \quad (4.20)$$

Ahora bien, dado que el requerimiento de diseño es que la frecuencia de corte sea de $f_c = 10$ [KHz], entonces la expresión (4.20) se traduce en

$$f_c = \frac{R_2}{4\pi L} \quad (4.21)$$

Asumiendo $R_1 = R_2 = 2$ [K Ω], el valor de la inductancia que permite obtener la respuesta en frecuencia deseada es

$$L = \frac{R_2}{4\pi f_c} \approx 15,9 \text{ [mH]} \quad (4.22)$$

El resultado del diseño puede corroborarse al esbozar el diagrama de Bode de la transferencia (4.16) para los componentes calculados por diseño. Los diagramas de Bode presentados en las figuras 4.4 y 4.5 demuestran que la elección de las componentes ha sido la correcta.

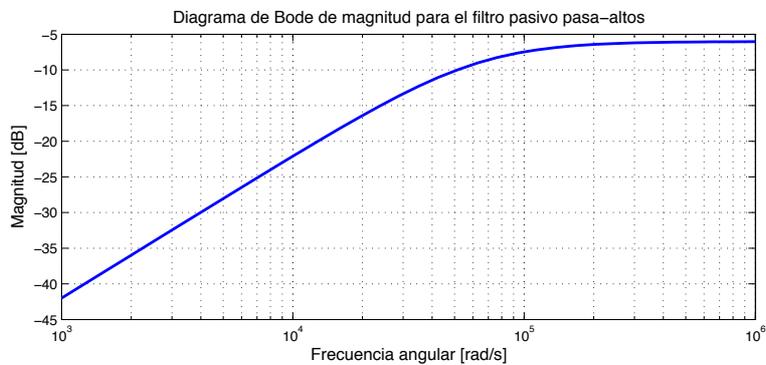


Figura 4.4: Diagrama de Bode de la magnitud del filtro pasivo pasa-altos diseñado.

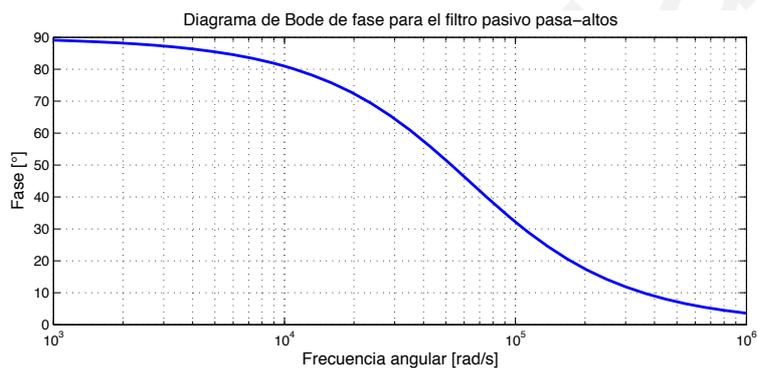
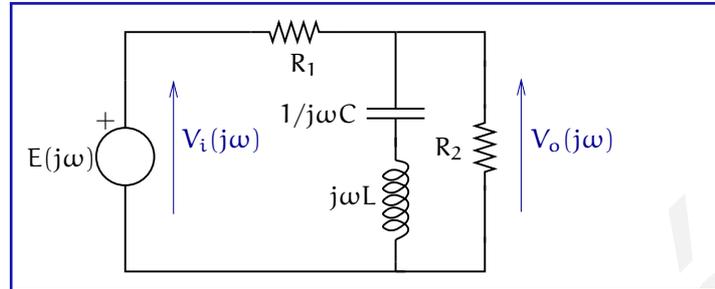


Figura 4.5: Diagrama de Bode de la fase del filtro pasivo pasa-altos diseñado.

4.2.2. Diseño de filtros pasivos de segundo orden

Problema 4.2.

Considere la red RLC serie de la figura. Las componentes se elegirán de manera de cumplir con los requisitos de diseño planteados en el problema.



4.2.1 Determine la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ y verifique que se trata de un filtro elimina-banda.

4.2.2 Diseñe la red de forma que la frecuencia central de la respuesta en frecuencia se encuentre en 50 [KHz], con un ancho de banda de 10 [KHz] y una ganancia de -20 [dB] fuera de la banda de supresión.

Solución

Siempre resulta conveniente efectuar un primer acercamiento al análisis de la red tomando como referencia los extremos del rango de frecuencias (al que se ha denominado como análisis cualitativo): cuando $\omega \rightarrow 0$, el condensador se comporta como circuito abierto; en consecuencia, la tensión presente en $V_o(j0)$ es:

$$V_o(j0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i(j0) \quad (4.23)$$

Por otro lado, cuando $\omega \rightarrow \infty$, el inductor se comporta como circuito abierto, por lo que nuevamente la tensión presente en $V_o(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ tiende al valor expresado en (4.23) evaluado para $\omega \rightarrow \infty$. De acuerdo a lo anterior, es razonable suponer que existe un rango de frecuencias para los cuales la red presenta una atenuación de la señal de entrada mucho mayor a la apreciada en el divisor de tensiones definido anteriormente, ya que el sistema es de segundo orden y no presentará característica pasa-todos; por lo tanto, el comportamiento de la red (con salida observada en $V_o(j\omega)$) obedece a un filtro elimina-banda con atenuación de la señal fuera de la banda de supresión.

El resultado analítico de la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ puede ser obtenido a partir de un divisor de tensiones según:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) // R_2}{R_1 + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) // R_2} \quad (4.24)$$

En donde

$$\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) // R_2 = \frac{R_2(1 - \omega^2 LC)}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_2 C} \quad (4.25)$$

Al sustituir (4.25) en la expresión (4.24), permite obtener la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ dada por:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2 (1 - \omega^2 LC)}{(R_1 + R_2)(1 - \omega^2 LC) + j\omega R_1 R_2 C} \quad (4.26)$$

El resultado expresado en (4.26) corresponde a la transferencia de un filtro elimina-banda, tal como se predijo en forma cualitativa con el análisis inicial.

Respecto a dicho resultado, es posible efectuar algunas afirmaciones

- Tal como se trató en el capítulo anterior (sección 3.2.2), la frecuencia central de la respuesta en frecuencia de la red (y a la cual ocurre la supresión de la señal de entrada) está determinada por el factor $1 - \omega^2 LC$. Al igualar esta expresión a 0, se obtiene la frecuencia de máxima atenuación, y corresponde a:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.27)$$

- La expresión (4.26) puede ser re-escrita como

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = K_{OB} \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega B_W} \quad (4.28)$$

Donde K_{OB} corresponde a la ganancia fuera de la banda de atenuación, B_W es el ancho de banda de supresión y ω_o corresponde a la frecuencia de supresión total.

El re-ordenamiento dado en (4.28) permitirá diseñar de forma más expedita la red e implementarla mediante componentes reales.

- En el caso de filtros pasivos, el valor de K_{OB} (y similares) siempre corresponde a una **atenuación**, ya que no existe forma de entregar mayor energía de la suministrada por la entrada mediante este tipo de redes.

Al re-escribir la expresión (4.26) según lo presentado en (4.28), se obtiene

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1/LC - \omega^2}{1/LC - \omega^2 + j\omega R_1 R_2 / [(R_1 + R_2)L]} \quad (4.29)$$

Se observa que la frecuencia de máxima atenuación ocurre a $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$, concordante con lo expresado en el resultado obtenido en (4.27). Por otra parte, comparando las expresiones (4.28) y (4.29), se aprecia que el ancho de banda corresponde a

$$B_W = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \quad (4.30)$$

En tanto que la ganancia K_{OB} resulta ser

$$K_{OB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.31)$$

De acuerdo a los requerimientos de diseño, la ganancia fuera de la banda de supresión debe ser de -20 [dB], lo cual implica que

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{10} \quad (4.32)$$

Por lo que el cociente R_2/R_1 corresponde a

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{9} \quad (4.33)$$

Seleccionando $R_1 = 9$ [K Ω], se obtiene que $R_2 = 1$ [K Ω], lo cual permite cumplir el requerimiento de ganancia solicitado.

Por otra parte, el ancho de banda de supresión debe ser de 10 [KHz], por lo que la expresión (4.30) se traduce en

$$10^4 = \frac{R_1 R_2}{2\pi(R_1 + R_2)L} \quad (4.34)$$

Empleando los valores de diseño escogidos para R_1 y R_2 en el resultado (4.34) se obtiene

$$10^4 = \frac{9 \cdot 10^2}{2\pi L} \quad (4.35)$$

Por lo que el valor de la inductancia que satisface dicha condición resulta ser

$$L = \frac{9 \cdot 10^2}{2\pi 10^4} \approx 14,32 \text{ [mH]} \quad (4.36)$$

Finalmente, el cumplimiento de la frecuencia central a 50 [KHz] se da mediante la igualdad expresada en (4.27), obteniéndose de esta manera el valor de C que permite satisfacer este requerimiento, el cual es calculado según

$$C = \frac{1}{\omega_o^2 L} \approx 0,708 \text{ [nF]} \quad (4.37)$$

Al utilizar las componentes obtenidas por diseño y computar los diagramas de Bode respectivos, se aprecia que el resultado final coincide en forma precisa con los requerimientos dados en el enunciado del problema. Las figuras 4.6 y 4.7 dan cuenta de los Diagramas de Bode obtenidos para el ejercicio resuelto.

Errores

El tratamiento algebraico en este ejercicio es un poco mayor al efectuado en la sección anterior; sin embargo no debiese presentar mayores complicaciones si los tópicos de análisis fasorial y operatoria con números complejos son dominados con soltura por el estudiante. A continuación se enumeran los errores más frecuentes.

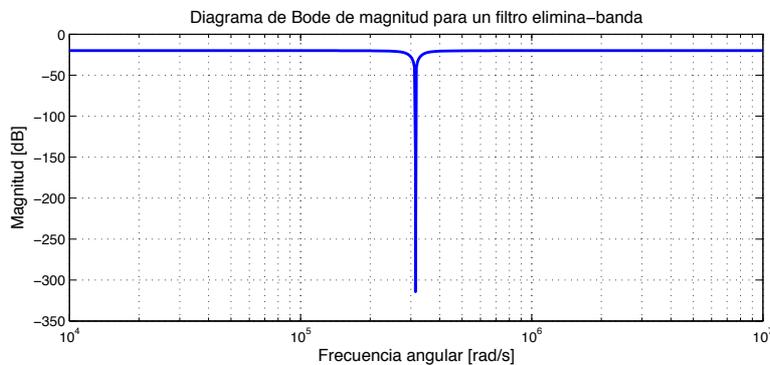


Figura 4.6: Diagrama de Bode de magnitud del filtro pasivo elimina-banda diseñado.

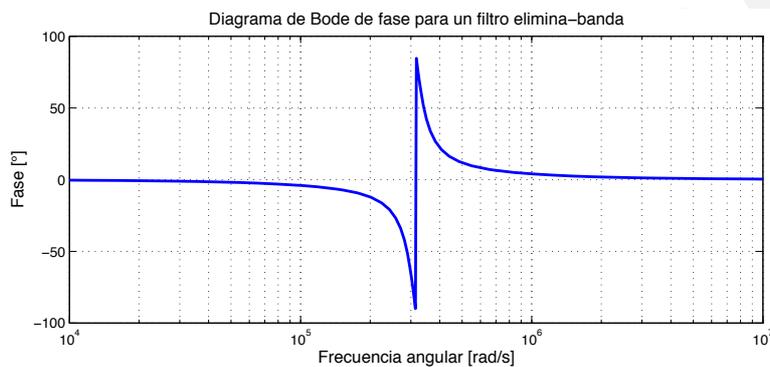


Figura 4.7: Diagrama de Bode de fase del filtro pasivo elimina-banda diseñado.

Error 1 Errores en la manipulación algebraica de las expresiones resultantes del análisis fasorial.

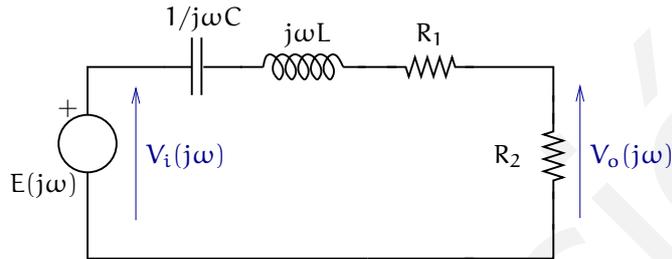
Error 2 Deducción incorrecta de la transferencia analítica $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$.

Error 3 Diseñar el filtro en base a la transferencia dada en (4.26) y no con respecto a (4.28). Si bien este desarrollo es correcto, suele ser frecuentemente más complicado que el propuesto en la última expresión.

Error 4 Dimensionamiento incorrecto de las componentes de la red. Esto puede llevar a escalamientos en las frecuencias de corte, desplazando la respuesta en frecuencia hacia un rango indeseado de trabajo.

Una variante de interés

Una variante al problema principal y que tiene un tratamiento bastante similar, es considerar que la red RLC se encuentra dispuesta como se presenta en la figura adjunta. Se considerará que los requerimientos de diseño son los mismos que los enunciados en el problema principal.



Un análisis cualitativo de la red precedente permite concluir que la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ presenta un comportamiento descrito como un filtro pasa-banda: cuando $\omega \rightarrow 0$, el condensador se comporta como un circuito abierto, lo cual lleva a que $V_o(j0) = 0$. En el extremo opuesto, cuando $\omega \rightarrow \infty$, la corriente está condicionada por el inductor, el cual se comporta como circuito abierto a frecuencias elevadas, por lo que nuevamente la tensión $V_o(j\infty)$ tiende a 0.

La transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ se puede obtener efectuando un simple divisor de tensiones sobre la red, lo cual lleva a:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L + 1/j\omega C} \quad (4.38)$$

El resultado precedente permite obtener finalmente la expresión indicada en (4.39).

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{j\omega R_2 C}{1 - \omega^2 LC + j\omega(R_1 + R_2)C} \quad (4.39)$$

Al igual que en los filtros analizados hasta el momento, existe una representación canónica para un filtro pasa-banda que permite diseñar con facilidad los parámetros de la red. Dicha representación es:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = K_{BC} \frac{j\omega B_W}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega B_W} \quad (4.40)$$

En general, la frecuencia central no corresponde a la media aritmética de las frecuencias de corte laterales, salvo en ciertos casos especiales.

En donde ω_o corresponde a la frecuencia central de la banda de paso, B_W es el ancho de banda y K_{BC} es la ganancia presente a la frecuencia central.

Aplicando la forma canónica de representación de un filtro pasa-banda a la expresión (4.39) se tiene:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{j\omega(R_1 + R_2)/L}{1/LC - \omega^2 + j\omega(R_1 + R_2)/L} \quad (4.41)$$

Por lo tanto, el ancho de banda de la red analizada corresponde a

$$B_W = \frac{R_1 + R_2}{L} \quad (4.42)$$

En tanto que la frecuencia central ω_o es idéntica a la expresión presentada en (4.27) y la ganancia a la frecuencia central K_{BC} es equivalente al resultado expuesto para K_{OB} en (4.31).

Con las relaciones expuestas previamente, es posible diseñar el filtro pasivo pasa-banda con una ganancia de -20 [dB] a la frecuencia central cumpliendo la relación (4.33). Para dicho fin se elige $R_2 = 500$ [Ω], lo cual implica que $R_1 = 4,5$ [K Ω].

Tomando en consideración las resistencias escogidas, se procede a dimensionar L de tal manera de cumplir con un ancho de banda de 10 [KHz]. Para ello se hace uso de la ecuación (4.42), lo cual lleva a:

$$L = \frac{R_1 + R_2}{B_W} = \frac{5 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 10^4} \approx 79,58 \text{ [mH]} \quad (4.43)$$

Finalmente, el valor de C que hace posible que la frecuencia central se encuentre en 50 [KHz] está dado por la expresión (4.27), de la cual se obtiene:

$$C = \frac{1}{\omega_o^2 L} = \frac{1}{(10^5 \pi)^2 \cdot 79,58 \cdot 10^{-3}} \approx 0,127 \text{ [nF]} \quad (4.44)$$

Las figuras presentadas en 4.8 y 4.9 ilustran los diagramas de Bode de magnitud y fase del filtro pasivo pasa-banda diseñado, en las cuales se aprecia que los requerimientos del filtro son cumplidos con bastante precisión con los valores de las componentes obtenidas en la resolución del problema.

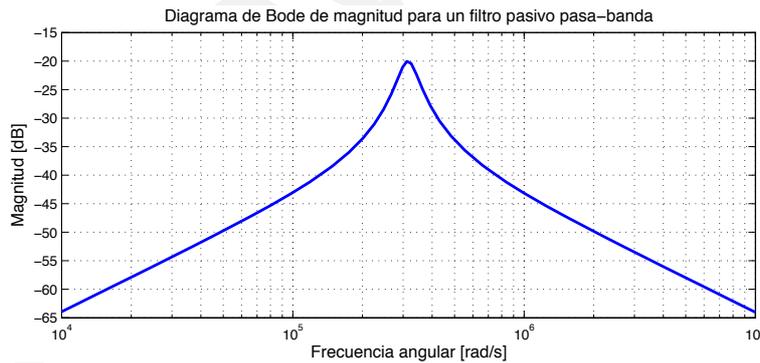


Figura 4.8: Diagrama de Bode de magnitud del filtro pasivo pasa-banda diseñado.

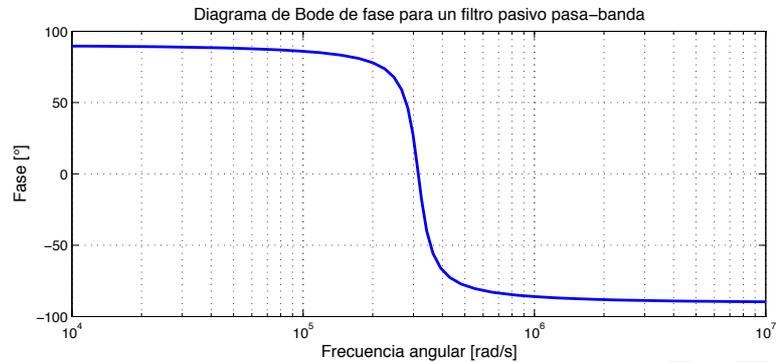


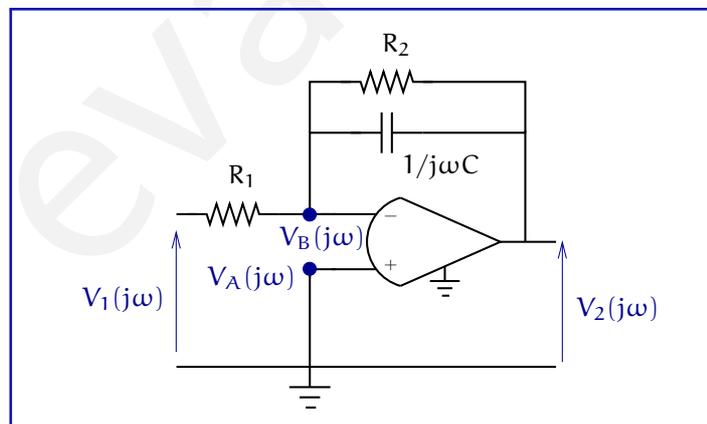
Figura 4.9: Diagrama de Bode de fase del filtro pasivo pasa-banda diseñado.

4.3. Diseño de filtros activos.

4.3.1. Diseño de filtros activos de primer orden

Problema 4.3.

Considere la red presentada en la figura, cuya función de transferencia ha sido determinada en la sección 3.3.1 para el caso en que $R_1 = R_2$.



4.3.1 Deduzca la nueva transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$.

4.3.2 Diseñe el filtro para una frecuencia de corte de 30 [KHz], con una ganancia a frecuencia 0 de 12 [dB].

Solución

El análisis cualitativo de la red permite concluir que la respuesta en frecuencia corresponde a un filtro pasa-bajos: cuando $\omega \rightarrow 0$, el condensador se comporta como circuito abierto, por lo que la red es un simple amplificador inversor con ganancia

$$K_0 = -\frac{R_2}{R_1} \quad (4.45)$$

Por el otro lado, cuando $\omega \rightarrow \infty$, el condensador se comporta como cortocircuito y, en consecuencia, la tensión presente en $V_2(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ tiende a 0.

El cálculo de la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ puede determinarse a partir del cálculo típico para un amplificador inversor:

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{Z_F(j\omega)}{Z_I(j\omega)} \quad (4.46)$$

En donde $Z_I(j\omega) = R_1$ y $Z_F(j\omega) = R_2 // (j\omega C)^{-1}$. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.46) se obtiene

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1(1 + j\omega R_2 C)} \quad (4.47)$$

El resultado expuesto en (4.47) concuerda con lo analizado cualitativamente para la respuesta en frecuencia de la red. Es importante que siempre se haga una comparación entre lo obtenido analíticamente y lo concluido en forma cualitativa para el comportamiento de la red en el dominio de la frecuencia. Una diferencia entre estos resultados permite concluir que existe un error en alguna de las descripciones efectuadas.

En base a la transferencia (4.47) es posible acotar lo siguiente:

- La ganancia para esta red puede ser tanto una **atenuación** como una **amplificación**. Para ello basta elegir $R_2 < R_1$ para obtener una atenuación; o $R_2 > R_1$ para una amplificación. Esta última característica sólo está presente en filtros activos, pues permiten entregar mayor energía a la salida de la que les es suministrada en la señal de entrada.
- Al reordenar la expresión (4.47) de forma que su estructura obedezca a un filtro pasa-bajos canónico (tal como se indicó en la ecuación (4.5)), se obtiene

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega R_2 C} \quad (4.48)$$

- El resultado obtenido en (4.48) indica que la frecuencia de corte está dada por

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C} \quad (4.49)$$

La ecuación (4.49) permite concluir que la frecuencia de corte para esta red es independiente de R_1 ; en términos estrictos, R_1 sólo modifica la ganancia K_0 del filtro.

Los resultados obtenidos no dependen del valor de la corriente de salida del AO. Ésta es una ventaja fundamental de los filtros activos.

Una vez obtenida la característica del filtro, es posible determinar los valores de las componentes a utilizar. El primer requisito de diseño establece que la ganancia del filtro debe ser de 12 [dB]. Esta ganancia implica que la relación R_2/R_1 debe ser igual a:

$$\frac{R_2}{R_1} = 10^{12/20} \approx 4 \quad (4.50)$$

En base a la relación (4.50) es posible dimensionar las componentes resistivas de la red. Eligiendo $R_1 = 10$ [K Ω] se tiene que el valor de R_2 debe ser 40 [K Ω].

Ahora bien, la elección del condensador C debe realizarse teniendo en consideración la frecuencia de corte requerida, la cual es de 30 [KHz]. Utilizando este valor en la ecuación (4.49) y despejando C , resulta

$$C = \frac{1}{2\pi f_c R_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^4} \approx 132,6 \text{ [pF]} \quad (4.51)$$

Utilizando los resultados obtenidos para R_1 , R_2 y C , se tiene que la transferencia (4.47) resulta en

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{4}{1 + j5,3 \cdot 10^{-6}\omega} \quad (4.52)$$

Existen aplicaciones en las cuales el comportamiento de la fase tiene una mayor incidencia en el diseño que la magnitud, pues un retardo temporal distinto a distintas frecuencias puede originar una distorsión en la señal.

En base a las componentes seleccionadas, es posible esbozar el diagrama de Bode de la red, la cual es posible apreciar en las figuras 4.10 y 4.11. En ellos es posible apreciar que el diseño efectuado concuerda con los requisitos especificados en el problema. Se debe hacer notar que los diseños efectuados hasta el momento hacen hincapié en la magnitud de la respuesta en frecuencia y no en su fase.

Errores

El análisis efectuado en esta sección es bastante simple; sin embargo, al igual que en problemas anteriores, el tratamiento algebraico y la operatoria con números complejos representa un desafío para los estudiantes que poseen una base débil en estos tópicos. A continuación, se mencionan los errores más frecuentes a la hora de desarrollar un problema de estas características.

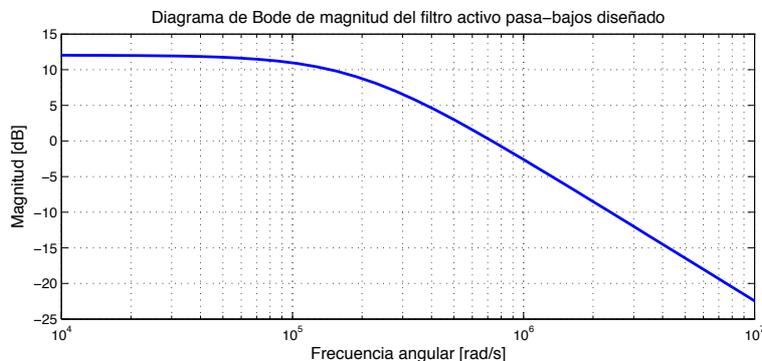


Figura 4.10: Diagrama de Bode de magnitud del filtro activo pasa-bajos diseñado.

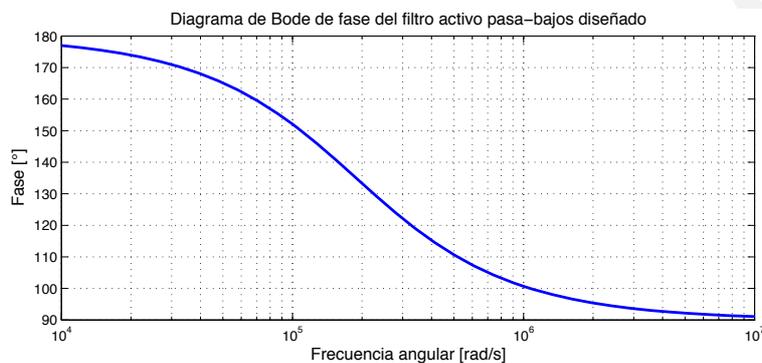


Figura 4.11: Diagrama de Bode de fase del filtro activo pasa-bajos diseñado.

Error 1 Dedución incorrecta del comportamiento cualitativo de la respuesta en frecuencia de la red. Esto puede llevar a conclusiones erradas sobre la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$.

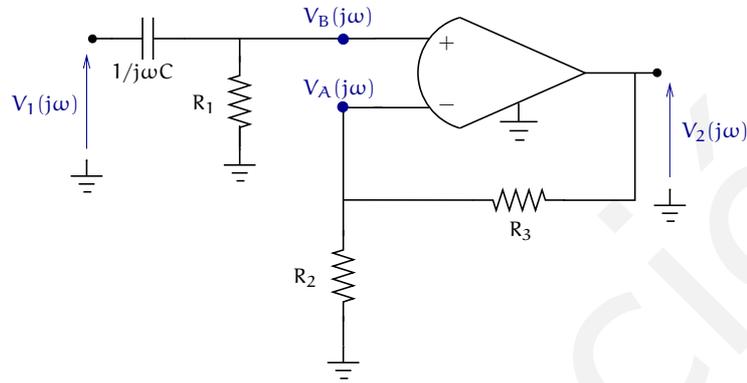
Error 2 Aplicación incorrecta de las características de un AO ideal. Se debe tener en consideración que un AO ideal presenta una tensión diferencial nula cuando es retroalimentado negativamente.

Error 3 Errores algebraicos en la manipulación de números complejos.

Error 4 Escalamiento de las componentes dinámicas de la red. Un aumento en un factor de 10 en las componentes lleva a que las frecuencias de operación disminuyan en un factor de 10.

Una variante de interés

Una variante al problema presentado es considerar que la red está descrita como se presenta en la siguiente figura.



La obtención de la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ fue efectuada en la sección 3.3.2 para el caso en que $R_1 = R_2 = R_3$. Esta red es más general que la descrita en esa ocasión, pues permite diseñar con holgura tanto la frecuencia de corte como la ganancia de la red.

Estos resultados usan el hecho que las corrientes a través de los terminales + y -, son cero

Efectuando un divisor de tensiones en la sub-malla de entrada, se tiene que el voltaje presente en el nodo B es

$$V_B(j\omega) = \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} V_1(j\omega) \quad (4.53)$$

Por otra parte, la tensión presente en el nodo A corresponde a

$$V_A(j\omega) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} V_2(j\omega) \quad (4.54)$$

Igualando las tensiones presentes en los nodos A y B debido a que la tensión diferencial es nula en un AO, se tiene

$$\frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} V_1(j\omega) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} V_2(j\omega) \quad (4.55)$$

La expresión (4.56) está escrita en la forma canónica para un filtro pasa-altos dado en (4.17).

Finalmente, la ecuación (4.55) permite obtener la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$, la cual está dada por

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} \quad (4.56)$$

La ecuación (4.56) concuerda con el análisis cualitativo que puede efectuarse a la red: cuando $\omega \rightarrow 0$, el condensador se comporta como circuito abierto, por lo que la tensión presente en $V_2(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$ será igual a 0. Por el otro lado, cuando

$\omega \rightarrow \infty$, el condensador se comporta como cortocircuito; en consecuencia, la red se comporta como un amplificador no-inversor de ganancia:

$$K_{\infty} = 1 + \frac{R_3}{R_2} \quad (4.57)$$

Tanto el análisis cualitativo efectuado como la transferencia presentada en (4.56) demuestran que la red se comporta como un filtro pasa-altos.

Aplicando los criterios de diseño utilizados en el problema principal para elegir las componentes correspondientes a esta red, se tiene que para cumplir con una ganancia de 12 [dB] para $\omega \rightarrow \infty$, la ecuación (4.57) debe estar dada por

$$1 + \frac{R_3}{R_2} = 4 \quad (4.58)$$

Por lo tanto, la relación R_3/R_2 que satisface dicha condición corresponde a

$$\frac{R_3}{R_2} = 3 \quad (4.59)$$

En base a (4.59) se elige arbitrariamente $R_2 = 10 \text{ [K}\Omega\text{]}$, lo cual lleva a que R_3 debe tener un valor de $30 \text{ [K}\Omega\text{]}$, cumpliéndose así el criterio de ganancia solicitado.

Por otra parte, al analizar la transferencia (4.56), se tiene que la frecuencia de corte de la red estará dada por

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C} \quad (4.60)$$

Note que la ecuación (4.60) posee 2 grados de libertad, pues ninguna de las componentes está sujeta a una segunda restricción. De esta manera se pueden escoger arbitrariamente los valores de R_1 y C que cumplan con el requerimiento de diseño, el cual corresponde a una frecuencia de corte ubicada en 30 [KHz] .

Se elige $R_1 = 20 \text{ [K}\Omega\text{]}$, con lo cual el valor de C corresponde a

$$C = \frac{1}{\omega_c R_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^8} \approx 265,3 \text{ [pF]} \quad (4.61)$$

Con los valores elegidos para las componentes según las ecuaciones (4.59) y (4.60), la transferencia (4.56) es equivalente a

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = 4 \cdot \frac{j5,3 \cdot 10^{-6} \omega}{1 + j5,3 \cdot 10^{-6} \omega} \quad (4.62)$$

Los valores elegidos para las componentes descritas en la red permiten obtener los diagramas de Bode presentados en las figuras 4.12 y 4.13, los cuales concuerdan con los requerimientos de diseño solicitados para el filtro.

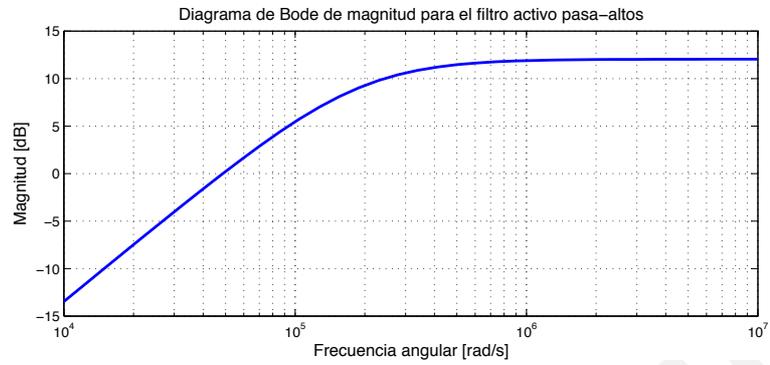


Figura 4.12: Diagrama de Bode de magnitud del filtro activo pasa-altos diseñado.

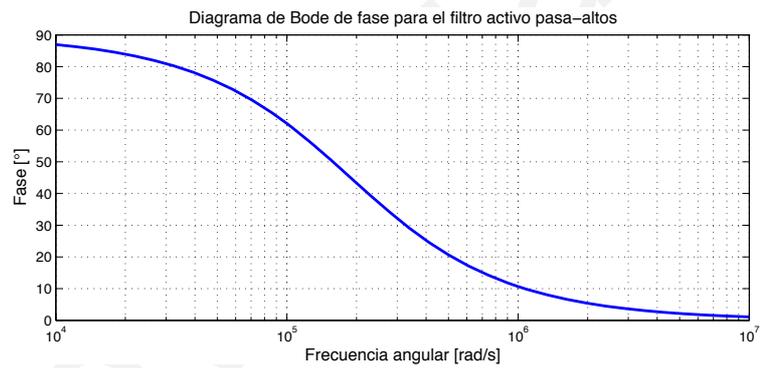
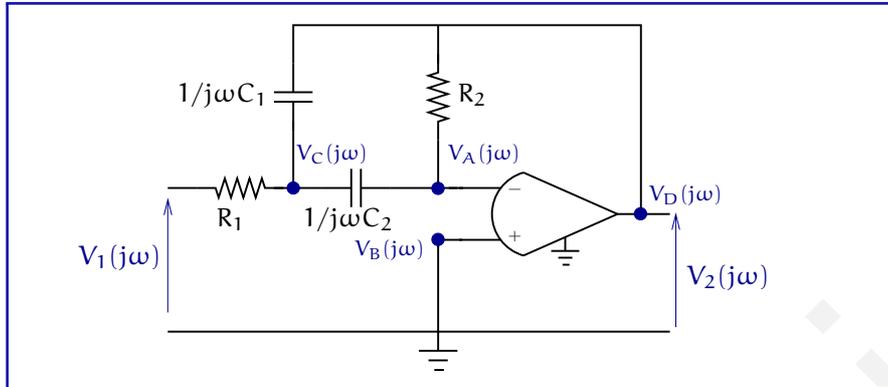


Figura 4.13: Diagrama de Bode de fase del filtro activo pasa-altos diseñado.

4.3.2. Diseño de filtros activos de segundo orden

Problema 4.4.

Dada la red de la figura, se procederá a efectuar la selección de las componentes de la red con el propósito de cumplir con las especificaciones de diseño.



4.4.1 Analice cualitativamente la respuesta en frecuencia de la red y determine la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$.

4.4.2 Determine si es posible, valores de C_1 , C_2 , R_1 y R_2 de forma tal que la respuesta en frecuencia del filtro presente una frecuencia central a 70 [KHz], con un ancho de banda de 30 [KHz]. Estime la ganancia de la red para el diseño solicitado.

Solución

Nuevamente, conviene efectuar un primer acercamiento a la respuesta en frecuencia del filtro debe ser efectuado en forma cualitativa, analizando los extremos del rango de frecuencias. Cuando $\omega \rightarrow 0$, los condensadores se comportan como circuito abierto; en consecuencia, no existe tensión aplicada a la entrada del circuito, por lo que la tensión presente en $V_2(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$ tiende a 0.

Por otra parte, en el extremo opuesto del rango de frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$), los condensadores se comportan como cortocircuito; por ende, la tensión presente en $V_2(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ tiende a igualarse a la tensión presente en el nodo B, que es igual a 0. Por consiguiente, la respuesta en frecuencia de la red obedece a un filtro activo pasa-banda.

Para obtener la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ se procede a aplicar el método de nodos sobre los puntos A y C, para posteriormente despejar las variables intermedias $V_A(j\omega)$ y $V_C(j\omega)$ en función de $V_1(j\omega)$ y $V_2(j\omega)$; de esta forma es posible deducir la relación entre estas últimas variables.

Al desarrollar el método nodal, resulta

$$(V_C(j\omega) - V_1(j\omega))\frac{1}{R_1} + (V_C(j\omega) - V_2(j\omega))j\omega C_1 + (V_C(j\omega) - V_A(j\omega))j\omega C_2 = 0 \quad (4.63)$$

$$(V_A(j\omega) - V_C(j\omega))j\omega C_2 + (V_A(j\omega) - V_2(j\omega))\frac{1}{R_2} = 0 \quad (4.64)$$

Además, tomando en consideración que $V_A(j\omega) = 0$, se tiene que las ecuaciones (4.63) y (4.64) llevan a

$$(V_C(j\omega) - V_1(j\omega))\frac{1}{R_1} + (V_C(j\omega) - V_2(j\omega))j\omega C_1 + V_C(j\omega)j\omega C_2 = 0 \quad (4.65)$$

$$V_C(j\omega) = -\frac{V_2(j\omega)}{j\omega C_2 R_2} \quad (4.66)$$

El signo menos puede ser eliminado si agregamos a la entrada o a la salida un amplificador con AO de transferencia -1 .

Finalmente, al reemplazar la ecuación (4.66) en (4.65), es posible obtener la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$, la cual queda expuesta en la expresión (4.67):

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{j\omega R_2 C_2}{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + j\omega R_1 (C_1 + C_2)} \quad (4.67)$$

Antes de proseguir con el desarrollo de este problema, resulta importante destacar algunas ideas relevantes:

- En un filtro pasa-banda como el presentado en la transferencia (4.67), la frecuencia central (ω_o) corresponde a aquella en la cual la respuesta en frecuencia del filtro presenta la máxima magnitud.
- El ancho de banda (B_W) constituye el rango de frecuencias para el cual la magnitud del filtro no difiere más allá de 3 [dB] con respecto a la magnitud presentada a la frecuencia central ω_o . Si f_1 y f_2 denotan las frecuencias inferior y superior del rango de frecuencias definido, entonces el ancho de banda estará dado por:

$$B_W = 2\pi(f_2 - f_1) \quad (4.68)$$

Además, dichas frecuencias se relacionan con la frecuencia central según

$$\omega_o^2 = (2\pi)^2 f_1 f_2 \quad (4.69)$$

- Finalmente, resulta conveniente introducir un parámetro denominado como **factor de selectividad** (Q), que está definido según

$$Q = \frac{\omega_o}{B_W} \quad (4.70)$$

La expresión (4.70) permite comparar diferentes tipos de filtros pasa-banda con respecto a su capacidad de seleccionar un rango de frecuencias con respecto a otras. En ciertas aplicaciones se requiere que la selectividad del filtro sea alta, esto implica que el ancho de banda utilizado es reducido en comparación al valor de la frecuencia central.

- El resultado (4.67) es independiente del valor de la corriente que entrega el filtro “al resto del mundo”, es decir, es independiente de la carga del filtro. Esta es una propiedad clave de los filtros activos.

El resultado expuesto en la transferencia (4.67) puede ser llevado a la forma canónica de un filtro pasa-banda, tal como se expuso en la ecuación (4.40), resultando entonces en:

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{R_2 C_2}{R_1(C_1 + C_2)} \frac{j\omega/R_2(1/C_1 + 1/C_2)}{1/(R_1 R_2 C_1 C_2) - \omega^2 + j\omega/R_2(1/C_1 + 1/C_2)} \quad (4.71)$$

A partir de la transferencia (4.71) es posible determinar los parámetros característicos del filtro en función de las componentes que lo constituyen. De esta manera se tiene:

- Frecuencia central:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.72)$$

- Ancho de Banda:

$$B_W = \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (4.73)$$

- Ganancia del filtro:

$$K_{OB} = -\frac{R_2 C_2}{R_1(C_1 + C_2)} \quad (4.74)$$

Las expresiones (4.72) a (4.74) constituyen un sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas; por lo tanto, se tienen dos grados de libertad, pues fijando los valores de dos de las componentes el filtro queda determinado inmediatamente.

Los dos grados de libertad estarán dados por la elección de los condensadores C_1 y C_2 , lo cual permite expresar los valores de R_1 , R_2 y K_{OB} según

$$R_1 = \frac{B_W}{\omega_o^2(C_1 + C_2)} = \frac{1}{\omega_o Q(C_1 + C_2)} \quad (4.75)$$

$$R_2 = \frac{1}{B_W} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{\omega_o} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (4.76)$$

$$K_{OB} = -\frac{\omega_o^2}{B_W^2} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) = -Q^2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \quad (4.77)$$

De esta manera se eligen arbitrariamente 2 valores de condensadores que, sumado a los requerimientos de diseño, permiten determinar los valores para R_1 , R_2 y K_{OB} . Sean $C_1 = 50$ [pF] y $C_2 = 100$ [pF], lo cual da lugar a *Recuerde que* $K_{OB|dB} = 20 \log |K_{OB}|$.

$$R_1 = \frac{6\pi \cdot 10^4}{(14\pi \cdot 10^4)^2 (150 \cdot 10^{-12})} \approx 6,5 \text{ [K}\Omega] \quad (4.78)$$

$$R_2 = \frac{1}{6\pi \cdot 10^4} \left(\frac{1}{50 \cdot 10^{-12}} + \frac{1}{100 \cdot 10^{-12}} \right) \approx 141,5 \text{ [K}\Omega] \quad (4.79)$$

$$K_{OB} = -\left(\frac{7}{3}\right)^2 \left(1 + \frac{100}{50} \right) \approx -16,33 \triangleq 24,26 \text{ [dB]} \quad (4.80)$$

Al utilizar los valores determinados para el filtro pasa-banda, la transferencia dada en (4.67) resulta ser

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{j1,42 \cdot 10^{-5} \omega}{1 - 4,59 \cdot 10^{-12} \omega^2 + j9,75 \cdot 10^{-7} \omega} \quad (4.81)$$

Al esbozar el diagrama de Bode de la transferencia (4.81) se aprecia que el resultado obtenido para el filtro cumple correctamente los requerimientos de diseño indicados en el problema. Las figuras 4.14 y 4.15 presentan los diagramas de Bode de magnitud y fase de la transferencia (4.81).

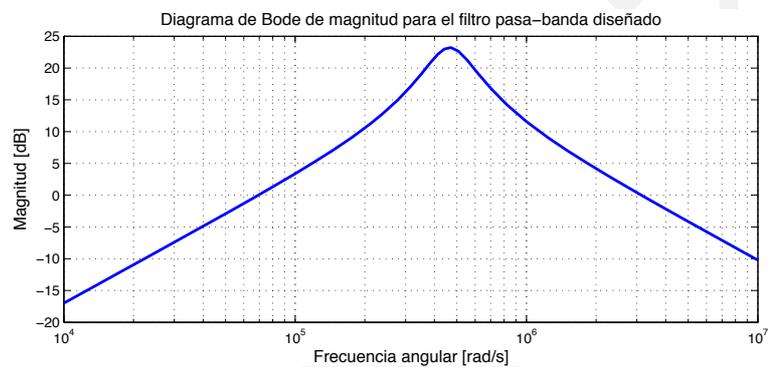


Figura 4.14: Diagrama de Bode de magnitud del filtro activo pasa-banda diseñado.

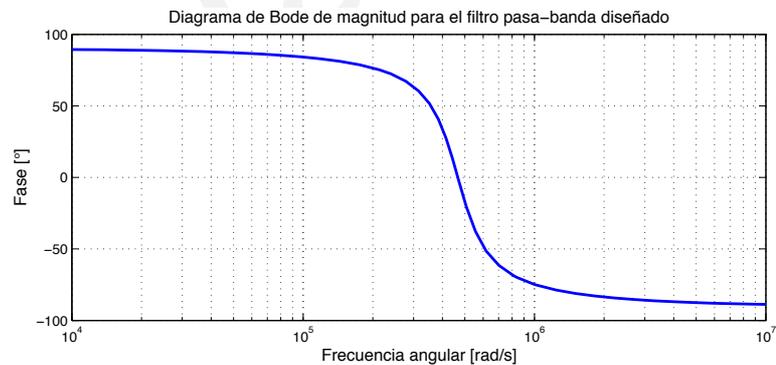


Figura 4.15: Diagrama de Bode de fase del filtro activo pasa-banda diseñado.

Errores

El desarrollo aquí propuesto puede ser fuente de variados errores, tanto conceptuales como algebraicos. A continuación se enumeran los errores más

comunes.

Error 1 Errores algebraicos en la deducción de la transferencia $V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$. Se recomienda que la resolución analítica para redes de este tipo se efectúe mediante el método de nodos, pues permite mantener el orden durante el desarrollo del problema.

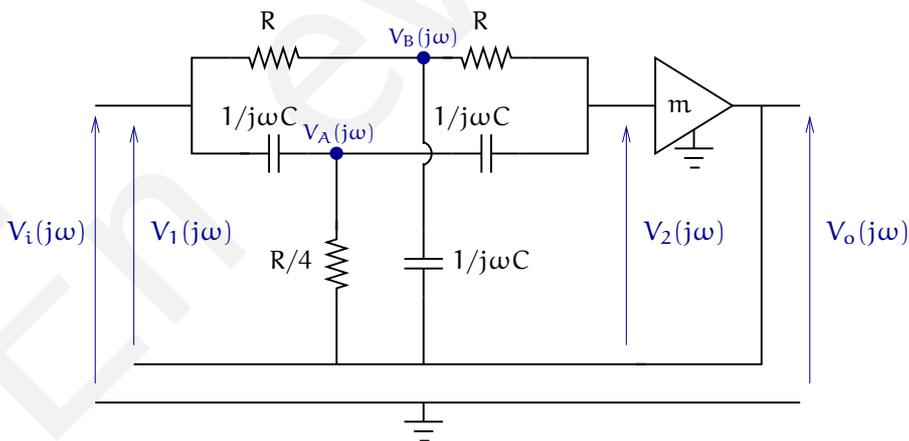
Error 2 Trabajar directamente con la transferencia (4.67). El trabajo de diseño con esta expresión resulta frecuentemente más complejo que el procedimiento de diseño ilustrado con la transferencia (4.71).

Error 3 El orden de la transferencia resultante es mayor que el número de componentes dinámicas de la red. Siempre se cumplirá que **el orden del filtro será a lo sumo igual al número de componentes dinámicas menos el número de degeneraciones presentes (condensadores en paralelo, inductores en serie)**.

Error 4 El orden del filtro pasa-banda calculado es impar. Lo anterior constituye un error conceptual, pues **el orden de un filtro pasa-banda siempre será par**.

Una variante de interés

Consideremos ahora el caso complementario del filtro diseñado en el problema principal, el cual es presentado en la red ilustrada a continuación. El amplificador presente en la etapa de salida posee una alta impedancia de entrada. El procedimiento de diseño requerirá que la frecuencia central esté ubicada en 70 [KHz], con un factor de selectividad de 5.



La red presentada permite obtener un filtro elimina-banda con una alta selectividad, tal como quedará expuesto en el desarrollo de la transferencia

$V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$. La ganancia m puede ser implementada mediante un AO cuya transferencia sea m .

El procedimiento para la determinación de la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ se efectuará a través de dos pasos: el primero será determinar la transferencia $V_2(j\omega)/V_i(j\omega)$; finalmente, el segundo paso determinará la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ en base a la deducida en el primer paso.

Al aplicar el método de nodos a los puntos A y B tomando como referencia el nodo C, resulta en

$$(4G + 2j\omega C)V_A(j\omega) - j\omega C V_1(j\omega) - j\omega C V_2(j\omega) = 0 \quad (4.82)$$

$$(2G + j\omega C)V_B(j\omega) - G V_1(j\omega) - G V_2(j\omega) = 0 \quad (4.83)$$

La última ecuación que permite resolver el sistema está basada en el teorema de Millman, la cual permite relacionar las tensiones presentes en $V_A(j\omega)$ y $V_B(j\omega)$ con $V_2(j\omega)$ según

$$V_2(j\omega) = \frac{V_A(j\omega) j\omega C + V_B(j\omega) G}{G + j\omega C} \quad (4.84)$$

Despejando $V_A(j\omega)$ y $V_B(j\omega)$ en las ecuaciones (4.82) y (4.83) y reemplazándolas en la expresión (4.84) resulta

$$\boxed{\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{2/(RC)^2 - \omega^2}{2/(RC)^2 - \omega^2 + j\omega 6/RC}} \quad (4.85)$$

La expresión (4.85) constituye la representación canónica de un filtro eliminabanda. En efecto, al comparar la transferencia obtenida con la ecuación (4.28) se deducen los siguientes parámetros:

- Frecuencia central:

$$\omega_o = \frac{\sqrt{2}}{RC} \quad (4.86)$$

- Ancho de banda:

$$B_w = \frac{6}{RC} \quad (4.87)$$

- Factor de selectividad:

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (4.88)$$

La sub-red pasiva que conforma el filtro analizado posee un factor de selectividad muy pobre, tal como queda descrito en la ecuación (4.88). Por lo mismo, este filtro se complementa con un elemento activo, tal como el amplificador de ganancia m conectado a la salida.

El segundo paso para la obtención de la transferencia $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ consiste en la aplicación de LVK y las propiedades del amplificador descrito para conformar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_i(j\omega) = V_1(j\omega) + V_o(j\omega) \quad (4.89)$$

$$V_2(j\omega) + V_o(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{m} \quad (4.90)$$

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{2/(RC)^2 - \omega^2}{2/(RC)^2 - \omega^2 + j\omega 6/RC} \quad (4.91)$$

Despejando $V_2(j\omega)$ en la ecuación (4.90) y reemplazando dicha expresión en (4.89) mediante el uso de (4.91) se obtiene:

$$\boxed{\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = m \cdot \frac{2/(RC)^2 - \omega^2}{2/(RC)^2 - \omega^2 + j\omega (1-m)6/RC}} \quad (4.92)$$

Para la transferencia (4.92), la frecuencia central ω_o sigue siendo la presentada en la expresión (4.86); no obstante, su ancho de banda y factor de selectividad son modificados a:

$$B_w = \frac{6(1-m)}{RC} \quad (4.93)$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{6(1-m)} \quad (4.94)$$

En consecuencia, para obtener un factor de selectividad elevado, la ganancia m debe ser muy cercana a la unidad. Sin embargo, no es posible aumentar la ganancia más allá de 1, pues originaría que los polos de la transferencia (4.92) se ubiquen en el semi-plano derecho de s . Este tema es tratado con profundidad en el capítulo [referencia](#) del texto.

Para obtener una frecuencia central a 70 [KHz], se elige $R = 10$ [K Ω], lo cual da lugar a

$$C = \frac{\sqrt{2}}{\omega_o R} \approx 321,5 \text{ [pF]} \quad (4.95)$$

Por otro lado, para obtener un factor de selectividad de 5, el valor de m debe ser:

$$m = 1 - \frac{\sqrt{2}}{6Q} \approx 0,953 \quad (4.96)$$

Empleando los valores antes mencionados, la transferencia (4.92) da lugar a los diagramas de Bode presentados en las figuras 4.16 y 4.17, las cuales permiten concluir que el procedimiento de diseño ha sido el correcto.

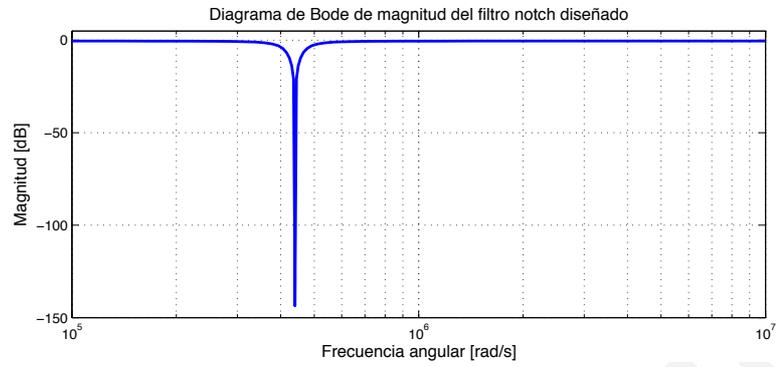


Figura 4.16: Diagrama de Bode de magnitud para el filtro notch diseñado.

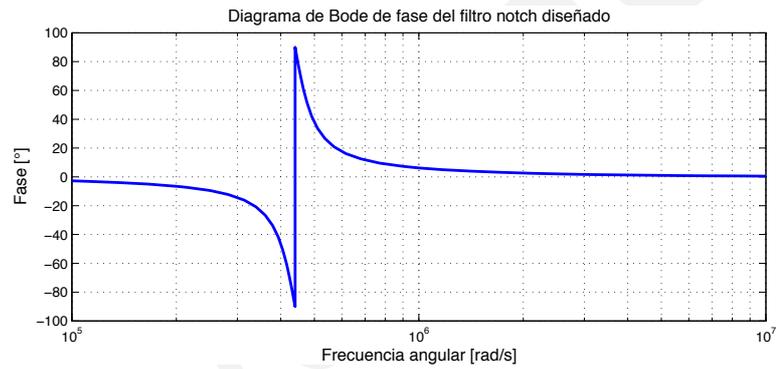
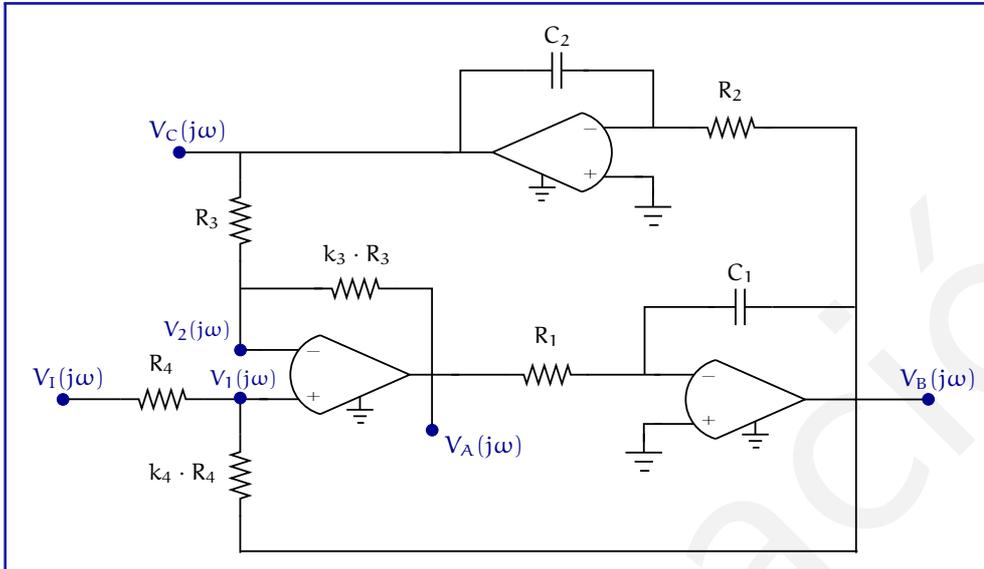


Figura 4.17: Diagrama de Bode de fase para el filtro notch diseñado.

4.3.3. El Filtro Activo Universal (FAU)

Problema 4.5.

La red presentada a continuación permite implementar filtros de segundo orden de manera práctica y sencilla, a través de un enfoque modular.



4.5.1 Determine las transferencias $V_A(s)/V_I(s)$, $V_B(s)/V_I(s)$ y $V_C(s)/V_I(s)$.

4.5.2 ¿Qué característica especial posee esta configuración?

Solución

Para el desarrollo de las transferencias solicitadas, se utilizará el análisis de redes mediante la transformada de Laplace, por lo que se sugiere al estudiante que revise los contenidos relativos a este tema en el capítulo *ref* del texto.

Considerando que las componentes dinámicas tienen condición inicial igual a cero, como corresponde a la definición de funciones de transferencia, las transferencias solicitadas se pueden calcular tomando en consideración el teorema de Millman y los fundamentos del amplificador operacional. A partir de lo anterior, es posible enunciar las siguientes relaciones:

$$\frac{V_I(s)k_4R_4 + V_B(s)R_4}{(1 + k_4)R_4} = \frac{V_A(s)R_3 + V_C(s)k_3R_3}{(1 + k_3)R_3} \quad (4.97)$$

$$V_B(s) = -\frac{V_A(s)}{sR_1C_1} \quad (4.98)$$

$$V_C(s) = -\frac{V_B(s)}{sR_2C_2} \quad (4.99)$$

La expresión (4.97) resulta de aplicar el teorema de Millman a los nodos 1 y 2 e igualar dichas expresiones, usando propiedades del AO. Las ecuaciones (4.98) y (4.99) son el resultado de la configuración de integración con inversión de los 2 AO restantes.

Para determinar las transferencias solicitadas, sólo es necesario efectuar el reemplazo correspondiente de las expresiones (4.98) y (4.99) en (4.97). Así, despejando para $V_A(s)$, se tendrá que la transferencia $V_A(s)/V_I(s)$ resulta

$$\frac{V_A(s)}{V_I(s)} = \frac{K_H s^2}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2} \quad (4.100)$$

En donde:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_3}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.101)$$

$$Q = \frac{1 + k_4}{1 + k_3} \sqrt{k_3 \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} \quad (4.102)$$

$$K_H = \frac{k_4(1 + k_3)}{1 + k_4} \quad (4.103)$$

Ahora bien, si se trabaja la ecuación (4.97) en función de $V_B(s)$, se tendrá la transferencia $V_B(s)/V_I(s)$, la cual corresponde a

$$\frac{V_B(s)}{V_I(s)} = \frac{K_B(\omega_o/Q)s}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2} \quad (4.104)$$

En donde la constante K_B corresponde a

$$K_B = -k_4 \quad (4.105)$$

Finalmente, expandiendo la expresión (4.97) en función de $V_C(s)$, es posible obtener la transferencia $V_C(s)/V_I(s)$, la cual resulta en

$$\frac{V_C(s)}{V_I(s)} = \frac{K_L \omega_o^2}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2} \quad (4.106)$$

En la expresión (4.106), la constante K_L corresponde a

$$K_L = \frac{k_4(1 + k_3)}{k_3(1 + k_4)} \quad (4.107)$$

Como se ha podido apreciar en las transferencias (4.100), (4.104) y (4.106), la red descrita permite obtener diferentes filtros, dependiendo del nodo con el cual se trabaje como salida. Así, el nodo A permite obtener una respuesta en frecuencia típica de un filtro pasa-altos de segundo orden; el nodo B posee una respuesta en frecuencia característica de un filtro pasa-banda; finalmente, el nodo C permite obtener un filtro pasa-bajos de segundo orden.

El motivo por el cual se ilustra esta red es porque su uso es amplio y permite implementar filtros de variada naturaleza, a partir de la función de transferencia deseada. Entre ellas se incluyen los filtros por aproximaciones Butterworth y Chebyshev, los que serán tratados con detalle en las siguientes secciones.

Errores

El problema aquí propuesto se ha desarrollado con el propósito de ilustrar una configuración de AO's que permite obtener diferentes tipos de filtros de segundo orden. No obstante, durante el desarrollo del problema es posible cometer algunos errores conceptuales, tales como los que se presentan a continuación.

Error 1 Errores en la aplicación de la transformada de Laplace a la red analizada. Debe recordarse que los inductores de valor L son transformados a impedancias de valor sL y los condensadores de valor C son llevados a impedancias de valor $1/sC$.

Error 2 Aplicar incorrectamente las propiedades del AO a la resolución de la red. Es importante recalcar que, cuando el AO es retroalimentado negativamente, la tensión diferencial entre los terminales de entrada es nula.

Error 3 Resolución errada de las leyes de interconexión (LVK y LCK).

Error 4 Evaluación errada de la respuesta en frecuencia de las transferencias (4.100), (4.104) y (4.106). Debe recordarse que el **grado relativo** de un filtro pasa-altos siempre será 0, en tanto que el grado relativo de un filtro pasa-bajos será siempre mayor que 0.

4.4. Filtros Butterworth.

4.4.1. Determinación de transferencias de orden n

Problema 4.6.

El propósito de esta sección será ilustrar el método analítico que permite obtener la estructura de un filtro pasa-bajos Butterworth de orden n , con $n \in \mathbb{N}$.

4.6.1 Expresar la relación que permite determinar los polos de la transferencia del filtro Butterworth $H(s)$.

4.6.2 Determine la expresión $H(s)$ para un filtro Butterworth de tercer orden.

4.6.3 ¿Cuál es la magnitud que presenta el filtro de tercer orden para $\omega = 50$ [rad/s]?

Solución

La teoría de filtros desarrollada por Butterworth determina la transferencia de un filtro pasa-bajos $H(s)$ con el propósito de obtener máxima planicie de ganancia en la banda de paso y una alta atenuación en la banda de rechazo, con una frecuencia de corte unitaria ($\omega_c = 1$).

De esta forma, Butterworth propuso la siguiente función:

$$M_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \quad (4.108)$$

En donde $n \in \mathbb{N}$ corresponde al orden del filtro. Con el propósito de trasladar el análisis al plano de Laplace, se reemplazará $j\omega$ por s . Este reemplazo es posible debido a que se está trabajando con sistemas lineales.

Al efectuar dicho reemplazo y considerando $F_n(j\omega) = M_n(\omega)^2$, la expresión (4.108) resulta en

$$F_n(s) = H_n(s) H_n(-s) \begin{cases} \frac{1}{1 + (s^2)^n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{1}{1 - (s^2)^n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.109)$$

La determinación de las raíces del denominador de (4.109) (que constituyen los polos de la transferencia de $F_n(s)$) se obtienen mediante la resolución de la ecuación en el plano complejo de la expresión (4.110), si n es par, o de la ecuación (4.111), si n es impar.

$$1 + (s^2)^n = 0 \quad (4.110)$$

$$1 - (s^2)^n = 0 \quad (4.111)$$

Las expresiones anteriores pueden ser simplificadas si se recuerda que la representación compleja de 1 es $e^{j2k\pi}$ y que la de -1 es $e^{j(2k+1)\pi}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando estos conceptos, es posible obtener los polos que constituyen a la transferencia $F_n(s)$ según

$$s_k = \begin{cases} e^{j(2k+1)\pi/2n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ e^{jk\pi/n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.112)$$

Con $k = 0 \dots 2n-1$. Sin embargo, no todos los polos que constituyen la transferencia $F_n(s)$ son utilizados para conformar el filtro pasa-bajos Butterworth descrito. Esto debido a que **existen polos que se encuentran en el semi-plano derecho de s** , lo cual da lugar a **modos naturales crecientes** y, en consecuencia, si se considerasen dichos polos, **el filtro sería inestable**.

Por lo tanto, es posible descomponer $F_n(s)$ en el producto de dos factores: un factor estable (descrito por la transferencia $H(s)$) y una parte inestable (representada por $H(-s)$). Vale destacar que cada una de estas representaciones tiene

El filtro ideal posee con características ganancia constante en la banda de paso, máxima atenuación en la banda de rechazo y transición abrupta entre ambas bandas.

igual número de polos; esta igualdad es una consecuencia directa de la simetría con la cual se distribuyen los polos respecto al eje imaginario.

Se debe hacer notar que los polos se encuentran distribuidos sobre la circunferencia de radio unitario, lo cual está íntimamente ligado a la frecuencia de corte del filtro pasa-bajos. Así, por ejemplo, si la frecuencia de corte hubiese sido 100 [rad/s], entonces los polos estarían distribuidos sobre una circunferencia de radio 100.

La determinación analítica de la transferencia solicitada se puede computar a través del resultado presentado en la expresión (4.112), lo cual da origen a

$$s_k = e^{jk\pi/3} \quad (4.113)$$

Donde $k = 0 \dots 5$. Los polos que interesan para determinar la transferencia $H(s)$ están descritos por

$$s_1 = e^{j\pi} = -1 \quad (4.114)$$

$$s_2 = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.115)$$

$$s_3 = e^{j4\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.116)$$

Por lo tanto, la transferencia de un filtro pasa-bajos Butterworth de tercer orden con frecuencia de corte unitaria estará dada por

$$H(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)} \quad (4.117)$$

La figura 4.18 permite apreciar la distribución de los polos en la circunferencia unitaria y aquellos que son utilizados para conformar la transferencia de un filtro Butterworth de tercer orden.

La última pregunta puede ser respondida de dos formas: la primera contempla el uso de la expresión (4.108), reemplazando $n = 3$ y $\omega = 50$ [rad/s], dando lugar así a

$$|H(j50)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (50)^6}} = 8 \cdot 10^{-6} \quad (4.118)$$

El segundo camino contempla la evaluación de la expresión (4.117) reemplazando $s = j50$ y luego computando la magnitud de la transferencia resultante. Ambos métodos conducen al mismo resultado. Sin embargo, el segundo método resulta simple de calcular sólo para filtros Butterworth de bajo orden, aumentando su complejidad en la medida que aumenta el orden del filtro.

Errores

El ejercicio propuesto en esta sección es fuente de errores tanto de tipo conceptual como analítico, los cuales pueden ser prevenidos teniendo en consideración los fundamentos que existen detrás de los filtros Butterworth. A continuación se mencionan los errores más comunes.

No obstante, es posible trasladar los polos desde una circunferencia de radio 1 a una de radio 100 (y viceversa) mediante un escalamiento de la variable s .

Los filtros Butterworth de orden impar siempre tendrán un polo en -1 .

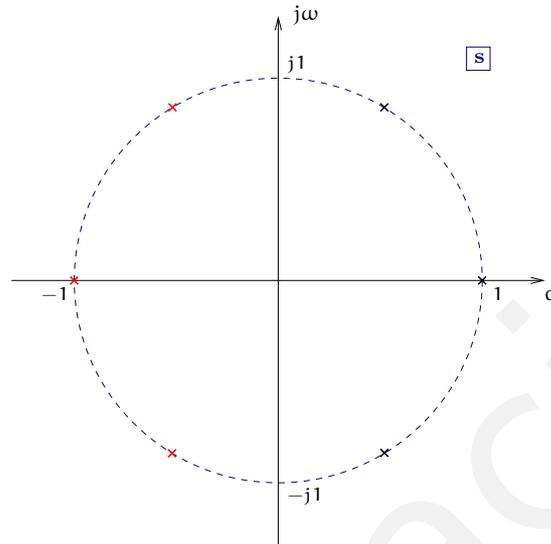


Figura 4.18: Distribución de los polos de un filtro Butterworth de tercer orden sobre el plano s .

Error 1 Considerar todos los polos de la expresión (4.112) para la implementación del filtro pasa-bajos Butterworth. Se debe recordar que sólo la mitad de los polos presentes en esta solución son utilizados para la implementación de $H(s)$, siendo siempre aquellos que se encuentran en el semi-plano izquierdo de s , ya que éstos son los únicos que dan origen a modos naturales decrecientes.

Error 2 Calcular $|H(j\omega)|$ mediante la expresión (4.117) para filtros de un elevado orden. Si bien este desarrollo es correcto, su determinación analítica resulta más compleja que evaluar directamente $|H(j\omega)|$ mediante la expresión (4.108).

Error 3 Intercambiar las soluciones presentadas en (4.112) para valores de n par e impar. Esta confusión puede solucionarse si se tiene en mente el concepto detrás de dicha expresión, la cual está descrita por la ecuación (4.108).

Error 4 Manipular simultáneamente transferencias descritas mediante transformada de Laplace y aquellas descritas en el dominio de la frecuencia. Este error se puede evitar manteniendo el orden y la rigurosidad en la notación durante el desarrollo de cualquier problema.

Una variante de interés

Frecuentemente ocurre que el diseño de filtros se efectúa en base a criterios de diseño determinados acorde a las necesidades de filtraje que se posea; en consecuencia, inicialmente se desconoce el orden del filtro que cumple con dichas especificaciones.

Suponga que, luego de un proceso de análisis, se ha determinado que el filtro pasa-bajos requerido no debe superar una magnitud de 0,5 a $\omega = 6$ [rad/s] y debe tener al menos una magnitud de 0,8 a $\omega = 0,7$ [rad/s].

El problema propuesto puede ser resuelto de 2 maneras. El primer método recurre a la resolución analítica de la expresión (4.108), en tanto que el segundo método propone la resolución del problema en forma gráfica.

La resolución del problema mediante el procedimiento analítico considera la resolución de la expresión (4.108) en función de los requerimientos de diseño entregados. Así, el requerimiento de una magnitud de 0,8 como mínimo a $\omega = 0,7$ [rad/s] se traduce en

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (0,7)^{2n}}} \geq 0,8 \quad (4.119)$$

Cuya resolución lleva a

$$\log\left(\frac{1}{(0,8)^2} - 1\right) \geq 2n \log(0,7) \quad (4.120)$$

Lo cual conduce a que el valor de n debe ser

$$n \geq 0,806 \quad (4.121)$$

Aproximando el resultado expuesto en la expresión (4.121) al entero superior, se tiene que el orden menor del filtro que cumple con la especificación es de 1.

Por otra parte, la condición de una magnitud no superior a 0,5 para $\omega = 6$ [rad/s] se traduce en

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (0,7)^{2n}}} \leq 0,8 \quad (4.122)$$

Al desarrollar la expresión (4.122) se tiene

$$\log\left(\frac{1}{(0,5)^2} - 1\right) \leq 2n \log(2) \quad (4.123)$$

Lo que conduce a

$$n \geq 0,792 \quad (4.124)$$

La expresión (4.124) constituye una cota inferior para el orden del filtro (al igual que el resultado presentado en (4.121)); no obstante, el resultado obtenido es una cota menos restrictiva que la encontrada a través del primer requisito.

El orden del filtro que satisface los requerimientos de diseño impuestos estará determinado por la intersección de las soluciones encontradas en (4.121) y (4.124). De esta manera, se obtiene que el orden mínimo que satisface con las condiciones de diseño es $n = 1$.

Se debe tener precaución en el desarrollo de la expresión (4.120), pues los logaritmos presentes son menores a 0.

El segundo método consiste en la resolución gráfica del problema; esta forma de resolución hace uso del diagrama de Bode de magnitud de los filtros Butterworth normalizados y las interseca con las restricciones dadas por diseño. En la figura 4.19 se ilustran los diagramas de Bode para los primeros 5 filtros Butterworth pasa-bajos normalizados.

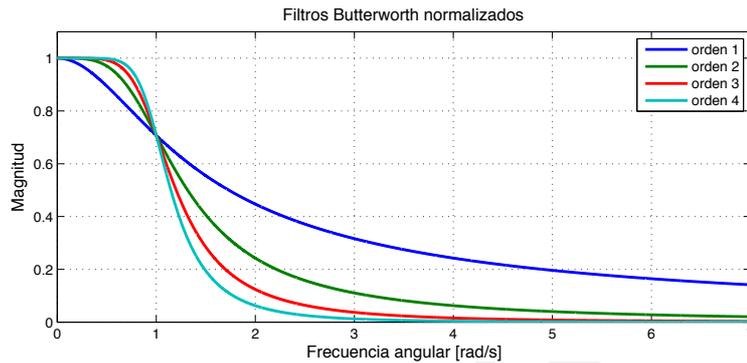


Figura 4.19: Diagrama de magnitud para los primeros 4 filtros Butterworth normalizados.

Al intersectar las restricciones con las curvas presentes en la figura 4.19 se obtiene que el conjunto solución para el orden mínimo del filtro es 1.

4.4.2. Diseño de filtros Butterworth pasa-bajos

Problema 4.7.

El problema propuesto en esta sección busca ilustrar el procedimiento a seguir para el diseño de un filtro Butterworth pasa-bajos.

Se desea implementar un filtro Butterworth pasa-bajos con frecuencia de corte en $\omega_c = 10^3$ [rad/s] que permita obtener una atenuación no inferior a 0,95 a $\omega_1 = 500$ [rad/s] y una magnitud inferior a 0,1 a $\omega_2 = 2 \cdot 10^3$ [rad/s].

4.7.1 Determine el orden mínimo del filtro que cumple con las especificaciones entregadas.

4.7.2 Implemente con AO el filtro Butterworth obtenido.

4.7.3 ¿Cuál es la magnitud que presenta el filtro pasa-bajos diseñado para $\omega = \omega_1$ y $\omega = \omega_2$?

Solución

El procedimiento de selección del filtro Butterworth que cumple con las especificaciones dadas en el enunciado requiere tres pasos bien distinguibles:

- 1.- Las especificaciones dadas para la frecuencia de corte de interés deben **escalars**e a la frecuencia de corte unitaria, según:

$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (4.125)$$

La expresión (4.125) corresponde al escalamiento en frecuencia de un filtro pasa-bajos

El procedimiento indicado en la ecuación (4.125) se denomina **normalización**.

- 2.- Una vez llevadas las especificaciones a la frecuencia normalizada, se debe proceder a elegir el orden mínimo del filtro que cumple con los requisitos. Esta selección puede efectuarse en forma gráfica o analítica, tal como se ha ilustrado en la sección 4.4.1.
- 3.- Elegida la transferencia $H_n(s)$ que cumple con las especificaciones, se procede a efectuar la **de-normalización** en s , mediante la expresión

$$s_n = \frac{s}{\omega_c} \quad (4.126)$$

Teniendo en consideración los puntos mencionados anteriormente, se normalizan los requerimientos solicitados en base a la frecuencia de corte. Así, el requerimiento de una magnitud no superior a 0,1 a la frecuencia de $2 \cdot 10^3$ [rad/s] se traduce en el mismo requerimiento a la frecuencia normalizada

$$\omega_{n_2} = \frac{2 \cdot 10^3}{10^3} = 2 \quad (4.127)$$

En tanto que el requerimiento de una magnitud no inferior a 0,95 a $\omega_1 = 500$ [rad/s] se convierte en el mismo requerimiento para la frecuencia normalizada de

$$\omega_{n_1} = \frac{500}{10^3} = 0,5 \quad (4.128)$$

Luego de este procedimiento de normalización, se procede a efectuar la selección del filtro de menor orden que cumple con los requisitos especificados por diseño. El método gráfico requiere trazar dos líneas horizontales en el diagrama de magnitud, correspondientes a las restricciones dadas por el diseño; luego se intersectan estas líneas horizontales con los puntos críticos de frecuencias (los cuales, para este caso, son ω_{n_1} y ω_{n_2}). Esta intersección permitirá discernir los filtros que cumplen con las restricciones impuestas a la respuesta en frecuencia. La figura 4.20 ilustra la forma de graficar las restricciones en el diagrama de magnitud de los filtros Butterworth.

Al intersectar las restricciones de diseño con los filtros Butterworth normalizados, se observa que el orden mínimo que cumple $|H(j\omega_{n_1})| \geq 0,95$ es 2; por otra parte $|H(j\omega_{n_2})| \leq 0,1$ se cumple para un orden mayor o igual a 4. La intersección de ambos resultados arroja que el orden mínimo que cumple con ambos requerimientos es $n = 4$.

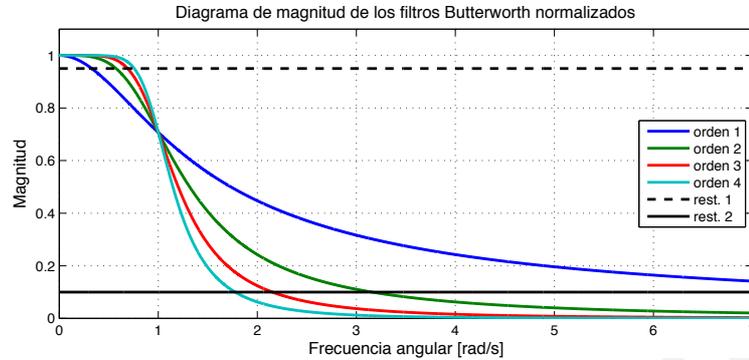


Figura 4.20: Diagrama de magnitud para los primeros 4 filtros Butterworth normalizados y las restricciones de diseño impuestas (rest. 1 y rest. 2).

El mismo resultado puede ser obtenido en forma analítica: considerando la primera restricción en la ecuación (4.108), resulta en

$$M_n(\omega_{n_1}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,5)^{2n}}} \geq 0,95 \quad (4.129)$$

Lo cual conduce a

$$n \geq \frac{\log((0,95)^{-2} - 1)}{2 \log(0,5)} \approx 1,605 \quad (4.130)$$

Aproximando al entero superior el resultado expresado en (4.130) se tiene que el orden mínimo que satisface la primera restricción es $n = 2$.

Ahora bien, al analizar la segunda restricción mediante la expresión (4.108), se obtiene

$$M_n(\omega_{n_2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2)^{2n}}} \leq 0,1 \quad (4.131)$$

De la expresión (4.131) se obtiene que el filtro de menor orden que cumple con la segunda restricción es

$$n \geq \frac{\log((0,1)^{-2} - 1)}{2 \log(2)} \approx 3,315 \quad (4.132)$$

En consecuencia, el orden menor del filtro que cumple con las especificaciones corresponde al entero superior, es decir, para $n = 4$.

La intersección de ambos conjuntos solución entrega el orden mínimo del filtro Butterworth que satisface las especificaciones de diseño. En este caso, el orden menor es $n = 4$.

Los polos de la transferencia (4.133) se obtienen de la expresión (4.112) para n par.

Una vez determinado el orden mínimo del filtro Butterworth que satisface las especificaciones de diseño, se procede a obtener la transferencia que da lugar

a la respuesta en frecuencia requerida. En este caso, la transferencia para un filtro Butterworth de cuarto orden corresponde a

$$H_4(s_n) = \frac{1}{(s_n^2 + 0,76536s_n + 1)(s_n^2 + 1,84776s_n + 1)} \quad (4.133)$$

El segundo paso en el proceso de diseño requiere efectuar la de-normalización, reemplazando s_n por s/ω_c . De esta manera se obtiene la transferencia de un filtro pasa-bajos Butterworth de orden 4 con frecuencia de corte en ω_c . Así pues, la transferencia deseada corresponde a

$$H_4(s) = \frac{10^{12}}{(s^2 + 765,4s + 10^6)(s^2 + 1847,7s + 10^6)} \quad (4.134)$$

Una vez determinada la transferencia de-normalizada, se procede a implementar el diseño en base a filtros activos, tales como los estudiados en secciones anteriores de este capítulo.

Para efectos de implementación, la transferencia $H_n(s)$, cualquiera sea su orden, debe separarse en producto de transferencias de primer y segundo orden, pues los filtros basados en AO permiten que la transferencia final de una conexión en cascada corresponda al producto de las transferencias individuales.

Como la expresión (4.134) posee 2 factores de segundo orden, entonces es posible descomponer la transferencia $H_4(s)$ como

$$H_4(s) = \frac{10^6}{s^2 + 765,4s + 10^6} \cdot \frac{10^6}{s^2 + 1847,7s + 10^6} \quad (4.135)$$

Los factores mencionados en la expresión (4.135) pueden ser implementados mediante un módulo FAU cada uno, tal como se ilustró en la sección 4.3.3.

En dicha sección, se demostró que es posible obtener una transferencia de tipo filtro pasa-bajos, cuya estructura obedece a

$$\frac{V_C(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{K_L \omega_o^2}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2} \quad (4.136)$$

En donde

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_3}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.137)$$

$$Q = \frac{1 + k_4}{1 + k_3} \sqrt{k_3 \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} \quad (4.138)$$

$$K_L = \frac{k_4(1 + k_3)}{k_3(1 + k_4)} \quad (4.139)$$

Dado que las expresiones (4.137) a (4.139) poseen más variables independientes que dependientes, entonces es posible efectuar una simplificación en el

proceso de diseño. Sea $k_3 = k_4$, $R_1 = R_2$ y $C_1 = C_2$, lo cual lleva a

$$\omega_o = \frac{\sqrt{k_3}}{R_1 C_1} \quad (4.140)$$

$$Q = \sqrt{k_3} \quad (4.141)$$

$$K_L = 1 \quad (4.142)$$

Los resultados expuestos anteriormente conducen a

$$\frac{\omega_o}{Q} = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (4.143)$$

De esta forma, para el primer FAU se debe cumplir que

$$765,4 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (4.144)$$

En el proceso de implementación se considera la elección arbitraria de uno de los parámetros.

El resultado presentado en (4.144) se puede obtener eligiendo $R_1 = 10$ [K Ω] y $C_1 = 0,131$ [μ F]. Esta elección lleva a que la frecuencia ω_o se cumple para $k_3 = 1,31$ (acorde a lo expresado a la ecuación (4.140)).

En el caso del segundo FAU, se tiene que la expresión (4.143) lleva a

$$1847,7 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (4.145)$$

El requisito dado en (4.145) se cumple eligiendo $R_1 = 10$ [K Ω] y $C_1 = 54,12$ [nF]. En consecuencia, para que se satisfaga la ecuación (4.140) es necesario que $k_3 = 0,541$.

Finalmente, el cálculo de $|H_4(j\omega)|$ para las frecuencias de interés (ω_1 y ω_2) se puede efectuar a través de 2 métodos: el primero (y más sencillo) considera evaluar la transferencia (4.108) para $\omega_{n_1} = 0,5$ y $\omega_{n_2} = 2$ cuando el orden es $n = 4$. De esta manera, se obtiene:

$$M_n(\omega_{n_1}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,5)^8}} \approx 0,998 \quad (4.146)$$

$$M_n(\omega_{n_2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2)^8}} \approx 0,0624 \quad (4.147)$$

El segundo método evalúa directamente la magnitud de $H_4(j\omega)$ a través de la transferencia (4.134). Ambos métodos entregan el mismo resultado; sin embargo, el segundo método considera un mayor desarrollo analítico y, por ende, un mayor tiempo para su desarrollo.

Errores

El problema resuelto en esta sección requiere que el estudiante tenga un sólido conocimiento en la teoría de filtros Butterworth y su procedimiento de diseño. A continuación se mencionan los errores más frecuentes.

Error 1 Diseñar un filtro Butterworth sin efectuar el escalamiento en frecuencia respectivo. Es importante que las restricciones de diseño sean escaladas a la frecuencia normalizada; lo anterior se realiza con el propósito de seleccionar el orden del filtro. Posteriormente debe escalarse la transferencia seleccionada a la frecuencia de interés para obtener el filtro deseado.

Error 2 Olvidar efectuar el escalamiento para trasladar la frecuencia de corte desde la unidad hasta ω_c . Esto llevará a un dimensionamiento incorrecto de las componentes a utilizar en el filtro y un desplazamiento de la respuesta en frecuencia. Sin embargo, es posible solucionar este error escalando las componentes dinámicas de la red en el mismo factor no considerado inicialmente.

Error 3 Manipulación incorrecta de las desigualdades (4.129) y (4.131). Esto puede conducir a valores de n erróneos y, por ende, no satisfacer los requerimientos de diseño.

Error 4 Separación incorrecta de la transferencia (4.134). Debe recordarse que la implementación física puede realizarse mediante la conexión en cascada de filtros de primer y segundo orden. Los de primer orden son necesarios sólo si el filtro es de orden impar.

Una variante de interés

El resultado expuesto en (4.134) puede ser deducido en forma gráfica mediante el posicionamiento de los polos del filtro pasa-bajos Butterworth normalizado sobre la circunferencia de radio 1, tal como lo ilustra la figura 4.18.

La normalización $s_n = s/\omega_c$ constituye un escalamiento en frecuencias de forma tal que las especificaciones en torno a la frecuencia ω_c sean trasladadas a las mismas especificaciones, pero en torno a la frecuencia $\omega_n = 1$. En términos gráficos, dicha normalización traslada los polos del filtro Butterworth pasa-bajos desde una circunferencia de radio ω_c hacia otra de radio $\omega_n = 1$. Lo expuesto anteriormente se ilustra en la figura 4.21.

Por lo tanto, el de-normalización efectuada puede desarrollarse considerando una amplificación por ω_c de los polos presentados en la transferencia (4.133).

Al efectuar una factorización sobre la transferencia (4.133), resulta

$$H_4(s_n) = \frac{1}{((s_n + 0,383)^2 + (0,924)^2)((s_n + 0,924)^2 + (0,383)^2)} \quad (4.148)$$

La de-normalización puede efectuarse amplificando por ω_c cada uno de los factores presentes en el denominador de $H_4(s_n)$, luego de lo cual se obtiene

$$H_4(s) = \frac{10^{12}}{((s + 383)^2 + (924)^2)((s + 924)^2 + (383)^2)} \quad (4.149)$$

El factor 10^{12} en el numerador se ha incorporado de forma tal que $H(0) = 1$.

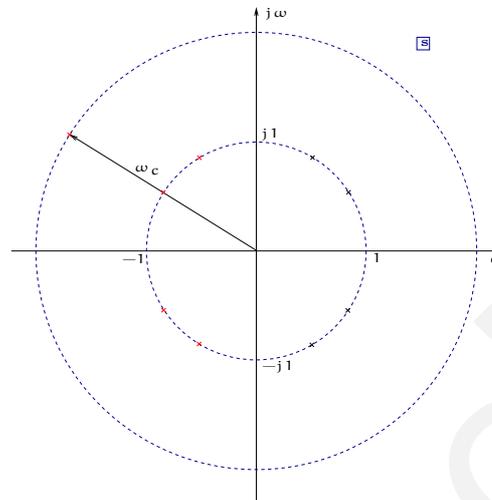


Figura 4.21: De-normalización sobre el plano s de los polos de un filtro Butterworth de orden 4.

El desarrollo de la expresión (4.150) lleva a

$$H_4(s) = \frac{10^{12}}{(s^2 + 766s + 10^6)(s^2 + 1848s + 10^6)} \quad (4.150)$$

El resultado obtenido en (4.134) difiere del resultado obtenido en (4.150) sólo por aproximaciones numéricas, demostrándose así una vía alternativa para la obtención del filtro pasa-bajos de-normalizado.

4.4.3. Diseño de filtros Butterworth pasa-altos

Problema 4.8.

El siguiente problema ilustra el procedimiento a seguir para la selección de un filtro pasa-altos Butterworth, tal que cumpla con las especificaciones de diseño.

Se desea implementar un filtro pasa-altos Butterworth con frecuencia de corte en $\omega_c = 10^4$ [rad/s], de forma que se tenga una magnitud de al menos $-0,355$ [dB] para $\omega_1 = 1,667 \cdot 10^4$ [rad/s], en tanto que se debe presentar una atenuación mayor a 26 [dB] para $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^3$ [rad/s].

4.8.1 Determine el orden mínimo del filtro a ser implementado.

4.8.2 Obtenga la transferencia $H(s)$ del filtro pasa-altos de-normalizado.

4.8.3 Al momento de implementar el filtro, por error se dimensionan los condensadores a $1/10$ de su valor original. ¿Cuál es la nueva frecuencia de corte?.

Solución

Con el propósito de obtener el orden del filtro, primero se debe considerar la normalización de los requerimientos del filtro pasa-altos a los de un filtro pasa-bajos con frecuencia de corte unitaria. Para lograr lo anterior, se procede a transformar las especificaciones según:

$$s_n = \frac{\omega_c}{s} \quad (4.151)$$

Donde s_n corresponde a la variable normalizada y s corresponde a la variable sobre la cual tienen validez las restricciones impuestas en el problema. Al reemplazar s por $j\omega$, se obtiene

$$\omega_n = \frac{-j\omega_c}{\omega} \quad (4.152)$$

En consecuencia, la especificación para el filtro pasa-altos en $\omega_1 = 1,667 \cdot 10^4$ [rad/s] es equivalente a la misma especificación para el filtro pasa-bajos normalizado en una frecuencia de:

$$|\omega_{n_1}| = \frac{10^4}{1,333 \cdot 10^4} \approx 0,6 \quad (4.153)$$

En tanto que la restricción impuesta para $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^3$ [rad/s] es escalada a una frecuencia de

$$|\omega_{n_2}| = \frac{10^4}{2,5 \cdot 10^3} = 4 \quad (4.154)$$

Ahora bien, dado que las especificaciones están dadas en dB, es necesario transformar dichos valores a magnitudes reales. Es así como se obtienen las expresiones (4.155) y (4.156).

$$|R_1| = 10^{-0,355/20} \approx 0,96 \quad (4.155)$$

$$|R_2| = 10^{-26/20} \approx 0,05 \quad (4.156)$$

Una vez efectuada las transformaciones es posible proceder a la selección del filtro Butterworth requerido. Para ello se utilizará tanto el método gráfico como el analítico.

En el caso del método gráfico, las restricciones (4.155) y (4.156) se intersectan con las respuestas en frecuencia de los filtros Butterworth normalizados. Al efectuar lo anterior, se obtiene que el orden mínimo que cumple con ambas especificaciones es $n = 3$. La figura 4.22 permite apreciar la intersección de las restricciones con las curvas de los filtros Butterworth normalizados.

El método analítico requiere el uso de la ecuación (4.108). Para encontrar el orden mínimo, se debe evaluar la expresión para las frecuencias (4.153) y (4.154)

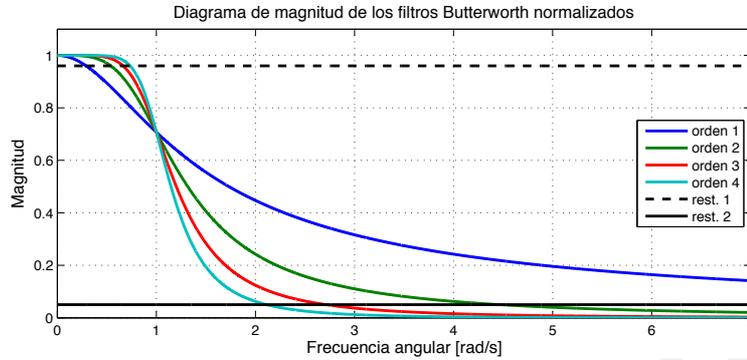


Figura 4.22: Determinación del filtro pasa-bajos Butterworth normalizado que cumple con las especificaciones dadas en (4.155) y (4.156). Se debe hacer notar que las líneas en negro corresponden a las restricciones del problema.

y desarrollar las desigualdades presentadas utilizando las restricciones (4.155) y (4.156). De esta manera, se obtienen las siguientes inecuaciones

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (0,6)^{2n}}} \geq 0,96 \quad (4.157)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (4)^{2n}}} \leq 0,05 \quad (4.158)$$

Al desarrollar las desigualdades (4.157) y (4.158), se obtiene que la primera restricción se satisface para $n \geq 2,412$, en tanto que la segunda desigualdad se cumple para $n \geq 2,161$. En consecuencia, el orden mínimo del filtro que cumple con ambos requisitos a la vez es $n = 3$.

Dado el orden del filtro que se requiere, se procede a determinar la transferencia $H_n(s)$ para el filtro pasa-bajos Butterworth normalizado, el cual resulta ser

$$H_n(s) = \frac{1}{(s_n + 1)(s_n^2 + s_n + 1)} \quad (4.159)$$

Ahora, al aplicar el escalamiento dado por (4.151) a la expresión (4.159), se obtiene

$$H(s) = \frac{s^3}{(s + 10^4)(s^2 + 10^4s + 10^8)} \quad (4.160)$$

El filtro presentado en la expresión (4.160) corresponde a la transferencia final para el filtro Butterworth pasa-altos que cumple con las especificaciones entregadas en el enunciado de este problema.

La última pregunta asociada a este problema es conceptual. Si bien podría diseñarse el filtro activo que da lugar a la transferencia (4.160) y de esta manera

analizar el resultado de escalar los condensadores, esta pregunta se responde tomando en consideración que **los elementos dinámicos de la red (condensadores e inductores) influyen sobre las características del filtro**, tales como la frecuencia de corte, ancho de banda y frecuencia central. Esto puede demostrarse considerando que, en los filtros analizados, siempre se encontrarán productos del tipo sC y sL ; por ende, al escalar por un factor α las componentes dinámicas, se observará que la respuesta en frecuencia de la red posee el escalamiento recíproco; en otras palabras, las características del filtro se multiplican por $1/\alpha$.

Por lo mismo, si todos los condensadores de la red sufren un escalamiento de $1/10$, entonces se tendrá que la respuesta en frecuencia posee el mismo aspecto cualitativo (sigue siendo un filtro pasa-altos), pero su frecuencia de corte estará ubicada en $\omega_{c_{esc}} = 10 \cdot \omega_c$, es decir, en $\omega_{c_{esc}} = 10^5$ [rad/s].

Errores

El desarrollo expuesto en esta sección puede originar variados errores, tanto algebraicos como conceptuales. En este apartado se presentan los errores más frecuentes.

Error 1 Efectuar la normalización de frecuencias utilizando el escalamiento descrito para filtros pasa-bajos, cuando lo que corresponde es utilizar un escalamiento para un filtro pasa-altos. Este error puede evitarse si se considera el análisis para $\omega \rightarrow \infty$. En dicho caso, el escalamiento del filtro pasa-bajos siempre debe tender a infinito, en tanto que el escalamiento de un filtro pasa-altos siempre tenderá a 0.

Error 2 Errores en la transformación de valores dados en dB a magnitud real. Se debe recordar que $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|$.

Error 3 Manipulación incorrecta de la transferencia (4.159) al efectuar la de-normalización para obtener el filtro pasa-altos deseado. Una forma de corroborar que el resultado no está errado al de-normalizar es observar que los grados de los polinomios del numerador y denominador son los mismos. Si bien esto no permite verificar que el resultado esté completamente correcto, permite verificar rápidamente que no se ha cometido algún error algebraico durante la de-normalización.

Error 4 Desarrollo incorrecto de las desigualdades planteadas en las expresiones (4.157) y (4.158). Se debe tener presente que algunos de los logaritmos que aparecen durante el desarrollo de la inecuación pueden resultar menores a 0, por lo que la desigualdad se invierte si se multiplica o divide la inecuación por dicho factor.

Esta demostración es válida considerando que todas las componentes dinámicas sufren el mismo escalamiento α .

Resulta interesante recordar también que una ganancia de 20 [dB] es equivalente a una amplificación por 10, en tanto que una ganancia 6 [dB] es equivalente a una amplificación por 2.

Una variante de interés

Hasta ahora se ha analizado el diseño de filtros Butterworth ocupando la transferencia de orden más baja que cumpla con los requisitos de diseño. Esto se hace considerando que un filtro de menor orden tiene asociado un menor

costo, pues la cantidad de componentes que se necesitan para implementar este tipo de filtros crece rápidamente en la medida que aumenta el orden del filtro.

Sin embargo, la razón antes expuesta no es la única justificación para la minimización del orden del filtro, sino que también esta elección considera la minimización de la duración del transiente de la transferencia y su estabilidad.

Para ilustrar lo anterior, consideremos la transferencia (4.159) y la transferencia para un filtro Butterworth de quinto orden, la cual está definida como

$$H_5(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1,61804s+1)(s^2+0,61804s+1)} \quad (4.161)$$

Para ambas transferencias se analizará la respuesta a escalón unitario aplicado en $t = 0$. La respuesta a escalón de la transferencia (4.159) es

$$y_1(t) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-0,5t} \operatorname{seno} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - e^{-t} \quad (4.162)$$

En tanto que la respuesta a escalón para (4.161) está descrita como

$$\begin{aligned} y_2(t) = & 1 - 1,894 e^{-t} + 0,894 e^{-0,309t} \cos(0,951 t) \\ & + 7 \cdot 10^{-6} e^{-0,309t} \operatorname{seno}(0,951 t) + 3,52 \cdot 10^{-5} e^{-0,809t} \cos(0,588 t) \\ & - 2,753 e^{-0,809t} \operatorname{seno}(0,588 t) \end{aligned} \quad (4.163)$$

Las respuestas (4.162) y (4.163) permiten apreciar claramente la diferencia existente para la respuesta a escalón de ambas transferencias. Al comparar los resultados, se aprecia que un filtro Butterworth de orden 5 presenta una constante de tiempo del orden de 12,94 [s] (considerando el modo natural que decae más lentamente). Sin embargo, la transferencia del filtro Butterworth de tercer orden presenta una constante de tiempo de 8 [s] (para el modo natural más lento). Lo anterior permite concluir que, si bien un filtro Butterworth de orden mayor presenta una respuesta en frecuencia más cercana a la característica filtrante especificada, el transiente para una respuesta a escalón tarda más tiempo en extinguir los modos naturales del sistema.

Lo expuesto es una clara consecuencia de que los polos dominantes de los filtros Butterworth se van acercando cada vez más al eje imaginario, **pudiendo causar inestabilidad si éstos cruzan al semi-plano derecho de s** . Esto puede ocurrir en la realidad, ya que, debido a incertezas de las componentes utilizadas, los polos dominantes de la transferencia pueden trasladarse al semi-plano derecho, dando lugar a modos naturales inestables.

A modo de ilustración, se presenta la respuesta a escalón de las transferencias (4.159) y (4.161) en la figura 4.23, la que permite apreciar con mayor claridad la diferencia en la duración del transiente.

4.4.4. Diseño de filtros Butterworth pasa-banda

Problema 4.9.

El siguiente problema ilustrará el procedimiento a realizar para el diseño de filtros Butterworth pasa-banda.

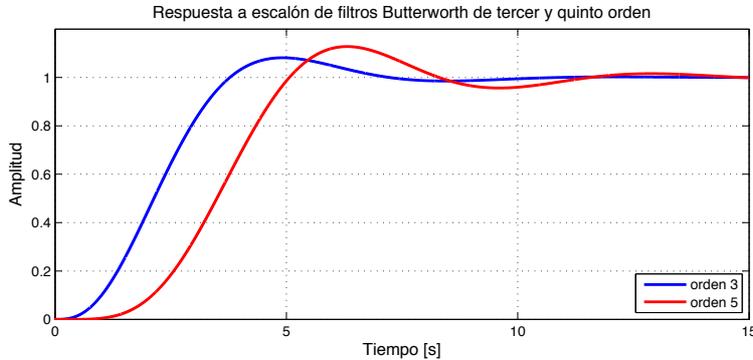


Figura 4.23: Respuesta a escalón para filtros pasa-bajos Butterworth normalizado de tercer y quinto orden.

Se desea implementar un filtro pasa-banda Butterworth que posea una frecuencia central de $\omega_o = 10^4$ [rad/s] y un ancho de banda de $B_W = 10^3$ [rad/s], de forma tal que presente una atenuación mayor a 15 [dB] a una frecuencia de $\omega_1 = 4 \cdot 10^3$ [rad/s], además de presentar una magnitud inferior a -10 [dB] a una frecuencia de $\omega_2 = 13 \cdot 10^3$ [rad/s].

4.9.1 Determine el orden del filtro normalizado Butterworth que cumple con las especificaciones indicadas.

4.9.2 Indique la transferencia $H(s)$ del filtro pasa-banda resultante.

4.9.3 ¿Cuánto es la atenuación que presenta el filtro diseñado a una frecuencia de $\omega_2 = 13 \cdot 10^3$ [rad/s]?

Solución

Para la elección del filtro requerido acorde a las especificaciones indicadas, es preciso escalar las restricciones desde la frecuencia de interés, a una frecuencia normalizada. En términos estrictos, el procedimiento necesita que **las especificaciones del filtro pasa-banda sean transformadas a requerimientos de un filtro pasa-bajos normalizado**.

La transformación que permite llevar las especificaciones dadas para un filtro pasa-banda a restricciones para un filtro pasa-bajos normalizado está descrita como

$$s_n = \frac{\omega_o}{B_W} \left(\frac{s}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{s} \right) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{B_W s} \quad (4.164)$$

Igualmente, las especificaciones se pueden trabajar en el plano $j\omega$, en cuyo caso la magnitud de la expresión (4.164) resulta ser

$$|\omega_n| = \left| \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{B_W \omega} \right| \quad (4.165)$$

Por lo tanto, la frecuencia $\omega_1 = 4 \cdot 10^3$ [rad/s] corresponde a

$$|\omega_{n_1}| = \left| \frac{10^8 - 16 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 4 \cdot 10^3} \right| = 21 \text{ [rad/s]} \quad (4.166)$$

En tanto que la segunda restricción ($\omega_2 = 13 \cdot 10^3$ [rad/s]) se transforma en

$$|\omega_{n_2}| = \left| \frac{10^8 - 169 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 13 \cdot 10^3} \right| = 5,308 \text{ [rad/s]} \quad (4.167)$$

En consecuencia, las restricciones indicadas en el enunciado son equivalentes a las mismas restricciones, pero evaluadas a las frecuencias señaladas en las ecuaciones (4.166) y (4.167).

La figura 4.24 presenta el Diagrama de Bode de magnitud para la respuesta en frecuencia de los primeros 4 filtros pasa-bajos Butterworth normalizados. Se debe hacer notar que el eje vertical está definido en unidades de dB; esto con el propósito de ilustrar más fácilmente la intersección de las restricciones con las curvas descritas.

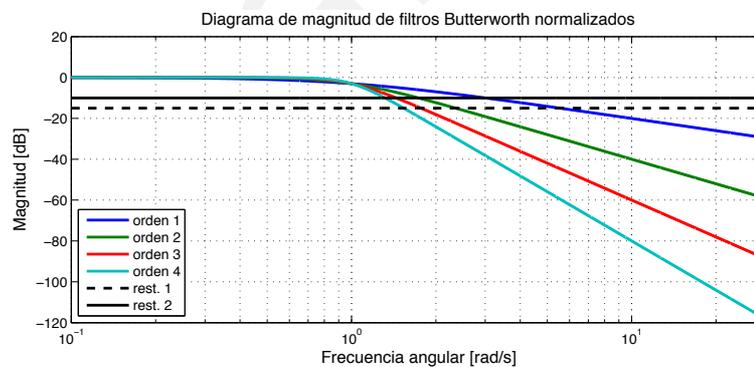


Figura 4.24: Diagrama de Bode de magnitud para los primeros 4 filtros Butterworth normalizados. Se incluyen las intersecciones de las curvas con las restricciones del problema (en líneas negras).

Observando el diagrama presentado, se aprecia que las restricciones impuestas en el problema son cumplidas por todos los filtros estudiados; en consecuencia, basta con elegir un filtro pasa-bajos Butterworth de primer orden para satisfacer los requerimientos solicitados.

Se sabe que la transferencia para un filtro pasa-bajos Butterworth de primer orden corresponde a

$$H_n(s_n) = \frac{1}{s_n + 1} \quad (4.168)$$

De-normalizando el filtro pasa-bajos dado en (4.168) a un filtro pasa-banda, mediante la expresión (4.164), se obtiene

$$H_n(s) = \frac{B_W s}{s^2 + B_W s + \omega_o^2} \quad (4.169)$$

Ahora bien, se sabe que $\omega_o = 10^4$ [rad/s] y que $B_W = 10^3$ [rad/s]; por lo tanto, la expresión (4.169) resulta en

$$H_n(s) = \frac{10^3 s}{s^2 + 10^3 s + 10^8} \quad (4.170)$$

A partir de la transferencia (4.170) y en base al desarrollo efectuado, es posible indicar algunas ideas

- Las transferencias para filtros pasa-banda obtenidas según la transformación (4.164) siempre tendrán en el denominador un polinomio en s de orden par. Esto implica que no es posible obtener una transferencia para un filtro pasa-banda que tenga en el denominador un polinomio de orden 3, por ejemplo.
- La de-normalización efectuada para transformar el filtro pasa-bajos a un filtro pasa-banda implica que la respuesta en frecuencia del filtro pasa-bajos se "duplica", es decir, la curva de respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos se traslada a la misma curva con frecuencia inicial en ω_o , pero mapeándose a frecuencias menores a ésta. De esta manera, la respuesta en frecuencia obtenida corresponde a un filtro pasa-banda. La figura 4.25 ilustra gráficamente lo enunciado en este párrafo.

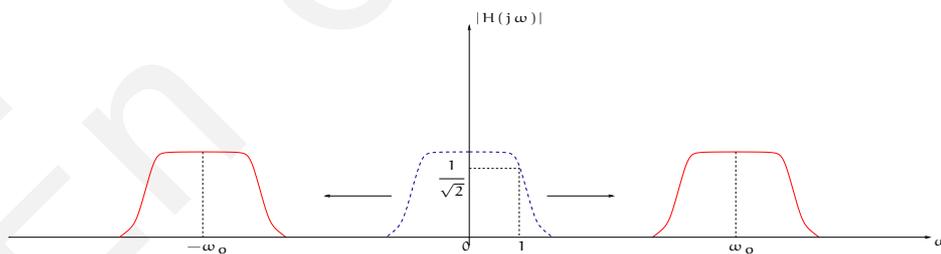


Figura 4.25: Transformación de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos normalizado a un filtro pasa-banda con frecuencia central ω_o .

- El mapeo de las restricciones de un filtro pasa-banda a un filtro pasa-bajos normalizado implica la obtención de frecuencias negativas, si es que la frecuencia asociada es mayor a ω_0 . El análisis para estos valores considera que la respuesta en frecuencia del filtro pasa-bajos normalizado es simétrica con respecto al eje $\omega = 0$. Por lo tanto, la restricción obtenida para una frecuencia menor a 0 puede traducirse siempre a la misma restricción evaluada para el valor absoluto de dicha frecuencia.

El orden mínimo del filtro también puede ser obtenido a partir de la expresión (4.108), desarrollando la inequación en función de las restricciones entregadas para el filtro deseado. Para ello se debe evaluar dicha expresión para ω_{n_1} y ω_{n_2} y expandir el resultado en función del orden n del filtro buscado. La intersección entre ambos conjuntos solución dará el orden mínimo del filtro, el cual, en este caso, resultará ser 1.

La figura 4.26 presenta el Diagrama de Bode de magnitud del filtro pasa-banda diseñado. Se puede apreciar que los requerimientos impuestos por diseño se cumplen satisfactoriamente.

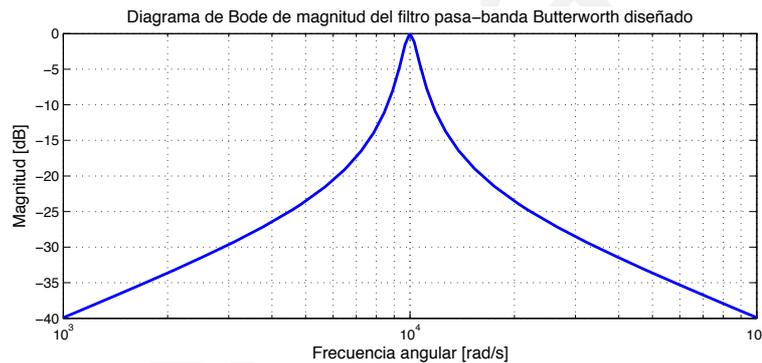


Figura 4.26: Diagrama de Bode de magnitud para el filtro Butterworth pasa-banda diseñado.

Errores

Los errores que se pueden presentar en el desarrollo de un problema de estas características son muy variados, pues los tópicos involucrados en su desarrollo son múltiples. A continuación se presentan los errores más frecuentes.

Error 1 Errores en la manipulación algebraica de las expresiones (omisión de algún factor $j\omega$, escalamiento incorrecto, de-normalización errónea, entre otros).

Error 2 El orden del denominador obtenido para la transferencia de un filtro pasa-banda resulta impar. Siempre el resultado obtenido para la transferencia de un filtro pasa-banda considerará que su denominador sea de

orden par. Esto ocurre debido al escalamiento al cual es sometido un filtro pasa-banda para transformar sus especificaciones a las de un filtro pasa-bajos normalizado.

Error 3 Transformación incorrecta de las especificaciones de magnitud dadas en dB a valores reales. Resulta importante recordar que $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$. Esta conversión es utilizada comúnmente en el área de las telecomunicaciones, pues es más fácil de manipular que números excesivamente pequeños o muy grandes.

A modo de ilustración, una amplificación de 40 [dB] corresponde a un factor de 100, en tanto que una atenuación de 40 [dB] es equivalente a un factor de 1/100.

Error 4 Combinación de factores $j\omega$ con polinomios en s . Debe recordarse que la manipulación algebraica debe efectuarse considerando sólo uno de los dos factores. La razón conceptual detrás de esto considera que en el primer caso se está trabajando en el plano de la frecuencia, mientras que en el segundo se abarca todo el plano s ; una segunda razón resulta de carácter analítico, ya que el resultado expuesto carece de sentido al combinar ambos factores.

Una variante de interés

El problema de diseño de un filtro pasa-banda puede ser analizado considerando como dos sub-problemas, pues la respuesta en frecuencia de este tipo de filtros se puede diseñar como la conexión de un filtro pasa-altos y un filtro pasa-bajos en cascada, siempre y cuando la frecuencia de corte del filtro pasa-bajos sea mayor a la frecuencia de corte del filtro pasa-altos. El diagrama de bloques presentado en la figura 4.27 ilustra esta idea.

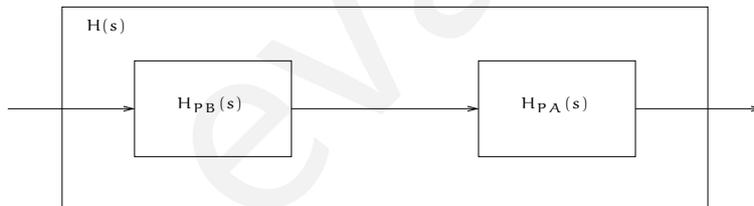


Figura 4.27: Implementación alternativa de un filtro pasa-banda.

De acuerdo a lo anterior, las especificaciones indicadas para el filtro pasa-banda son traducidas a filtros pasa-bajos y pasa-altos con frecuencias de corte ω_2 y ω_1 respectivamente, donde $\omega_2 > \omega_1$.

Sin embargo, las especificaciones en el enunciado principal sólo indican la frecuencia central ω_o y el ancho de banda B_W . Según la definición de los parámetros anteriores, se tiene

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}} \quad (4.171)$$

$$B_W = \omega_{c2} - \omega_{c1} \quad (4.172)$$

Reemplazando los valores numéricos de ω_o y B_W en (4.171) y (??) se obtiene

$$10^4 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}} \quad (4.173)$$

$$10^3 = \omega_{c2} - \omega_{c1} \quad (4.174)$$

La resolución del sistema de ecuaciones conformado por (4.173) y (4.174) conducen a $\omega_{c1} = 9,51 \cdot 10^3$ [rad/s] y $\omega_{c2} = 10,51 \cdot 10^3$ [rad/s]. En consecuencia, el diseño del filtro pasa-banda se subdivide en el diseño de un filtro pasa-altos con frecuencia de corte en $\omega_{c1} = 9,51 \cdot 10^3$ [rad/s] y de un filtro pasa-bajos con frecuencia de corte en $\omega_{c2} = 10,51 \cdot 10^3$ [rad/s].

Las restricciones de atenuación dadas en el enunciado se transforman según:

$$|H_{PB}(j\omega_{c1})H_{PA}(j\omega_{c1})|_{dB} \leq -15 \text{ [dB]} \quad (4.175)$$

$$|H_{PB}(j\omega_{c2})H_{PA}(j\omega_{c2})|_{dB} \leq -10 \text{ [dB]} \quad (4.176)$$

Donde $H_{PB}(s)$ corresponde a la transferencia del filtro pasa-bajos y $H_{PA}(s)$ corresponde a la transferencia del filtro pasa-altos que se utilizará para implementar la transferencia del filtro pasa-banda $H(s)$.

Dado que el diseño se debe efectuar sobre dos transferencias en vez de una, entonces se tendrá un grado de libertad en la implementación de los filtros, puesto que será necesario especificar la respuesta en frecuencia de uno de los filtros para determinar completamente el comportamiento del filtro complementario.

Una posible simplificación al conjunto de ecuaciones (4.175) y (4.176) considera la aproximación $H_{PB}(j\omega_{c1}) \approx 1$ y $H_{PA}(j\omega_{c2}) \approx 1$, por lo que el sistema resulta en

$$|H_{PA}(j\omega_{c1})|_{dB} \leq -15 \text{ [dB]} \quad (4.177)$$

$$|H_{PB}(j\omega_{c2})|_{dB} \leq -10 \text{ [dB]} \quad (4.178)$$

No obstante, dicha aproximación falla cuando ω_{c1} y ω_{c2} están muy cercanos, puesto que el supuesto efectuado requiere filtros de gran orden para cumplir con las desigualdades (4.177) y (4.178).

Ahora bien, el diseño de los filtros pasa-altos y pasa-bajos se efectúa siguiendo los pasos ilustrados en las secciones 4.4.2 y 4.4.3.

4.4.5. Diseño de filtros Butterworth elimina-banda

Problema 4.10.

El problema presentado en esta sección permitirá ilustrar el procedimiento de diseño de filtros Butterworth elimina-banda.

Se desea implementar un filtro Butterworth elimina-banda que posea un ancho de banda de rechazo de 10^3 [rad/s] a una frecuencia central de $\omega_o = 2 \cdot 10^4$ [rad/s], de forma que presente una atenuación mayor a 15 [dB] a $\omega_1 = 2,01 \cdot 10^4$ [rad/s] e inferior a 2 [dB] a $\omega_2 = 2,4 \cdot 10^4$ [rad/s].

4.10.1 Determine el orden mínimo del filtro Butterworth que cumple con las especificaciones entregadas.

4.10.2 Obtenga la transferencia $H(s)$ del filtro elimina-banda solicitado.

4.10.3 Dibuje el diagrama de Bode correspondiente a $H(s)$.

Solución

Para resolver este problema se debe proceder de la misma forma que en las secciones anteriores, pues las especificaciones dadas para un filtro elimina-banda deben ser escaladas a restricciones para un filtro pasa-bajos normalizado. Dicho escalamiento es efectuado mediante

$$|\omega_n| = \left| \frac{B_W \omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \right| \quad (4.179)$$

O bien, puede efectuarse en el plano s a través de

$$s_n = \frac{B_W s}{s^2 + \omega_o^2} \quad (4.180)$$

La normalización en el plano $j\omega$ es equivalente a la normalización en el plano s , sustituyendo $s = j\omega$.

Aplicando la expresión (4.179) para escalar las frecuencias ω_1 y ω_2 , se obtiene

$$|\omega_{n_1}| = \left| \frac{10^3 \omega_1}{4 \cdot 10^8 - \omega_1^2} \right| = 5,012 \text{ [rad/s]} \quad (4.181)$$

$$|\omega_{n_2}| = \left| \frac{10^3 \omega_1}{4 \cdot 10^8 - \omega_2^2} \right| = 0,136 \text{ [rad/s]} \quad (4.182)$$

Una vez escaladas las frecuencias ω_1 y ω_2 a un filtro pasa-bajos normalizado, entonces se puede estudiar el orden del filtro que cumple con las especificaciones señaladas en base a los mismos requerimientos señalados en el enunciado, pero aplicados a las frecuencias normalizadas ω_{n_1} y ω_{n_2} .

El procedimiento para encontrar el orden mínimo del filtro puede desarrollarse de dos formas: la primera de ellas consiste en un tratamiento analítico, mediante la resolución de la expresión (4.108); en tanto, el segundo método requiere el uso de gráficos de la respuesta en frecuencia de los filtros Butterworth normalizados, de los cuales se elegirá el orden menor que cumpla con las especificaciones entregadas.

Aplicando el método analítico a la resolución de este problema, se tendrán las siguientes desigualdades

$$20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{n_1})^{2n}}} \right) \leq -15 \quad (4.183)$$

$$20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{n_2})^{2n}}} \right) \geq -2 \quad (4.184)$$

La función $20 \log(\cdot)$ transforma la magnitud real de (4.108) a dB.

El desarrollo de las expresiones (4.183) y (4.184) llevan a

$$\sqrt{1 + (\omega_{n_1})^{2n}} \geq 10^{3/4} \quad (4.185)$$

$$\sqrt{1 + (\omega_{n_2})^{2n}} \leq 10^{1/10} \quad (4.186)$$

Obteniéndose posteriormente

$$(\omega_{n_1})^{2n} \geq 10^{3/2} - 1 \quad (4.187)$$

$$(\omega_{n_2})^{2n} \leq 10^{1/5} - 1 \quad (4.188)$$

Aplicando la función logaritmo a ambos lados de las desigualdades (4.187) y (4.188), se tendrá

$$2n \log |\omega_{n_1}| \geq \log |10^{3/2} - 1| \quad (4.189)$$

$$2n \log |\omega_{n_2}| \leq \log |10^{1/5} - 1| \quad (4.190)$$

Es en este paso en donde hay que proceder con precaución, pues la función logaritmo puede entregar valores en todo el conjunto de los números reales. Por consiguiente, debe verificarse que cada una de las expresiones presentes en (4.189) y (4.190) sean mayores o menores a cero, lo cual es equivalente a comprobar que cada uno de los argumentos de las funciones logaritmo sean mayores o menores a 1.

Así, por ejemplo, en la expresión (4.189), dado que ω_{n_1} y $10^{3/2} - 1$ son valores mayores a 1, entonces se tendrá que el logaritmo será siempre positivo, por lo cual la desigualdad no cambiará su relación al multiplicar o dividir por dichas expresiones.

Sin embargo, en la expresión (4.190), tanto ω_{n_2} como $10^{1/5} - 1$ son valores menores a 1; en consecuencia, una multiplicación o división por alguno de estos factores implicará un cambio en la relación de desigualdad presente en esta inecuación.

Finalmente, considerando las precauciones anteriores, las expresiones (4.189) y (4.190) resultan en

$$n \geq \frac{\log |10^{3/2} - 1|}{2 \log |\omega_{n_1}|} \approx 1,06 \quad (4.191)$$

$$n \geq \frac{\log |10^{1/5} - 1|}{2 \log |\omega_{n_2}|} \approx 0,134 \quad (4.192)$$

Es poco usual que las cotas inferiores para el orden del filtro sean números enteros, por lo cual la solución siempre se redondeará al entero superior.

Dado que la restricción (4.191) acota más al conjunto solución que la expresión (4.192), entonces se tendrá que el orden mínimo del filtro a ser diseñado debe ser igual a 2.

Gráficamente, la solución al problema propuesto requiere que las curvas de respuesta en frecuencia de los filtros Butterworth normalizados sean intersectadas con las restricciones impuestas para el problema. Lo expuesto está descrito

por la figura 4.28, en donde se aprecia que la segunda restricción es satisfecha por todos los filtros, en tanto que la primera restricción no es cumplida por el filtro de primer orden; por lo tanto, el orden mínimo predicho gráficamente es 2, lo cual concuerda con lo establecido en (4.191).

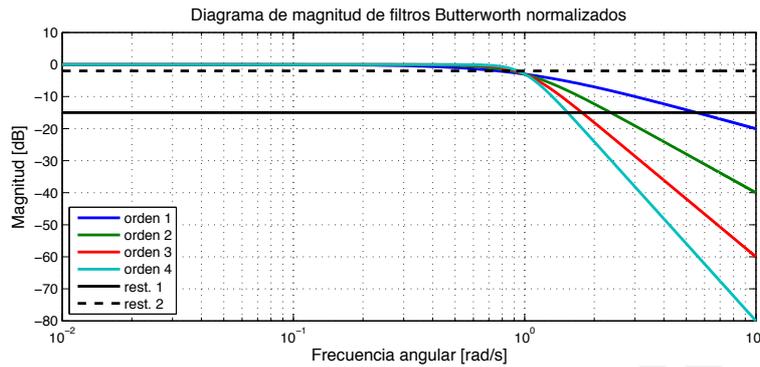


Figura 4.28: Intersección de las restricciones impuestas en el problema con la respuesta en frecuencia de los filtros Butterworth normalizados.

La transferencia de un filtro pasa-bajos Butterworth de segundo orden corresponde a

$$H(s_n) = \frac{1}{s_n^2 + \sqrt{2}s_n + 1} \quad (4.193)$$

La de-normalización de la expresión (4.193) requiere aplicar el resultado expuesto en (4.180), tomando $B_W = 10^3$ [rad/s] y $\omega_o = 2 \cdot 10^4$ [rad/s], lo cual resulta en

$$H(s) = \frac{(s^2 + 4 \cdot 10^8)^2}{s^4 + 1414s^3 + 8,01 \cdot 10^8 s^2 + 5,66 \cdot 10^{11} s + 1,6 \cdot 10^{17}} \quad (4.194)$$

El resultado expuesto en (4.194) es de orden 4, siendo que la transferencia obtenida para el filtro pasa-bajos normalizado es de 2. La razón del aumento del orden del filtro obedece a que el escalamiento efectuado es de orden 2 (de acuerdo a la expresión (4.180)). En consecuencia, cualquier de-normalización a un filtro elimina-banda tendrá un orden que será el doble del filtro pasa-bajos normalizado que dio lugar a dicha transferencia. Esta razón es la que explica que toda transferencia de un filtro elimina-banda (o pasa-banda) sea siempre de orden par.

La implementación física de la transferencia 4.193 puede efectuarse separando la transferencia (4.194) en dos transferencias de segundo orden, las cuales resultarán en

$$H(s) = \frac{s^2 + 4 \cdot 10^8}{s^2 + 719,607 s + 4,144 \cdot 10^8} \cdot \frac{s^2 + 4 \cdot 10^8}{s^2 + 694,607 s + 3,861 \cdot 10^8} \quad (4.195)$$

Cada una de las transferencias de segundo orden presentadas en (4.195) puede ser implementada en forma independiente mediante el uso de amplificadores operacionales (AO), entre los cuales se cuenta la implementación mediante FAU, la cual resulta ser comúnmente la forma más sencilla.

Al esbozar el diagrama de Bode de la transferencia (4.194), se obtiene el gráfico presentado en la figura 4.29. Note que los requerimientos de diseño son satisfechos por la respuesta en frecuencia del sistema.

Por último, si se desea aumentar la ganancia del filtro diseñado a un valor m , sólo basta con instalar un amplificador operacional de ganancia m a la salida del filtro. Con ello se logra que la respuesta en frecuencia del filtro se desplace hacia arriba en el diagrama de Bode de magnitud en una cantidad igual a $20 \log(m)$ [dB].

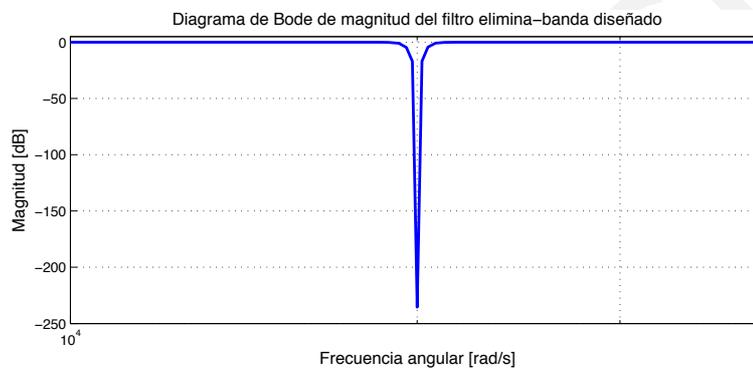


Figura 4.29: Diagrama de Bode del filtro Butterworth elimina-banda diseñado.

Errores

El desarrollo de un problema con estas características puede tornarse complejo si los conceptos de normalización y respuesta en frecuencia no son dominados completamente por el estudiante. A continuación se enumeran los errores más frecuentes cometidos en ejercicios de este tipo.

La respuesta en frecuencia de filtros pasa-bajos y pasa-altos con la igual frecuencia de corte presentan la misma reciprocidad expuesta en este punto.

Error 1 Invertir el escalamiento expresado en (4.180). Este error es muy frecuente, pues la similitud de esta expresión con la expuesta en (4.164) es considerable. Esto se debe a que **la respuesta en frecuencia de un filtro elimina-banda es el recíproco de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-banda**, considerando que ambas poseen la misma frecuencia central y ancho de banda. Por lo tanto, es más sencillo comprender la operatoria de escalamiento de uno de estos filtros, pues el filtro restante sufre un escalamiento en frecuencia que corresponde al recíproco del otro.

Error 2 Tratamiento incorrecto de números complejos. Si bien este error es común a todos los problemas desarrollados en este capítulo, se insiste en

la importancia de un dominio de la operatoria con números complejos, pues sus aplicaciones en la resolución de problemas son extensas.

Error 3 Despeje incorrecto de las desigualdades presentadas en (4.189) y (4.190). El tratamiento simbólico de estas desigualdades requiere que se verifique constantemente si los factores implicados en la inecuación son mayores a 0 o no, pues una multiplicación o división por alguno de estos factores puede incidir en la inversión de la relación de desigualdad.

Error 4 Errores en la de-normalización de la transferencia (4.193). Una verificación rápida del resultado consiste en corroborar que el grado relativo de la transferencia resultante sea 0 y que el orden del polinomio del denominador sea par. Si bien esto no garantiza que el desarrollo numérico esté correcto, sirve para descartar posibles errores por de-normalización.

El grado relativo se define como la diferencia entre el número de raíces del denominador y el número de raíces del numerador.

Una variante de interés

Consideremos ahora que existe una nueva restricción de diseño, la cual establece que el filtro debe cumplir con una atenuación mayor a 12 [dB] a una frecuencia de $\omega_3 = 1,97 \cdot 10^4$ [rad/s]. Nuevamente, se procede a efectuar el cálculo de la frecuencia normalizada, la cual resulta en

$$|\omega_{n_3}| = \left| \frac{B_W \omega_3}{\omega_o^2 - \omega_3^2} \right| = 1,654 \text{ [rad/s]} \quad (4.196)$$

Posteriormente, los requerimientos dados para ω_3 constituyen las mismas restricciones para el filtro normalizado a una frecuencia de ω_{n_3} . En consecuencia, el orden mínimo del filtro que cumple con las especificaciones entregadas estará dado analíticamente por

$$20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{n_3})^{2n}}} \right) \leq -12 \quad (4.197)$$

Lo cual lleva a

$$2n \log |\omega_{n_3}| \geq \log |10^{6/5} - 1| \quad (4.198)$$

dado que todos los argumentos de las funciones logaritmo presentes en (4.198) son mayores a 1, entonces no existirá inversión en la desigualdad propuesta. En consecuencia, el orden mínimo del filtro que satisface la restricción impuesta está dado por

$$n \geq \frac{\log |10^{6/5} - 1|}{2 \log |\omega_{n_3}|} \approx 2,68 \quad (4.199)$$

Es decir, el orden mínimo del filtro pasa-bajos normalizado que cumple con la restricción es $n = 3$. Por ende, la transferencia presentada en (4.193) sería de tercer orden y, en consecuencia, la transferencia resultante para el filtro

elimina-banda de-normalizado sería de orden 6 (el doble de la transferencia normalizada).

Por lo tanto, se debe poner especial atención en la condición de diseño más restrictiva, pues ésta será la que determine el orden del filtro, cumpliendo además las restricciones más débiles.

4.5. Filtros Chebyshev.

4.5.1. Determinación de transferencias de orden n

Problema 4.11.

Hasta ahora se ha analizado el procedimiento de diseño de filtros de tipo Butterworth en base a las restricciones impuestas por los requisitos del sistema.

Ahora se procederá a ilustrar un segundo tipo de filtro, denominado Chebyshev, cuyas ventajas y desventajas en comparación con los filtros Butterworth quedarán expuestas en el siguiente problema.

4.11.1 A partir de la teoría de los filtros Chebyshev, evalúe $|H(j\omega)|$ para un filtro pasa-bajos de segundo orden para $\omega_1 = 0,5$ [rad/s] y $\omega_2 = 2,3$ [rad/s].

4.11.2 ¿Cuál es la relación entre los polos de un filtro Butterworth y un filtro Chebyshev?

Solución

La teoría de filtros Chebyshev establece que la magnitud de la transferencia $H(j\omega)$ está definida como

$$|H(j\omega)|^2 = M(\omega)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n(\omega)^2} \quad (4.200)$$

Donde ε corresponde al ripple o rizado presente en la respuesta en frecuencia de la transferencia $|H(j\omega)|$, tal como se presenta en la figura 4.30. Por otra parte, $C_n(z)$ constituye un polinomio sobre z de orden n , tal que $C_n(0) = \cos(n\pi/2)$. Así, $C_n(z)$ se define como

$$C_n(z) = \begin{cases} \cos(n \arccos(z)) & \text{si } |z| < 1, \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(z)) & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (4.201)$$

A partir de la expresión (4.201), es posible establecer que $C_n(1) = 1$, por lo que $M(1)^2$ corresponde a

$$M(1) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (4.202)$$

Ahora bien, la determinación del polinomio $C_n(z)$ puede efectuarse realizando un cambio de variable tal que $\cos(x) = z$, por lo que $C_n(z)$ resulta en

$$C_n(z) = \cos(nx) \quad (4.203)$$

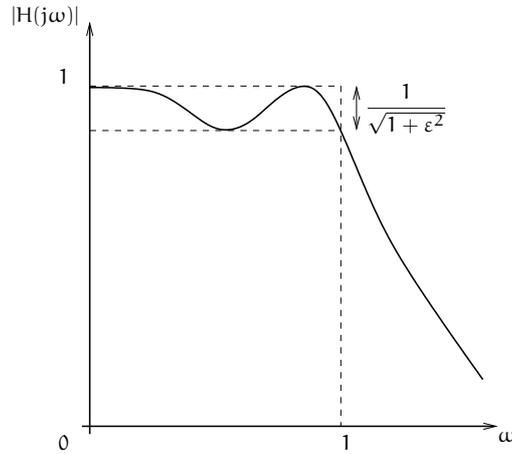


Figura 4.30: Respuesta en frecuencia de un filtro Chebyshev pasa-bajos normalizado.

Utilizando la propiedad trigonométrica que $\cos(n x)$ se puede expresar como función de potencias de $\cos(x)$ (o sea, de z), se llega a que $C_n(z)$ es un polinomio en z .

Así, empleando la expresión (4.201) se obtiene el polinomio en z de orden 2 como

$$C_2(z) = \cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 \quad (4.204)$$

Efectuando el reemplazo $z = \cos(x)$ en (4.204) se obtiene

$$C_2(z) = 2z^2 - 1 \quad (4.205)$$

Reemplazando (4.205) en (4.200) resulta

$$M(z)^2 = \frac{1}{4\epsilon^2 z^4 - 4\epsilon^2 z^2 + 1 + \epsilon^2} \quad (4.206)$$

Para transformar la expresión (4.206) desde z a ω basta con reemplazar $z = \omega$, lo cual resulta en

$$M(\omega)^2 = \frac{1}{4\epsilon^2 \omega^4 - 4\epsilon^2 \omega^2 + 1 + \epsilon^2} \quad (4.207)$$

Para obtener un ripple de 3 [dB], se debe ajustar ϵ de forma tal que se cumpla $20 \log(1/\sqrt{1 + \epsilon^2}) = -3$ [dB], lo cual resulta en

$$\epsilon = \sqrt{10^{3/10} - 1} \approx 1 \quad (4.208)$$

Reemplazando el resultado expuesto anteriormente en (4.207), se obtiene

$$M(\omega)^2 = \frac{0,25}{\omega^4 - \omega^2 + 0,5} \quad (4.209)$$

Extrayendo raíz a (4.209), resulta

$$|H(j\omega)| = \frac{0,5}{\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 0,5}} \quad (4.210)$$

A partir de (4.210) es posible evaluar $|H(j\omega)|$ para los valores entregados en el enunciado. De esta forma, la evaluación para $\omega = \omega_1$ y $\omega = \omega_2$ lleva a

$$|H(j\omega_1)| = 0,8944 \quad (4.211)$$

$$|H(j\omega_2)| = 0,1038 \quad (4.212)$$

El resultado presentado en (4.211) indica una característica importante de estos filtros (presentada en la figura 4.30): la magnitud en la banda de paso **no es constante**. A diferencia de los filtros Butterworth, los filtros Chebyshev no presentan una magnitud constante en la banda de paso, sino que es variable acorde al ripple ε presente en la transferencia (4.200).

Ahora bien, la determinación analítica de los polos de un filtro Chebyshev puede efectuarse tomando como referencia los polos de un filtro Butterworth, ya que **la parte imaginaria de los polos de un filtro Butterworth coinciden con la parte imaginaria de los polos de un filtro Chebyshev, siempre y cuando se efectúe una normalización adecuada**.

La igualdad anterior permite deducir la parte imaginaria de un polo Chebyshev de orden n en base a su símil Butterworth de orden n . Posteriormente, este resultado puede ser utilizado para estimar la parte real del polo del filtro Chebyshev respectivo. Si se define

$$\beta = \frac{1}{n} \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (4.213)$$

Entonces es posible relacionar la parte real σ_k y la parte imaginaria ω_k para el k -ésimo polo de un filtro Chebyshev (sin escalamiento) según

$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{senh}^2(\beta)} + \frac{\omega_k^2}{\operatorname{cosh}^2(\beta)} = 1 \quad (4.214)$$

El resultado expuesto en (4.214) indica que los polos que dan origen a un filtro Chebyshev se encuentran ubicados sobre una elipse centrada en el origen. Sin embargo, para que la expresión (4.214) pueda ser comparada directamente con los polos de un filtro Butterworth, ésta debe ser escalada por un factor de $\operatorname{cosh}(\beta)$, lo cual lleva a

$$\frac{\sigma_k^2}{\tanh^2(\beta)} + \omega_k^2 = 1 \quad (4.215)$$

Considerando un ripple de 3 [dB] en la banda de paso (tal como se ilustra en la figura 4.30), se tiene que el rizado ε corresponde a

$$20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \right) = -3 \Rightarrow \varepsilon \approx 1 \quad (4.216)$$

Por lo tanto, β resulta en

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arcsenh}(1) \approx 0,4407 \quad (4.217)$$

Utilizando el resultado expuesto en (4.217) y tomando en consideración que $|\omega_k| = \sqrt{2}/2$ para un polinomio Butterworth de segundo orden, entonces es posible determinar σ_k según

$$\sigma_k = -\tanh(\beta) \sqrt{1 - \omega_k^2} \approx -0,2929 \quad (4.218)$$

En consecuencia, los polos del filtro pasa-bajos Chebyshev de segundo orden corresponden a

$$p_1 = -0,2929 + j \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.219)$$

$$p_2 = -0,2929 - j \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.220)$$

Por lo tanto, la transferencia para un filtro Chebyshev de orden 2 resulta

$$H(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{1}{s^2 + 0,5858s + 0,5858} \quad (4.221)$$

El procedimiento ilustrado para la obtención del filtro Chebyshev de orden 2 puede ser extendido a cualquier orden n , teniendo la precaución de efectuar el escalamiento correspondiente a la ecuación (4.214), de forma que quede expresada como se presenta en (4.215).

La respuesta en frecuencia en magnitud de la transferencia (4.221) se ilustra en la figura 4.31. En ella es posible apreciar que presenta un ripple de 3 [dB] en la banda de paso, tal como se predijo teóricamente.

Errores

El problema ilustrado en esta sección puede ser fuentes de variados errores, pues exige un tratamiento analítico y conceptual de un nivel mayor al presentado en el diseño de filtros Butterworth. A continuación, se presentan los errores más frecuentes.

Error 1 Utilizar la relación (4.214) para comparar los polos de un filtro Butterworth con los de un filtro Chebyshev. Dicha comparación se puede efectuar, pues no existe un punto de referencia en común para la ubicación de los polos de ambos filtros. Es por esto que la ecuación (4.215) debe ser utilizada, pues escala los polos de un filtro Chebyshev y los permite comparar con los polos de un filtro Butterworth, tal como se presenta en la figura 4.32.

Se toma la solución $\sigma_k < 0$ en la expresión (4.218) debido a que los polos ubicados en el semi-plano izquierdo del plano s son los que dan origen a transferencias estables para los filtros analizados.

La ganancia a continua de la transferencia (4.221) es igual a $1/0,5858 > 1$, lo cual concuerda con la figura 4.31.

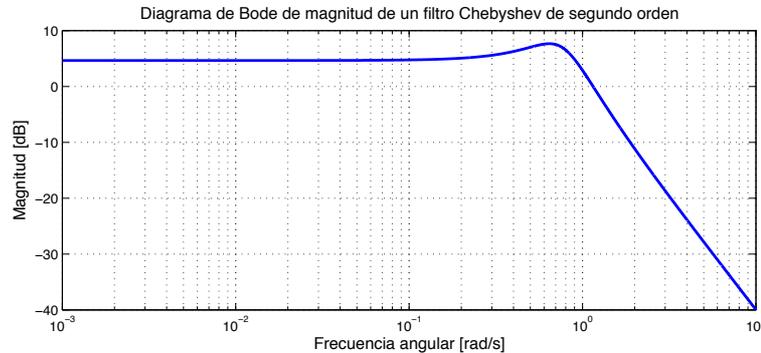


Figura 4.31: Diagrama de Bode de magnitud de la transferencia del filtro Chebyshev normalizado de segundo orden.

Error 2 Evaluar el valor de ripple directamente sobre ϵ en vez de utilizar la expresión (4.216). Si bien el factor ϵ determina el rizado de la respuesta en frecuencia en la zona de planicie, ϵ no es directamente el ripple presentado en la figura 4.30.

Error 3 Errores en el cálculo iterativo de los polinomios Chebyshev acorde a la expresión (4.203). A fin de evitar este error, es posible utilizar la igualdad

$$C_n(z) = 2z C_{n-1}(z) - C_{n-2}(z) \quad (4.222)$$

Error 4 Errores en manipulación algebraica sobre los polinomios de Chebyshev descritos en este problema. Si bien este error es común a todos los ejercicios, suele ser normalmente la principal fuente de error en el desarrollo de expresiones.

Una variante de interés

Una alternativa de solución al problema planteado es considerar un filtro Butterworth del mismo orden que el solicitado, para luego trasladar sus polos a las del respectivo filtro Chebyshev. Así, por ejemplo, la transferencia para un filtro Butterworth normalizado de segundo orden está dada por

$$H_{\text{butter}}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (4.223)$$

Expandiendo la expresión (4.223) en sus polos, se obtiene

$$H_{\text{butter}}(s) = \frac{1}{(s + \sqrt{2}/2)^2 + 1/2} \quad (4.224)$$

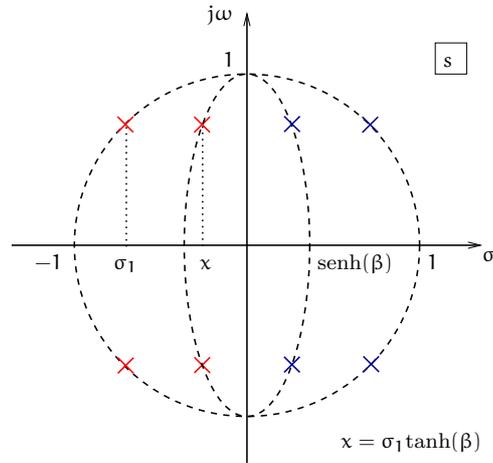


Figura 4.32: Distribución en el plano s de los polos de un filtro Butterworth (sobre la circunferencia de radio 1) y Chebyshev (sobre la elipse). Se destacan en rojo los polos que son utilizados para implementar los filtros analizados.

Finalmente, la transformación desde un filtro Butterworth a su equivalente Chebyshev se efectúa multiplicando la parte real de los polos por $\tanh(\beta)$, donde β está definido acorde a la expresión (4.213). De esta manera, la transferencia (4.224) resulta en

$$H_{ch}(s) = \frac{1}{(s + \tanh(\beta)\sqrt{2}/2)^2 + 1/2} = \frac{1}{(s + 0,2929)^2 + 1/2} \quad (4.225)$$

Desarrollando (4.225) se obtiene

$$H_{ch}(s) = \frac{1}{s^2 + 0,5858s + 0,5858} \quad (4.226)$$

Que corresponde al mismo resultado presentado en (4.221).

4.6. Diseño general de filtros activos

Problema 4.12.

En el siguiente ejercicio se plantea un análisis completo del proceso requerido para implementar un filtro analógico, comenzando a partir de los requerimientos, hasta completar el diseño seleccionando las componentes que conformarán la red, implementada mediante Filtros Activos Universales.

Se desea implementar un filtro activo pasa-banda con una frecuencia central de $\omega_o = 10^3$ [rad/s], con un ancho de banda de $B_W = 300$ [rad/s], de forma que presente una atenuación mayor a 40 [dB] a $\omega_1 = 302,7$ [rad/s], en tanto la atenuación debe ser mayor a 30 [dB] a una frecuencia de $\omega_2 = 2500$ [rad/s].

- 4.12.1** Escale las especificaciones a las de un filtro pasa-bajos normalizado con frecuencia de corte unitaria.
- 4.12.2** Determine el orden mínimo del filtro pasa-bajos normalizado Butterworth que cumple con los requisitos dados. Repita el análisis para un filtro pasa-bajos normalizado Chebyshev.
- 4.12.3** Tomando el filtro pasa-bajos normalizado Butterworth de menor orden, de-normalice e implemente el filtro pasa-banda mediante FAU.

Solución

Hasta el momento sólo se ha analizado el proceso de normalización de las especificaciones de los distintos tipos de filtros hacia un filtro pasa-bajos normalizado a frecuencia de corte unitaria. Resulta importante enfatizar que el proceso de diseño finaliza una vez que el filtro queda implementado en forma electrónica, es decir, mediante componentes pasivas y amplificadores operacionales.

En primera instancia, se deben transformar las especificaciones dadas para el filtro pasa-banda a requerimientos normalizados según la transformación dada por

$$|\omega_n| = \left| \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{B_W \omega} \right| \quad (4.227)$$

El resultado expuesto en (4.227) constituye la transformación general para llevar los requerimientos de un filtro pasa-banda (con cualquier ancho de banda B_W y frecuencia central ω_o) a un filtro pasa-bajos con frecuencia de corte unitaria, tal como se ha visto en el problema 4.4.4.

Así, para una frecuencia central de $\omega_o = 10^3$ [rad/s] y un ancho de banda de $B_W = 300$ [rad/s], la transformación (4.227) está dada por

$$|\omega_n| = \left| \frac{1000^2 - \omega^2}{300 \omega} \right| = \left| \frac{10^6 - \omega^2}{300 \omega} \right| \quad (4.228)$$

Por consiguiente, para una frecuencia de $\omega_1 = 302,7$ [rad/s], la frecuencia normalizada equivalente es de

$$|\omega_{n_1}| = \left| \frac{10^6 - 302,7^2}{300 \cdot 302,7} \right| = 10 \text{ [rad/s]} \quad (4.229)$$

En tanto que una frecuencia de $\omega_2 = 2500$ [rad/s], la frecuencia normalizada correspondiente es

$$|\omega_{n_2}| = \left| \frac{10^6 - 2500^2}{300 \cdot 2500} \right| = 7 \text{ [rad/s]} \quad (4.230)$$

Entonces, las especificaciones del filtro pasa-banda original, equivalen a las siguientes especificaciones para un filtro pasa-bajos normalizado:

- Se desea una atenuación mayor o igual a 40 [dB] a una frecuencia de $\omega_{n_1} = 10$ [rad/s].

- La atenuación presentada por el filtro pasa-bajos normalizado debe superar (o igualar) los 30 [dB] a una frecuencia de $\omega_{n_2} = 7$ [rad/s].

Una vez transformadas las especificaciones entregadas para el filtro pasa-banda, se procede a comparar los resultados requeridos a las frecuencias ω_{n_1} y ω_{n_2} con las respuestas en frecuencia de los filtros Butterworth (y Chebyshev) de diferentes órdenes.

Para el caso de los filtros Butterworth, la figura 4.33 presenta el Diagrama de Bode de magnitud de los cuatro primeros filtros Butterworth pasa-bajos normalizados, intersectados con las restricciones dadas a las frecuencias ω_{n_1} y ω_{n_2} . En dicha figura se aprecia que la restricción a la frecuencia ω_{n_1} es más restrictiva que la entregada para ω_{n_2} , puesto que esta última se cumple con holgura, en cambio la primera restricción es satisfecha sólo en igualdad por el filtro de menor orden. Sin embargo, ambas conducen a que el orden mínimo del filtro que satisface las restricciones es $n = 2$.

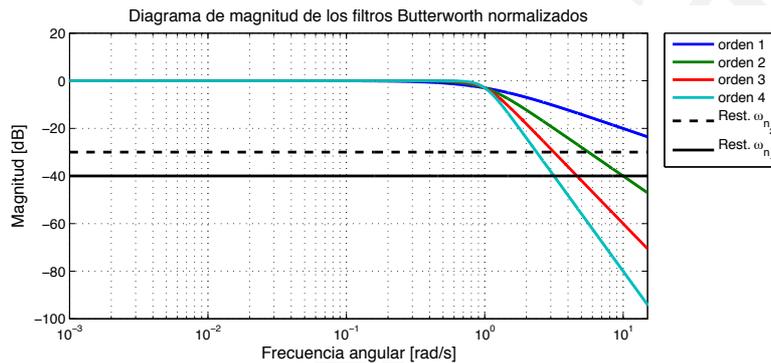


Figura 4.33: Diagrama de Bode para los 4 primeros filtros Butterworth normalizados y su intersección con las restricciones a las frecuencias ω_{n_1} y ω_{n_2} .

De manera similar, se procede para un filtro Chebyshev. Nuevamente se intersectan las restricciones normalizadas dadas en (4.229) y (4.230) con las respuestas en frecuencia de los tres primeros filtros Chebyshev, dando lugar a la figura 4.34. En este caso, no obstante, los filtros Chebyshev se encuentran normalizados en ganancia y no en frecuencia de corte, lo cual implica que las restricciones impuestas al problema serán cumplidas con mayor holgura, puesto que las frecuencias de corte siempre se encuentran por debajo de la frecuencia unitaria.

Las transferencias de los filtros Chebyshev fueron deducidas a partir de la figura 4.32 presente en la sección 4.5.1, cuyos resultados analíticos corresponden

a

$$H_{ch_1}(s_n) = \frac{\sqrt{2}/2}{s + \sqrt{2}/2} \quad (4.231)$$

$$H_{ch_2}(s_n) = \frac{0,58578}{s^2 + 0,58578s + 0,58578} \quad (4.232)$$

$$H_{ch_3}(s_n) = \frac{0,22}{(s + 0,28562)(s^2 + 0,28562s + 0,7704)} \quad (4.233)$$

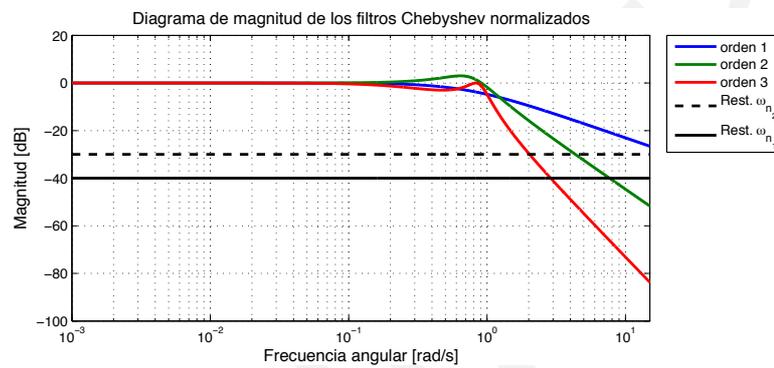


Figura 4.34: Diagrama de Bode para los 4 primeros filtros Chebyshev normalizados en ganancia y su intersección con las restricciones a las frecuencias ω_{n_1} y ω_{n_2} .

Según la figura 4.34, el orden mínimo del filtro Chebyshev que satisface las especificaciones es $n = 2$. Se puede apreciar igualmente que las restricciones son satisfechas con holgura para ambos requisitos, situación que se da debido a que los filtros Chebyshev poseen una atenuación mayor que los filtros Butterworth del mismo orden dada una cierta frecuencia.

Una vez determinado los requerimientos del filtro pasa-bajos normalizado que cumple con los requisitos especificados, se procede a de-normalizar la transferencia resultante a fin de recuperar el filtro solicitado. En el caso de un filtro pasa-bajos Butterworth normalizado de segundo orden, la transferencia corresponde a

$$H_2(s_n) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (4.234)$$

Empleando la transformación definida como

$$s_n = \frac{s^2 + \omega_o^2}{B_W s} = \frac{s^2 + 10^6}{300s} \quad (4.235)$$

Entonces el filtro de-normalizado resulta en

$$H_{PB}(s) = \frac{9 \cdot 10^4 s^2}{(s^2 + 234,63s + 1,24 \cdot 10^6)(s^2 + 189,63s + 8,08 \cdot 10^5)} \quad (4.236)$$

El resultado expuesto en (4.236) corresponde a la transferencia de un filtro pasa-banda de cuarto orden con un ancho de banda de $B_W = 300$ [rad/s] y una frecuencia central de $\omega_o = 10^3$ [rad/s].

Una vez determinada la transferencia del filtro pasa-banda, se procede a su implementación electrónica mediante FAU. Para ello, se separa la transferencia (4.236) en factores de segundo orden, según

$$H_{PB}(s) = \frac{-300 s}{s^2 + 234,63 s + 1,24 \cdot 10^6} \cdot \frac{-300 s}{s^2 + 189,63 s + 8,08 \cdot 10^5} = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad (4.237)$$

Cada uno de los factores presentes en (4.237) pueden ser implementados mediante FAU, para luego obtener el filtro definido en (4.236) mediante su conexión en cascada.

Retomando lo analizado en la sección 4.3.3, en especial la estructura definida para un filtro pasa-banda según (4.104):

$$H_{PB}(s) = \frac{K_B (\omega_o/Q) s}{s^2 + (\omega_o/Q) s + \omega_o^2} \quad (4.238)$$

En donde K_B , ω_o y Q son definidos como

$$K_B = -k_4 \quad (4.239)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_3}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.240)$$

$$Q = \frac{k_4 (1 + k_3)}{1 + k_4} \quad (4.241)$$

Para la transferencia $H_1(s)$ definida por

$$H_1(s) = \frac{-300 s}{s^2 + 234,63 s + 1,24 \cdot 10^6} \quad (4.242)$$

Se tiene que los valores de K_B , ω_o y Q están dados por

$$K_B = \frac{-300}{234,63} \approx -1,279 \quad (4.243)$$

$$\omega_o = \sqrt{1,24 \cdot 10^6} \approx 1113,6 \text{ [rad/s]} \quad (4.244)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{234,63} \approx 4,75 \quad (4.245)$$

Igualando las expresiones (4.239), (4.240) y (4.241) con (4.243), (4.244) y (4.245), se obtiene

$$-k_4 = -1,279 \quad (4.246)$$

$$\sqrt{\frac{k_3}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 1113,6 \text{ [rad/s]} \quad (4.247)$$

$$\frac{k_4 (1 + k_3)}{1 + k_4} = 4,75 \quad (4.248)$$

La transformación empleada en (4.235) duplica el orden del filtro original. En consecuencia, los filtros pasa-banda siempre serán de orden par.

Lo cual conduce a que $k_4 = 1,279$ y, en consecuencia, las expresiones (4.247) y (4.248) correspondan a

$$\frac{1,279(1+k_3)}{2,279} = 4,75 \Rightarrow k_3 = 7,535 \quad (4.249)$$

$$\sqrt{\frac{7,535}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 1113,6 [\text{rad/s}] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 405,68 [\text{rad/s}] \quad (4.250)$$

La expresión (4.250) permite un diseño con una mayor cantidad de grados de libertad, pues se pueden fijar arbitrariamente 3 de las 4 variables disponibles para diseño. Por ejemplo, si se escogen $R_1 = 5 [\text{K}\Omega]$ y $C_1 = C_2 = 1 [\mu\text{F}]$, lo cual da lugar a

$$R_1 = \frac{1}{405,68^2 R_2 C_1 C_2} = 1,22 [\text{K}\Omega] \quad (4.251)$$

Por otro lado, se escogen en forma arbitraria $R_3 = R_4 = 10 [\text{K}\Omega]$, lo cual permite implementar completamente la transferencia $H_1(s)$.

Por otro lado, la transferencia $H_2(s)$, definida como

$$H_2(s) = \frac{-300 s}{s^2 + 189,63 s + 8,08 \cdot 10^5} \quad (4.252)$$

Al igual que la transferencia (4.242), los factores K_B , Q y ω_o están definidos según

$$K_B = \frac{-300}{189,63} \approx -1,582 \quad (4.253)$$

$$\omega_o = \sqrt{8,08 \cdot 10^5} \approx 898,89 [\text{rad/s}] \quad (4.254)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{189,63} \approx 4,74 \quad (4.255)$$

Dado que $K_B = -k_4$, entonces se cumple que $k_4 = 1,582$, lo cual lleva a

$$\frac{1,582(1+k_3)}{2,582} = 4,84 \Rightarrow k_3 = 6,899 \quad (4.256)$$

$$\sqrt{\frac{6,899}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 898,89 [\text{rad/s}] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 342,23 [\text{rad/s}] \quad (4.257)$$

Al igual que en la transferencia $H_1(s)$, el resultado expuesto en (4.257) indica que es posible elegir arbitrariamente 3 de las 4 componentes involucradas, a fin de satisfacer la igualdad establecida. Escogiendo $R_1 = 5 [\text{K}\Omega]$ y $C_1 = C_2 = 1 [\mu\text{F}]$, lo cual lleva a

$$R_2 = \frac{1}{342,23^2 R_1 C_1 C_2} = 1,71 [\text{K}\Omega] \quad (4.258)$$

El resultado de la implementación del filtro pasa-banda diseñado corresponde a los diagramas de Bode de magnitud y fase presentados en las figuras 4.35 y 4.36. En ellos se aprecia que los requerimientos de diseño impuestos inicialmente en el problema son satisfechos en su totalidad. Sin embargo, vale destacar que la fase varía en forma no lineal con respecto a la frecuencia, lo cual tiene un impacto en la distorsión por fase en la señal de salida.

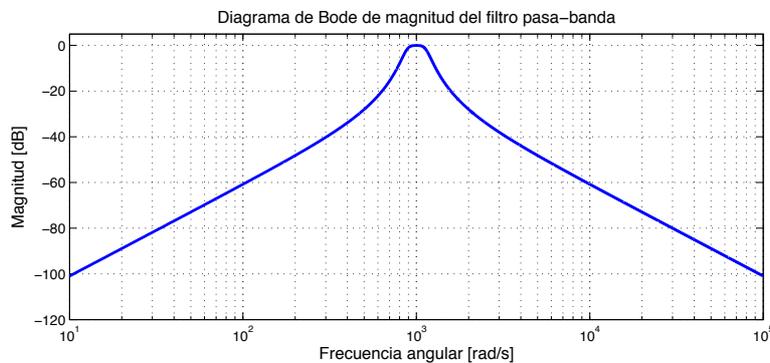


Figura 4.35: Diagrama de Bode de magnitud para el filtro pasa-banda diseñado.

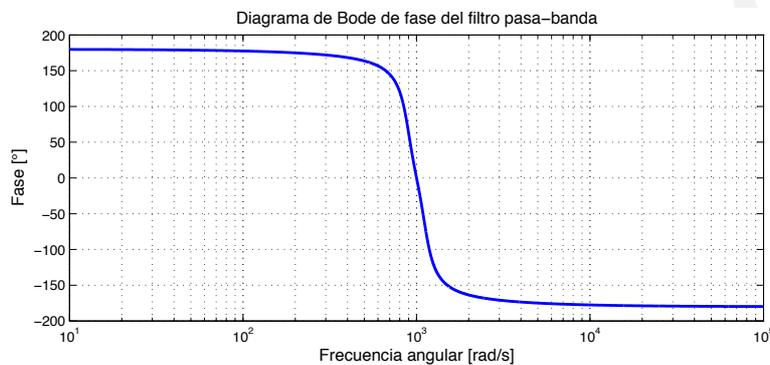


Figura 4.36: Diagrama de Bode de fase para el filtro pasa-banda diseñado.

Errores

El problema propuesto en esta sección puede ocasionar un gran número de errores, tanto de tipo conceptual, como de tipo analítico. A continuación se mencionan los más frecuentes.

Error 1 Error en la transformación de las especificaciones de un filtro pasa-banda a un filtro pasa-bajos normalizado. Se debe considerar que la transformación que rige para estos tipos de filtros está dada por la expresión (4.227).

Error 2 Selección errónea del orden mínimo del filtro que cumple con las especificaciones requeridas. Lo anterior puede evitarse considerando que la cota más restrictiva determinará el orden mínimo del filtro a ser utilizado.

Error 3 Errores en la transformación de un filtro pasa-bajos a un pasa-banda. Una forma de verificar que la transformación se efectuó correctamente es

considerar que el orden de cualquier filtro pasa-banda diseñado es par. Por ende, si la transformación arroja un filtro pasa-banda de orden 3, es necesario verificar los cálculos efectuados.

Error 4 Dimensionamiento inadecuado de las componentes utilizadas para la implementación física del filtro (condensadores de 1 [F] o resistores de 0,001 [Ω], por ejemplo). Para evitar un mal dimensionamiento, se aconseja considerar condensadores cuya magnitud se encuentre entre 10^{-3} a 100 [μ F], en tanto que para los resistores, éstos pueden variar entre 0,5 a 500 [K Ω]. Si bien los valores mencionados son arbitrarios, el rango propuesto permite satisfacer limitaciones tanto físicas como comerciales.

Una variante de interés

Consideremos ahora el caso de un filtro Chebyshev pasa-bajos normalizado de orden 2. Se analizará la respuesta en frecuencia obtenida para el filtro pasa-banda que resulta de la transformación desde un filtro Chebyshev.

Se sabe que la transferencia para un filtro Chebyshev pasa-bajos de segundo orden está dada por

$$H_{ch_2}(s_n) = \frac{0,58578}{s^2 + 0,58578 s + 0,58578} \quad (4.259)$$

Aplicando la transformación expuesta en la expresión (4.235) a (4.259), se obtiene

$$H_{PB_{ch}}(s) = \frac{52720 s^2}{(s^2 + 97,14 s + 1,24 \cdot 10^6)(s^2 + 78,59 s + 8,09 \cdot 10^5)} \quad (4.260)$$

La respuesta en frecuencia de la transferencia (4.260) se presenta en los diagramas de Bode de las figuras 4.37 y 4.37. En ellos se puede apreciar que las restricciones impuestas al problema son satisfechas por el filtro Chebyshev descrito.

Si se comparan las figuras 4.35 y 4.37, se puede observar que la respuesta en frecuencia presentada por el filtro pasa-banda Chebyshev presenta una atenuación en la banda de rechazo mayor a la que posee el filtro pasa-banda Butterworth del mismo orden. Sin embargo, el aumento de la atenuación en la banda de rechazo se gana disminuyendo la planicie de ganancia en la banda de paso, tal como se puede apreciar en la figura 4.37.

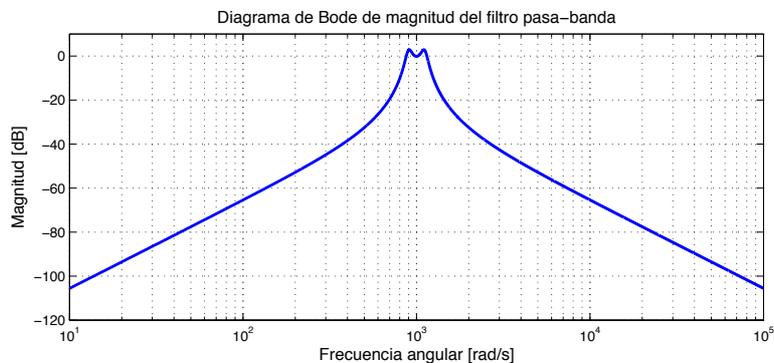


Figura 4.37: Diagrama de Bode de magnitud para el filtro pasa-banda Chebyshev.

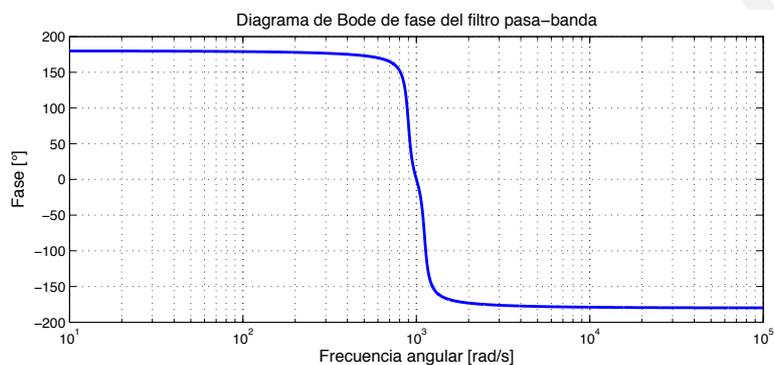


Figura 4.38: Diagrama de Bode de fase para el filtro pasa-banda Chebyshev.

4.7. Ejercicios suplementarios

Problema 4.13. Se implementa un filtro pasivo de tipo elimina banda con frecuencia central ω_o , y frecuencias de corte ω_{c1} y ω_{c2} . Suponga que el valor de cada uno de los inductores y los condensadores se divide por 4. ¿En cuánto cambian la frecuencia central, las frecuencias de corte y el factor de selectividad Q ?

Problema 4.14. Se diseña un filtro pasa banda de segundo orden con un FAU. Suponga que todas las resistencias exceden en 10 % el valor calculado. ¿En qué porcentaje cambian las características del filtro (frecuencia central, frecuencias de corte, ancho de banda y factor de selectividad)?

Problema 4.15. Un filtro pasa bajos Butterworth de 6o. orden y frecuencia de corte 3000 [Hz] es excitado con una sinusoides de frecuencia 4000 [Hz] y amplitud

igual a 7. Calcule la amplitud de la respuesta estacionaria del filtro.

Problema 4.16. En un filtro elimina banda Butterworth de factor de selectividad $Q=10$ se especifica una condición de ganancia para una frecuencia $\omega_1 = 0,8\omega_o$, donde ω_o es la frecuencia central. ¿A qué frecuencia normalizada corresponde la frecuencia ω_1 ?

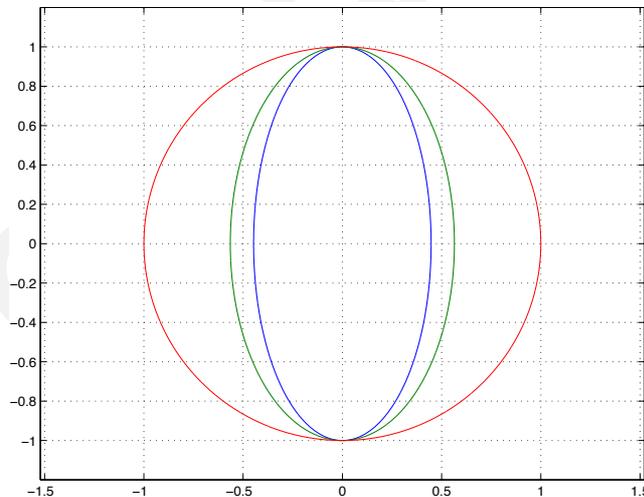
Problema 4.17. Se diseña un filtro pasa altos Butterworth de tercer orden con frecuencia de corte 1000 [Hz] y ganancia unitaria a frecuencia infinita. ¿Cuál es la ganancia del filtro a una frecuencia de 500 [Hz]?

Problema 4.18. En la figura 4.18, se muestran los lugares geométricos para la ubicación de los polos de tres filtros pasabajos de cuarto orden, con frecuencia de corte 1 [rad/s].

Uno de los filtros es Butterworth y los otros dos son Chebyshev con $\epsilon = a$ y $\epsilon = b$, $a > b > 0$

4.18.1 Estime numéricamente la razón entre las **constantes de tiempo dominantes** del filtro Butterworth y el filtro Chebyshev con $\epsilon = b$.

4.18.2 Estime numéricamente los modos naturales del filtro Chebyshev con $\epsilon = a$.



Problema 4.19. Se postula que la respuesta a **rampa unitaria** de un filtro Butterworth pasa altos de segundo orden con frecuencia de corte 1000 [rad/s] y ganancia unitaria a frecuencia infinita, está dada por

$$f(t) = A_0 + A_1 t + B e^{-\sigma_3 t} \text{sen}(\omega_3 t + \alpha_3)$$

Demuestre que es una expresión correcta y calcule A_0 , A_1 , B , σ_3 , ω_3 y α_3

Problema 4.20. ¿Qué orden mínimo debe tener un filtro Butterworth pasa bajos para que la ganancia a $\omega = 1,5 \omega_c$ sea menor o igual que 0.4? (ω_c es la frecuencia de corte)

Problema 4.21. Considere un filtro Butterworth pasa banda de orden 8, frecuencias de corte $\omega_{c1} = 8000$ [rad/s] y $\omega_{c2} = 12500$ [rad/s] ¿Qué ganancia (aproximadamente) tiene el filtro a $\omega = 12000$ [rad/s]?

Problema 4.22. Determine el polinomio Butterworth de 3^r orden para un filtro pasabajos de $\omega_c = 1200$ [rad/s].

Problema 4.23. Dibuje aproximadamente la característica $|H(j\omega)|$ para un filtro Butterworth pasabanda con $\omega_o = 1000$ [rad/s], y $Q = 10$, para órdenes 2 y 3.

Problema 4.24. Calcule el orden mínimo de un filtro Butterworth pasabajos para que a $\omega = 2\omega_c$, la atenuación sea de un

$$\text{a) } 80\% \quad \text{b) } 96\% \quad (4.261)$$

Problema 4.25. Determine los modos naturales dominantes de un filtro Butterworth pasabajos de noveno orden

Problema 4.26. Diseñe un filtro pasa altos con frecuencia de corte $\omega_c = 10$ [Krad/s]. Se requiere además que a $\omega = 5$ [Krad/s], la ganancia del filtro sea a lo sumo igual a 0,1

4.26.1 Calcule la función de transferencia del filtro pasa altos $H(s)$

4.26.2 Proponga una configuración basada en FAU's y filtros de primer orden si es necesario, indicando claramente configuraciones y conexiones.

4.26.3 Calcule las componentes (R's y C's) de los circuitos que usted propone en el punto anterior.

Problema 4.27. Los modos naturales **dominantes** de un filtro Butterworth pasa bajos de séptimo orden y frecuencia de corte normalizada igual a 1, tienen la forma

$$Ae^{-\alpha_7 t} \cos(\omega_7 t + \alpha)$$

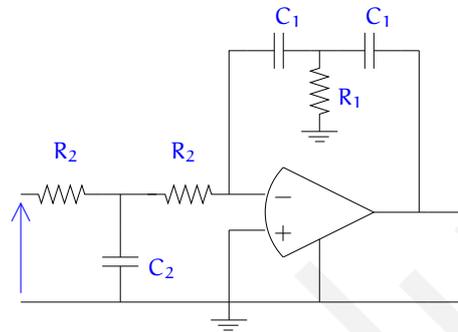
4.27.1 (10pts.) Calcule α_7 y ω_7

4.27.2 (10pts.) Repita el cálculo si la frecuencia de corte es 1000 [rad/s].

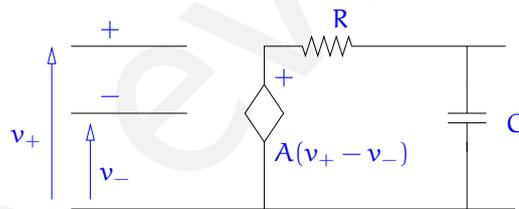
Problema 4.28. Calcule $|H(j\omega)|$ para un filtro pasa banda Butterworth de orden 16 (dieciséis), con frecuencia central $\omega_o = 100$ [rad/s] y ancho de banda $B_w = 10$ [rad/s].

Problema 4.29. Se desea diseñar un filtro pasa banda Butterworth con frecuencias de corte $\omega_{c1} = 900/4$ [rad/s] y $\omega_{c2} = 400$ [rad/s]. Se desea que este filtro tenga, a lo sumo, ganancia igual a 0,4 para $\omega = 200$ [rad/s] y, a lo sumo, ganancia 0,25 para $\omega = 500$ [rad/s]. Calcule el orden mínimo del filtro.

Problema 4.30. ¿Qué tipo de filtro es el de la figura?



Problema 4.31. Un modelo más realista de un amplificador operacional (AO) es el de la figura. Usando ese modelo, explique por qué la realimentación debe hacerse por el terminal negativo del AO, y no por el terminal positivo.



Problema 4.32. Se necesita diseñar un filtro pasa-bajos Chebyshev con frecuencia de corte $f_c = 1000$ [Hz] y $\epsilon \leq 0,3$, de modo que a una frecuencia $f = 2f_c$, la ganancia del filtro sea, como máximo igual a 0.1.

4.32.1 Determine la función de transferencia del filtro de orden mínimo que cumple las especificaciones.

4.32.2 Calcule los modos naturales dominantes del filtro.

4.32.3 Implemente el filtro con amplificadores operacionales, calculando los valores de todas las componentes.

Capítulo 5

REDES DE DOS PUERTAS

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan ejercicios de análisis de redes de dos puertas, también llamadas *cuadripolos*. Estas redes modelan procesamiento de señales y de energía, reconociendo dos puertas: una de entrada y una de salida. El rasgo fundamental de estas redes, es que su análisis se puede realizar exclusivamente en base a una caracterización con cuatro parámetros, con independencia de lo complejas que esas redes pueden ser. El poder de esta filosofía de análisis requiere que la red tenga dos características esenciales: incluya sólo componentes lineales y no incluya fuentes independientes en su interior. Esta última limitación no se aplica a las fuentes controladas, es decir, toda la teoría de cuadripolos es perfectamente aplicable a aquellos que incluyen fuentes controladas, siempre que la cantidad controladora se encuentre en el cuadripolo mismo.

Las herramientas que se requieren para el análisis de los cuadripolos dependen de la naturaleza misma de la red. Sin embargo, para generalizar los resultados, en este capítulo se ha usado la Transformación de Laplace, para caracterizar todos los parámetros y las funciones de red. Por supuesto que si el cuadripolo va a procesar sólo señales sinusoidales, y se encuentra en estado estacionario, entonces sólo bastará operar con transformadas fasoriales.

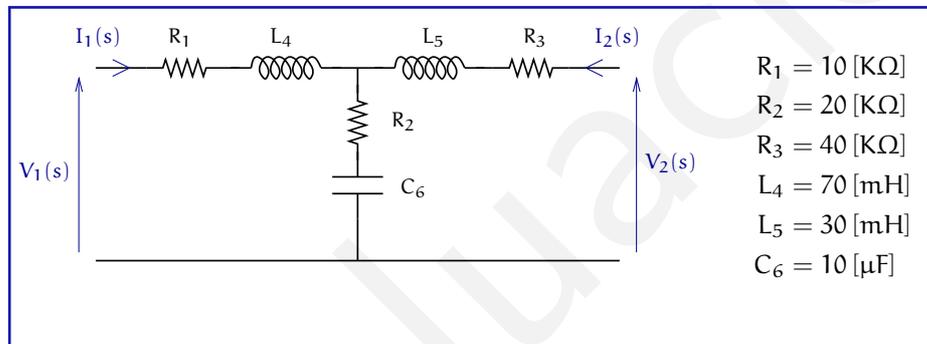
Para entender a cabalidad los problemas desarrollados, el lector debe dominar métodos de análisis de redes y la Transformación de Laplace. Algunos conocimientos básicos de Álgebra de matrices también son necesarios.

5.2. Caracterización de impedancia de circuito abierto.

5.2.1. Cálculo de los parámetros de circuito abierto.

Problema 5.1.

El problema presentado en esta sección permitirá ilustrar el procedimiento general para el cálculo de los parámetros de circuito abierto para una red de dos puertas



Considere la red de la figura. La configuración presentada constituye una red de dos puertas.

5.1.1 Determine la parametrización de circuito abierto $\underline{Z}_{ca}(s)$.

5.1.2 ¿Cuál es la red equivalente a la descripción $\underline{Z}_{ca}(s)$ de la red anterior?

Solución

Las redes expuestas en este capítulo son estudiadas en el dominio de Laplace s , por lo que se insta a revisar previamente el contenido presente en el capítulo 2 de este texto.

Se emplea $\underline{Z}_{ca}(s)$ para definir una matriz de impedancias y $z_{ij}(s)$ para definir cada uno de sus parámetros.

Las redes de dos puertas pueden ser vistas como una caja negra con 4 terminales que comunican su red con el resto del mundo. Su comportamiento se puede definir mediante caracterizaciones que logran definir analíticamente la dinámica impuesta en la red contenida dentro de la caja negra. La figura 5.1 presenta la idea ilustrada en este párrafo.

Una de las caracterizaciones anteriores la constituye la parametrización de circuito abierto o matriz de impedancia $\underline{Z}_{ca}(s)$. La definición de esta parametrización está dada por

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\underline{Z}_{ca}(s)} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

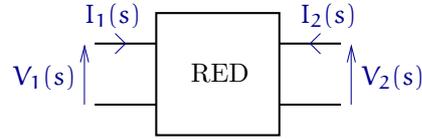


Figura 5.1: Generalización de una red de dos puertas.

El cálculo de cada uno de los términos $z_{ij}(s)$ está definido como

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (5.2)$$

$$z_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (5.3)$$

$$z_{21}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (5.4)$$

$$z_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (5.5)$$

En base a las definiciones expuestas en las ecuaciones (5.2) a (5.5), se procede a calcular la parametrización de circuito abierto de la red de dos puertas entregada en el problema. Así, el parámetro $z_{11}(s)$ puede ser calculado analíticamente considerando sólo la existencia de la corriente $I_1(s)$, haciendo cero la corriente $I_2(s)$. Lo anterior implica que la rama donde se encuentran R_3 y L_5 no interviene en el cálculo de dicho parámetro. En consecuencia, el parámetro $z_{11}(s)$ está dado por

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = R_1 + R_2 + sL_4 + \frac{1}{sC_6} = \frac{7s^2 + 3 \cdot 10^6 s + 10^7}{100s} \quad (5.6)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, el parámetro $z_{22}(s)$ puede ser calculado como

$$z_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = R_3 + R_2 + sL_5 + \frac{1}{sC_6} = \frac{3s^2 + 6 \cdot 10^6 s + 10^7}{100s} \quad (5.7)$$

El resultado expuesto en (5.7) se obtiene en forma inmediata al considerar que la corriente $I_1(s)$ es nula, lo cual conlleva a que la rama izquierda de la red no afecta el cálculo del parámetro $z_{22}(s)$.

Hasta el momento, el cálculo de estos parámetros puede efectuarse mediante simple inspección. Sin embargo, en configuraciones más complejas, el resultado

no es tan evidente. En dichos casos se puede proceder mediante la definición efectuada en forma directa, esto es, considerando una fuente de alimentación conocida (ya sea de tensión o corriente) y encontrando la relación con su variable asociada (tensión o corriente) en función de la variable impuesta por la fuente de alimentación. De esta manera, el cociente dado según (5.2) a (5.5) entregará el resultado correcto.

Por otra parte, para el cálculo de $z_{12}(s)$ y $z_{21}(s)$ se necesita efectuar un análisis más detallado. Según la definición (5.3) y (5.4), las variables que deben ser consideradas en cada cálculo son cruzadas, es decir, no corresponden al cociente entre tensión y corriente de una de las puertas, sino que el cociente considerado toma la tensión de una puerta y la corriente de la puerta opuesta. Así, en el caso de $z_{12}(s)$ se tiene que

$$z_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = R_2 + \frac{1}{sC_6} = \frac{2 \cdot 10^4 (s + 5)}{s} \quad (5.8)$$

En el caso expresado en (5.8), el resultado se obtiene considerando una de las variables impuesta por una fuente de alimentación (en este caso, la corriente $I_2(s)$) y la otra dependiente de la primera (para el caso en estudio, la tensión $V_1(s)$).

Por último, el parámetro $z_{21}(s)$ se obtiene de forma análoga al parámetro $z_{12}(s)$, resultando en

$$z_{21}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = R_2 + \frac{1}{sC_6} = \frac{2 \cdot 10^4 (s + 5)}{s} \quad (5.9)$$

Observe que el resultado dado en (5.9) es el mismo presentado en (5.8). Esta relación no es una casualidad, pues **en una caracterización de circuito abierto, se cumple que $z_{12}(s) = z_{21}(s)$, si la red está conformada sólo por elementos resistivos (R), inductivos (L), capacitivos (C), transformadores ideales (T.I.) e inductancias mutuas (M).**

Ahora bien, dada la representación $Z_{ca}(s)$ para la red descrita, es posible establecer una descripción equivalente mediante una red que exprese en forma general la caracterización de circuito abierto. Para ello, se puede notar que los parámetros $z_{11}(s)$ y $z_{22}(s)$ constituyen funciones racionales en s que pueden ser asumidas como impedancias, en tanto que los parámetros cruzados $z_{12}(s)$ y $z_{21}(s)$ constituyen factores asociados a fuentes de tensión dependientes de corrientes. En consecuencia, y en base a las definiciones de los parámetros de $Z_{ca}(s)$ dadas en (5.2) a (5.5), la caracterización de circuito abierto puede ser descrita mediante la red presentada en la figura 5.2.

Cuando se tiene el caso en que $z_{12}(s) = z_{21}(s)$, entonces la caracterización de circuito abierto puede reducirse a la red presentada en la figura 5.3. El equivalente ilustrado en la figura anterior es conocido como **equivalente T**. En dicha

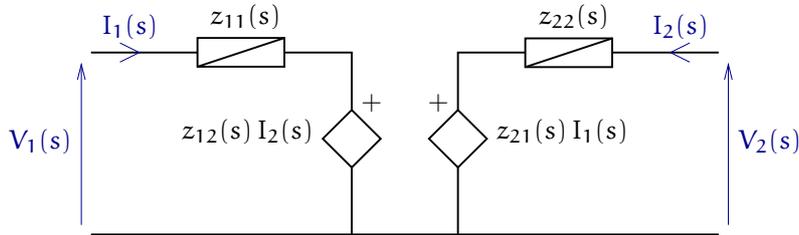


Figura 5.2: Red equivalente en base a la caracterización de circuito abierto.

figura se asume que las equivalencias corresponden a

$$Z_1(s) = z_{11}(s) - z_{12}(s) \quad (5.10)$$

$$Z_2(s) = z_{22}(s) - z_{21}(s) \quad (5.11)$$

$$Z_3(s) = z_{12}(s) = z_{21}(s) \quad (5.12)$$

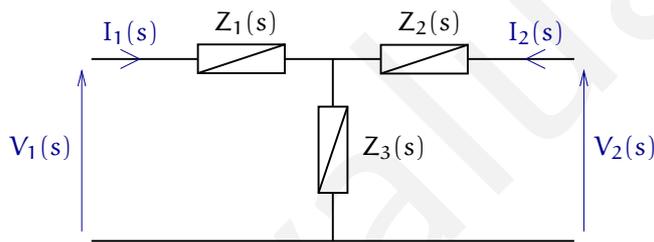


Figura 5.3: Equivalente T para una red de dos puertas conformada por R, L, C, M y T.I.

Errores

El problema propuesto constituye la aplicación del concepto de redes de dos puertas; por ende, los errores más frecuentes en este tipo de ejercicios se asocian a este tópico. A continuación se mencionan los errores más frecuentes.

Error 1 Considerar la igualdad $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ aun cuando la red esté compuesta por fuentes controladas. El resultado dado anteriormente sólo rige para el caso de redes conformadas únicamente por resistores, condensadores, inductores, transformadores ideales e inductancias mutuas.

Error 2 Calcular los parámetros $z_{ij}(s)$ de forma errada, ya sea invirtiendo las relaciones presentadas en (5.2) a (5.5) o bien intercambiando las definiciones efectuadas. Un método para evitar la confusión anterior consiste en recordar que los parámetros en la diagonal constituyen impedancias,

en consecuencia deben relacionar las variables asociadas a una sola puerta; en tanto que los parámetros de la contradiagonal son coeficientes de fuentes dependientes, por lo tanto su definición debe incluir variables de ambas puertas. Además, dada su naturaleza de impedancia, siempre son la división de una tensión (V_1 o V_2) por una corriente (I_1 o I_2).

Error 3 Confundir las transformadas de Laplace para los elementos constitutivos de la red (resistores, condensadores e inductores). Para evitar lo anterior, se sugiere recordar el carácter derivativo de la corriente en el caso de los inductores (asociado a s en el dominio de Laplace) y el carácter integrativo de la corriente en el caso de condensadores (asociado a s^{-1} en el dominio de Laplace).

Error 4 Manipulación errada de los términos asociados a los parámetros $z_{ij}(s)$, tales como errores de arrastre y algebraicos.

Una variante de interés

Consideremos ahora la red de dos puertas anterior a la cual se conecta en su puerta 2 una impedancia de carga $Z_c(s)$. Bajo esta nueva situación, se desea conocer la transferencia $V_2(s)/V_1(s)$ en función de la caracterización de circuito abierto presentada para el problema anterior. La figura 5.4 ilustra gráficamente el problema planteado.

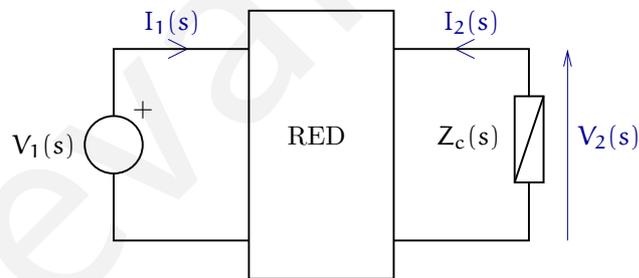


Figura 5.4: Red de dos puertas con impedancia de carga $Z_c(s)$.

De acuerdo a la definición de la red de dos puertas bajo una caracterización de circuito abierto, es posible establecer las siguientes ecuaciones

$$V_1(s) = z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s) \quad (5.13)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s) \quad (5.14)$$

Despejando $I_1(s)$ de (5.13) resulta

$$I_1(s) = \frac{1}{z_{11}(s)} V_1(s) - \frac{z_{12}(s)}{z_{11}(s)} I_2(s) \quad (5.15)$$

Reemplazando el resultado expuesto en (5.15) en (5.14) se obtiene

$$V_2(s) = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} V_1(s) - \frac{z_{12}(s) z_{21}(s)}{z_{11}(s)} I_2(s) + z_{22}(s) I_2(s) \quad (5.16)$$

Pero

$$- \frac{z_{12}(s) z_{21}(s)}{z_{11}(s)} I_2(s) + z_{22}(s) I_2(s) = \frac{\det \underline{Z}_{ca}(s)}{z_{11}(s)} I_2(s) \quad (5.17)$$

El término $\det \underline{Z}_{ca}(s)$ denota el determinante de la matriz impedancia de circuito abierto.

Utilizando (5.17) en conjunto con la igualdad $I_2(s) = -V_2(s)/Z_c(s)$ en (5.16), se obtiene

$$\left(1 + \frac{\det \underline{Z}_{ca}(s)}{z_{11}(s) Z_c(s)}\right) V_2(s) = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} V_1(s) \quad (5.18)$$

Despejando la transferencia $V_2(s)/V_1(s)$ en (5.18) se obtiene

$$\boxed{\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{z_{21}(s) Z_c(s)}{z_{11}(s) Z_c(s) + \det \underline{Z}_{ca}(s)}} \quad (5.19)$$

El resultado presentado en (5.19) es independiente de la topología interna de la red, siempre y cuando se satisfaga que $z_{11}(s) Z_c(s) + \det \underline{Z}_{ca}(s) \neq 0$.

En el caso bajo estudio, la transferencia (5.19) lleva a

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{2(s+5) Z_c(s)}{p(s)} \quad (5.20)$$

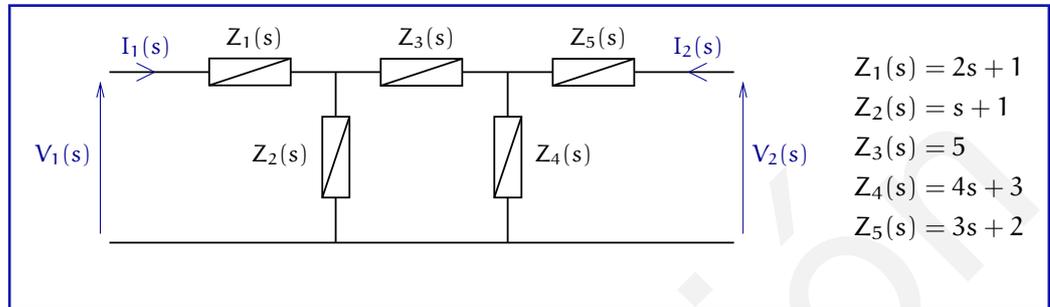
En donde $p(s)$ está definido como

$$p(s) = (7 \cdot 10^{-6} s^2 + 3s + 10) Z_c(s) + 2,1 \cdot 10^{-7} s^3 + 0,51s^2 + 1,4 \cdot 10^5 s + 5 \cdot 10^5 \quad (5.21)$$

5.2.2. Procedimiento general de análisis para la obtención de la caracterización de circuito abierto.

Problema 5.2.

En esta sección se ilustrará un método general para la obtención de la caracterización de circuito abierto cuando la red está compuesta por R, C, L, M y T.I.



Considere la red de la figura, la cual está compuesta únicamente por elementos resistivos e inductivos.

5.2.1 Aplicando el método de mallas, determine la matriz que relaciona las corrientes de mallas con las tensiones de la red.

5.2.2 En base al resultado anterior, determine la caracterización de circuito abierto de la red, $\underline{Z}_{ca}(s)$.

Solución

Dado que la red propuesta está compuesta sólo por elementos inductivos y resistivos, entonces es posible aplicar un método general para la obtención de la caracterización de circuito abierto. La deducción realizada en cuanto a la estructura de la red se puede efectuar mediante una inspección de elementos derivativos (relacionados a la variable s), los cuales están asociados a elementos inductivos; elementos integrativos (asociados a la variable s^{-1}) que se relacionan directamente a elementos capacitivos; y números reales positivos, cuya interpretación corresponde a elementos resistivos. Cabe destacar que todos los coeficientes asociados a las variables en s deben ser mayores a cero para que la afirmación propuesta sea válida.

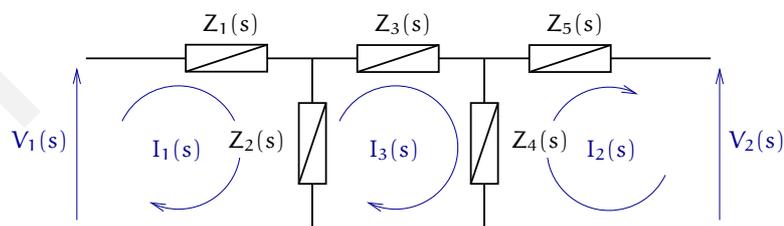


Figura 5.5: Definición de las corrientes de malla en la red propuesta.

Definiendo el sentido de las corrientes tal como se presenta en la figura 5.5, es posible aplicar el método de mallas mediante inspección visual, lo cual lleva

a

$$\begin{bmatrix} 3s+2 & 0 & -s-1 \\ 0 & 7s+5 & 4s+3 \\ -s-1 & 4s+3 & 5s+9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

El método de mallas así aplicado permite obtener en forma directa una matriz que relaciona las tensiones de la red con las corrientes de malla según $\underline{Z}(s)\underline{I}(s) = \underline{V}(s)$.

Ahora bien, para determinar en forma explícita la parametrización de circuito abierto, es necesario aplicar un método general de partición a las matrices conformadas mediante el método de mallas, según

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}(s) & \underline{Z}_{12}(s) \\ \underline{Z}_{21}(s) & \underline{Z}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

En donde se cumple que las dimensiones de las matrices particionadas son:

$$\underline{Z}_{11}(s) \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (5.24)$$

$$\underline{Z}_{12}(s) \in \mathbb{C}^{2 \times (n-2)} \quad (5.25)$$

$$\underline{Z}_{21}(s) \in \mathbb{C}^{(n-2) \times 2} \quad (5.26)$$

$$\underline{Z}_{22}(s) \in \mathbb{C}^{(n-2) \times (n-2)} \quad (5.27)$$

En consecuencia, dada la partición anterior, es posible escribir el siguiente conjunto de ecuaciones matriciales

$$\underline{Z}_{11}(s) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} + \underline{Z}_{12}(s) \begin{bmatrix} I_3(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\underline{Z}_{21}(s) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} + \underline{Z}_{22}(s) \begin{bmatrix} I_3(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$(5.30)$$

Despejando las corrientes de malla $I_3(s)$ a $I_n(s)$ de la ecuación (5.29), se obtiene

$$\begin{bmatrix} I_3(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = -\underline{Z}_{22}(s)^{-1} \underline{Z}_{21}(s) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

El resultado presentado en (5.31) puede efectuarse, dado que la dimensión de $\underline{Z}_{22}(s)$ permite su inversión, siempre y cuando esta matriz sea no singular.

Reemplazando el resultado expuesto en la expresión (5.31) en (5.28) y agrupando términos, resulta

$$\left(\underline{Z}_{11}(s) - \underline{Z}_{12}(s)\underline{Z}_{22}(s)^{-1}\underline{Z}_{21}(s) \right) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Por lo tanto, la caracterización de circuito abierto para la expresión (5.32) está dada por

$$\underline{Z}_{ca}(s) = \underline{Z}_{11}(s) - \underline{Z}_{12}(s)\underline{Z}_{22}(s)^{-1}\underline{Z}_{21}(s) \quad (5.33)$$

Retomando el problema principal y empleando la expresión (5.23) para particionar a (5.22), se obtiene

$$\begin{bmatrix} 3s+2 & 0 & -s-1 \\ 0 & 7s+5 & 4s+3 \\ -s-1 & 4s+3 & 5s+9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

De donde es posible deducir que

$$\underline{Z}_{11}(s) = \begin{bmatrix} 3s+2 & 0 \\ 0 & 7s+5 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\underline{Z}_{12}(s) = \begin{bmatrix} -s-1 \\ 4s+3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\underline{Z}_{21}(s) = [-s-1 \quad 4s+3] \quad (5.37)$$

$$\underline{Z}_{22}(s) = 5s+9 \quad (5.38)$$

Empleando las ecuaciones (5.35) a (5.38) en (5.33), se obtiene la parametrización de circuito abierto de la red propuesta, la cual corresponde a

$$\underline{Z}_{ca}(s) = \frac{1}{5s+9} \begin{bmatrix} 14s^2 + 35s + 17 & (s+1)(4s+3) \\ (s+1)(4s+3) & 19s^2 + 64s + 36 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

El resultado expuesto en (5.39) cumple con la propiedad $z_{12}(s) = z_{21}(s)$, lo cual concuerda con el hecho de que la red presentada cumple con ser conformada únicamente por elementos resistivos e inductivos.

Errores

Los errores asociados a un problema con estas características pueden ser muy diversos, pudiendo encontrar su base tanto en razonamientos conceptuales como en la manipulación algebraica efectuada con las matrices. A continuación, se mencionan los errores más frecuentes.

Error 1 Análisis incorrecto de la red mediante el método de mallas. El estudio propuesto para la red implica que es posible construir la ecuación matricial que da lugar luego de aplicar el método de mallas por simple inspección. Lo anterior considera que es posible determinar en forma inmediata cuáles términos son sumados o restados en cada término de la matriz. Así, por ejemplo, las corrientes definidas en sentidos opuestos y que compartan a un elemento dan lugar a sustracción de términos, en tanto que corrientes en el mismo sentido que comparten un elemento dan lugar a la adición de términos.

Error 2 Partición incorrecta de la matriz deducida a partir del método de mallas. Para evitar el error anterior se debe considerar las dimensiones expuestas en las expresiones (5.24) a (5.27). Bajo la partición antes expuesta es posible conseguir el resultado presentado en (5.33).

Error 3 Obtener una caracterización de circuito abierto que no cumple $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ para el caso de redes conformadas por R, L, C, M y T.I. Dado que las redes analizadas en esta sección no poseen fuentes dependientes, entonces se debe cumplir siempre que $z_{12}(s) = z_{21}(s)$. Si no se cumple lo anterior, entonces existe un error de manipulación algebraica.

Una variante de interés

El mismo problema propuesto podría haberse solucionado considerando una transformación de impedancias como la presentada en el capítulo ???. La transformación adecuada para estos propósitos es la equivalencias de cargas en configuración delta a estrella y de esta forma obtener el equivalente T de la red propuesta. Para lo anterior debe considerarse la nueva red dada por la figura 5.6, en donde las equivalencias corresponden a

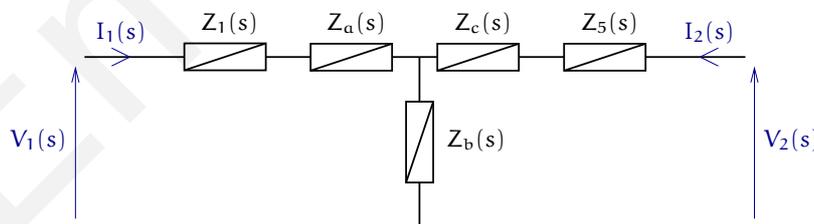


Figura 5.6: Red original transformada a su equivalente con impedancias en configuración estrella.

$$Z_a(s) = \frac{Z_2(s)Z_3(s)}{Z_2(s) + Z_3(s) + Z_4(s)} \quad (5.40)$$

$$Z_b(s) = \frac{Z_2(s)Z_4(s)}{Z_2(s) + Z_3(s) + Z_4(s)} \quad (5.41)$$

$$Z_c(s) = \frac{Z_3(s)Z_4(s)}{Z_2(s) + Z_3(s) + Z_4(s)} \quad (5.42)$$

Reemplazando las expresiones dadas por (5.40) a (5.42) por los términos algebraicos dados al inicio del problema, se obtiene

$$Z_a(s) = \frac{5(s+1)}{5s+9} \quad (5.43)$$

$$Z_b(s) = \frac{(s+1)(4s+3)}{5s+9} \quad (5.44)$$

$$Z_c(s) = \frac{5(4s+3)}{5s+9} \quad (5.45)$$

Se puede apreciar en forma directa que $z_{12}(s) = z_{21}(s) = Z_b(s)$, por lo que el resultado expuesto anteriormente coincide con este segundo acercamiento al problema.

Por otra parte, se aprecia que

$$z_{11}(s) - z_{12}(s) = Z_1(s) + Z_a(s) \quad (5.46)$$

$$z_{22}(s) - z_{21}(s) = Z_5(s) + Z_c(s) \quad (5.47)$$

Despejando $z_{11}(s)$ y $z_{22}(s)$ en (5.46) y (5.47) y considerando que $z_{12}(s) = z_{21}(s) = Z_b(s)$, se obtiene

$$z_{11}(s) = Z_1(s) + Z_a(s) + Z_b(s) = \frac{14s^2 + 35s + 17}{5s + 9} \quad (5.48)$$

$$z_{22}(s) = Z_5(s) + Z_c(s) + Z_b(s) = \frac{19s^2 + 64s + 36}{5s + 9} \quad (5.49)$$

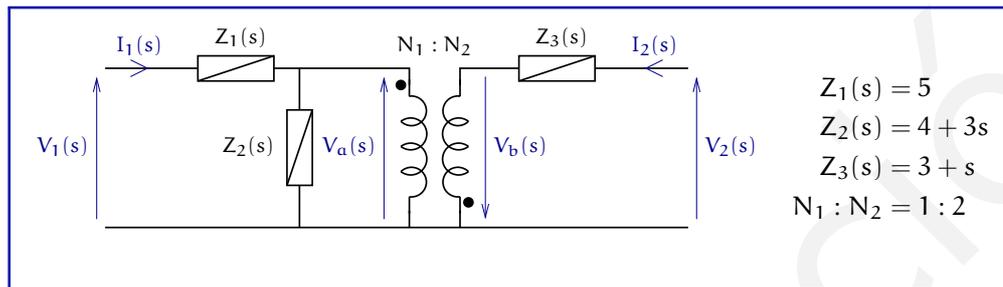
Los resultados dados en (5.48) y (5.49) concuerdan con los resultados entregados previamente, demostrando así la validez de esta alternativa para analizar la red.

5.3. Caracterización de admitancia de cortocircuito.

5.3.1. Cálculo de los parámetros de cortocircuito.

Problema 5.3.

El siguiente problema presentará el procedimiento general para el cálculo de los parámetros de una caracterización de admitancia de cortocircuito.



Considere la red de la figura, conformada sólo por elementos R, L y T.I.

5.3.1 Determine la caracterización de admitancia de cortocircuito.

5.3.2 Expresé la red de dos puertas equivalente a la propuesta en el problema.

Solución

La caracterización de admitancia de cortocircuito, al igual que la caracterización de impedancia de circuito abierto, constituye una forma de representación general para las redes de dos puertas. Así, dada una matriz de admitancia $\underline{Y}_{cc}(s)$, la relación entre las tensiones y corrientes en las puertas estará dada por

$$\underline{I}(s) = \underline{Y}_{cc}(s) \underline{V}(s) \quad (5.50)$$

Que en términos escalares se denota por

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\underline{Y}_{cc}(s)} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

La definición dada en (5.51) puede ser escrita en forma de un sistema de ecuaciones conformada como

$$I_1(s) = y_{11}(s) V_1(s) + y_{12}(s) V_2(s) \quad (5.52)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) V_1(s) + y_{22}(s) V_2(s) \quad (5.53)$$

De la misma forma que en el caso de la caracterización de impedancia, la definición para los parámetros de admitancia $y_{ij}(s)$ están dados por

$$y_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.54)$$

$$y_{12}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} \quad (5.55)$$

$$y_{21}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.56)$$

$$y_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} \quad (5.57)$$

Tal como se puede apreciar en la expresión (5.50), se puede deducir en forma inmediata que la relación entre la caracterización de admitancia y de impedancia está dada por

$$\underline{Y}_{cc}(s) = \underline{Z}_{ca}(s)^{-1} \quad (5.58)$$

Lo que en términos de los parámetros de ambas caracterizaciones se traduce a

$$\underline{Y}_{cc}(s) = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{Z}_{ca}(s))} \begin{bmatrix} z_{22}(s) & -z_{12}(s) \\ -z_{21}(s) & z_{11}(s) \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

La igualdad presentada anteriormente es satisfecha siempre que $\det(\underline{Z}_{ca}(s)) \neq 0$. Lo anterior puede no ser cumplido por ciertas caracterizaciones, llegando en algunos casos a no existir alguna de las descripciones propuestas.

En base a las definiciones anteriores, se procederá al cálculo de los parámetros de cortocircuito de la caracterización de admitancia. Así, para el cálculo de $y_{11}(s)$ se debe cortocircuitar la segunda puerta, forzando así a que $V_2(s) = 0$. El cortocircuito así generado hace que la impedancia $Z_3(s)$ sea vista como una carga desde la primera puerta. Efectuando el reflejo de la impedancia $Z_3(s)$ desde el secundario al primario del T.I. se obtiene

$$Z_{3_{eq}}(s) = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_3(s) \quad (5.60)$$

Lo que conduce a

$$Z_{3_{eq}}(s) = \frac{1}{4} (3 + s) \quad (5.61)$$

En consecuencia, la impedancia equivalente vista desde la primera puerta puede ser descrita como

$$Z_{eq}(s) = Z_1(s) + Z_2(s) // Z_{3_{eq}}(s) = 5 + \frac{1}{4} \frac{(3 + s)(4 + 3s)}{4,75 + 3,25s} = \frac{107 + 78s + 3s^2}{19 + 13s} \quad (5.62)$$

Por lo tanto, la admitancia $y_{11}(s)$ resultante corresponde a

$$y_{11}(s) = \frac{1}{Z_{eq}(s)} = \frac{19 + 13s}{107 + 78s + 3s^2} \quad (5.63)$$

Por otro lado, cuando se procede al cálculo del parámetro $y_{21}(s)$ (o $y_{12}(s)$) debe tenerse en consideración la definición entregada en la expresión (5.55), pues las variables asociadas no corresponden a variables asociadas a una misma puerta, por lo que el desarrollo es inmediato.

Una alternativa para el desarrollo del parámetro $y_{21}(s)$ consiste en suponer una corriente $I_2(s)$ no nula y expresar la tensión $V_1(s)$ en función de la corriente $I_2(s)$.

Sin pérdida de generalidad, se supone una corriente $I_2(s) = 1$, lo cual lleva a que la tensión $V_b(s)$ sea igual a $3 + s$. En consecuencia, la tensión $V_a(s)$ corresponde a

$$V_a(s) = \frac{1}{2}V_b(s) = \frac{1}{2}(3 + s) \quad (5.64)$$

En tanto que la corriente reflejada al primario del transformador estará dada por

$$I_2(s)' = 2I_2(s) = 2 \quad (5.65)$$

En base a la tensión $V_a(s)$, puede calcularse la corriente que circula a través de $Z_2(s)$, la cual está dada por

$$I_{z_2}(s) = \frac{V_a(s)}{Z_2(s)} = \frac{1}{2} \frac{3 + s}{4 + 3s} \quad (5.66)$$

Por lo tanto, la corriente que circula a través de la impedancia $Z_1(s)$ estará dada por

$$I_1(s) = I_{z_2}(s) + I_2(s)' = \frac{1}{2} \frac{3 + s}{4 + 3s} + 2 = \frac{1}{2} \frac{19 + 13s}{4 + 3s} \quad (5.67)$$

La corriente $I_1(s)$ lleva a una tensión en la impedancia $Z_1(s)$ igual a

$$V_{z_1}(s) = I_1(s) Z_1(s) = \frac{5}{2} \frac{19 + 13s}{4 + 3s} \quad (5.68)$$

Finalmente, la tensión $V_1(s)$ estará dada por

$$V_1(s) = V_{z_1}(s) + V_a(s) = \frac{1}{2} \frac{107 + 78s + 3s^2}{4 + 3s} \quad (5.69)$$

Por lo tanto, el parámetro $y_{21}(s)$ está dado por

$$y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{8 + 6s}{107 + 78s + 3s^2} \quad (5.70)$$

Dado que la red está conformada únicamente por elementos resistivos, inductivos, capacitivos, transformadores ideales e inductancias mutuas, se cumple

El signo de la relación entre V_a y V_b está determinado por la orientación relativa de ambas tensiones, y su relación con los puntos de marca.

que $y_{12}(s) = y_{21}(s)$, lo cual se satisface siempre que la red posea estas características.

Por último, el parámetro $y_{22}(s)$ puede ser calculado de forma idéntica que el parámetro $y_{11}(s)$, pero cortocircuitando la primera puerta en vez de la segunda. De esta forma la impedancias $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ quedan en paralelo, lo cual reflejado hacia el secundario origina

$$Z_{z_1//z_2}(s)' = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 Z_1(s) // Z_2(s) = 20 \frac{4+3s}{9+3s} \quad (5.71)$$

Por consiguiente, la impedancia vista desde la segunda puerta está descrita como

$$Z_{eq_2}(s) = Z_3(s) + Z_{z_1//z_2}(s)' = \frac{107 + 78s + 3s^2}{3(3+s)} \quad (5.72)$$

Finalmente, el parámetro $y_{22}(s)$ es calculado como

$$y_{22}(s) = \frac{1}{Z_{eq_2}(s)} = \frac{3(3+s)}{107 + 78s + 3s^2} \quad (5.73)$$

La caracterización de admitancia de cortocircuito para una red de dos puertas se puede representar en forma general como el circuito que se presenta en la figura 5.7, en donde $\alpha(s) = y_{12}(s)V_2(s)$ y $\beta(s) = y_{21}(s)V_1(s)$. Al igual que en la caracterización de impedancia de circuito abierto, los términos en la diagonal de la matriz están asociados directamente a admitancias conectadas en paralelo a la puerta, en tanto que los parámetros de la contradiagonal están asociados a coeficientes de fuentes de corriente dependientes de tensión.

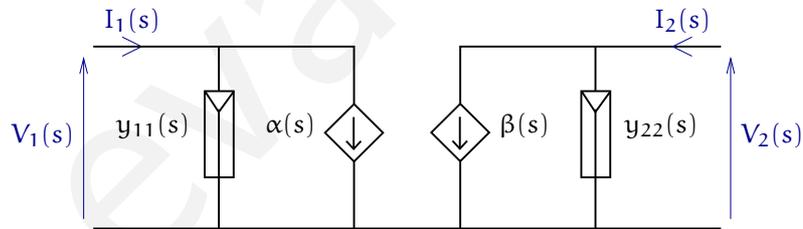


Figura 5.7: Representación general de una red en función de la caracterización de admitancia de cortocircuito.

Una red es recíproca si en su caracterización de impedancia de circuito abierto se cumple que $z_{12}(s) = z_{21}(s)$.

Ahora bien, cuando la red es recíproca la red equivalente se puede simplificar y es posible representar al sistema mediante el circuito presentado en la figura 5.8. A la red presentada en dicha figura se le conoce como el equivalente Pi (Π). En dicha equivalencia se cumple que

$$y_{11}(s) = Y_a(s) + Y_b(s) \quad (5.74)$$

$$y_{12}(s) = y_{21}(s) = -Y_b(s) \quad (5.75)$$

$$y_{21}(s) = Y_b(s) + Y_c(s) \quad (5.76)$$

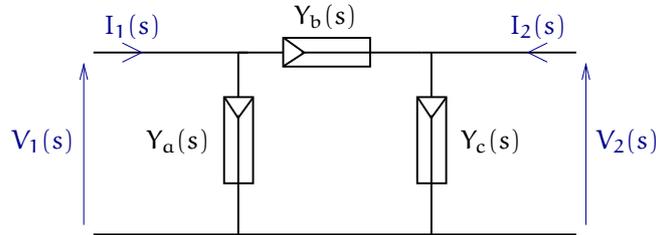


Figura 5.8: Representación de una red en función de sus parámetros de cortocircuito para el caso en que $y_{12}(s) = y_{21}(s)$.

Cabe destacar que es posible trasladar una red equivalente T a equivalente Π mediante una transformación estrella -delta, tal como se ha presentado en el capítulo ??.

Errores

El problema desarrollado en esta sección puede ser fuente de numerosos errores, de forma similar a lo que ocurre con el cálculo de la caracterización de circuito abierto. A continuación se presentan los errores más frecuentes.

Error 1 Transformación incorrecta de impedancias a través del transformador.

Este error es evitado considerando las características básicas de los transformadores ideales (en su definición) y aplicando el razonamiento en forma conceptual mas que algebraica.

Error 2 Confundir $z_{11}(s)$ con $Z_{eq}(s)$ o $z_{22}(s)$ con $Z_{eq2}(s)$. Esta confusión es muy frecuente, dado que en ambos casos se calculan las impedancias equivalentes vistas desde una de las puertas de la red. Sin embargo, el análisis para cada caso es diferente: para el cálculo de $z_{11}(s)$ se abre el circuito en la puerta opuesta haciendo $I_2(s) = 0$, en tanto que el cálculo para $Z_{eq}(s)$ se efectúa considerando un cortocircuito en la puerta opuesta haciendo $V_2(s) = 0$.

Error 3 Calcular los parámetros de cortocircuito como si fuesen parámetros de circuito abierto, es decir, abriendo el circuito en la puerta correspondiente en vez de cortocircuitarlo. En este caso el error se puede evitar recurriendo a la definición de la caracterización de admitancia o de impedancia, los cuales permiten entender con mayor claridad el procedimiento para el cálculo de la representación equivalente para la red de dos puertas.

Error 4 Considerar que $y_{ij}(s) = z_{ij}(s)^{-1}$. La igualdad anterior no se cumple, dado que los parámetros de admitancia no son los recíprocos de los parámetros de impedancia, sino que la matriz de admitancia de cortocircuito es el inverso de la matriz de impedancia de circuito abierto, siempre y cuando esta última caracterización exista.

Una variante de interés

Consideremos que a la red descrita anteriormente se agrega a la segunda puerta una admitancia de carga de valor $Y_c(s)$, tal como se presenta en la figura 5.9. Al igual que en la caracterización de circuito abierto, se desea conocer la transferencia existente entre $V_2(s)$ y $V_1(s)$, esto es, $V_2(s)/V_1(s)$. Para ello, se establecen las ecuaciones definidas por la caracterización de admitancia, esto es

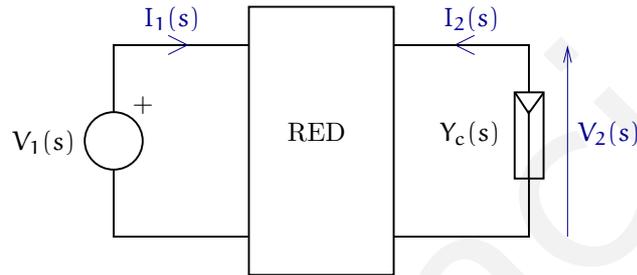


Figura 5.9: Red cargada con una admitancia $Y_c(s)$.

$$I_1(s) = y_{11}(s) V_1(s) + y_{12}(s) V_2(s) \quad (5.77)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) V_1(s) + y_{22}(s) V_2(s) \quad (5.78)$$

Además, se sabe que la ecuación de la carga está descrita como

$$I_2(s) = -Y_c(s) V_2(s) \quad (5.79)$$

Reemplazando (5.79) en (5.78) se obtiene

$$-Y_c(s) V_2(s) = y_{21}(s) V_1(s) + y_{22}(s) V_2(s) \quad (5.80)$$

Finalmente, despejando la transferencia $V_2(s)/V_1(s)$ en (5.80) resulta

$$\boxed{\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s) + Y_c(s)}} \quad (5.81)$$

El resultado para la transferencia solicitada indica que el cociente entre $V_2(s)$ y $V_1(s)$ para una red con una admitancia de carga en la segunda puerta no depende de los parámetros $y_{11}(s)$ e $y_{22}(s)$.

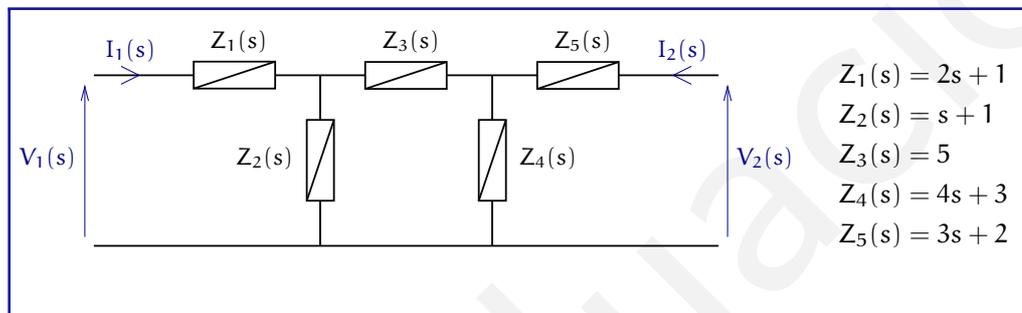
En este caso particular, al reemplazar $y_{21}(s)$ e $y_{22}(s)$ en (5.81), se obtiene

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{8 + 6s}{3(3 + s) + (107 + 78s + 3s^2)Y_c(s)} \quad (5.82)$$

5.3.2. Procedimiento general de análisis para la obtención de la caracterización de cortocircuito.

Problema 5.4.

En esta sección se presentará un procedimiento general de análisis para la obtención de la caracterización de admitancia de cortocircuito para una red conformada únicamente por R, L, C, M y T.I.



La red presentada en la figura precedente corresponde al mismo problema analizado en la sección 5.2.2. La diferencia estará en que esta sección abordará la caracterización de cortocircuito de esta red.

5.4.1 Establezca la ecuación matricial para la red aplicando el método de nodos.

5.4.2 En base al resultado encontrado en el problema anterior, deduzca la caracterización de admitancia de cortocircuito para la red de dos puertas.

Solución

El método nodal (o de nodos) constituye un procedimiento general de análisis de redes eléctricas, que constituye el dual del método de mallas. En este método se procede a definir un nodo de referencia, a partir del cual se definen las tensiones de los nodos restantes. Posteriormente, se enuncian las ecuaciones en base a las ley de corrientes de Kirchoff que dan lugar a un sistema matricial que relaciona las tensiones de referencia con las fuentes independientes de corriente presentes en cada nodo. La figura 5.10 presenta la elección del nodo de referencia y la definición de las tensiones en base a dicha referencia.

Así, por simple inspección, es posible construir la matriz que se obtiene al aplicar el método de nodos a la red tal como se define en la figura 5.10,

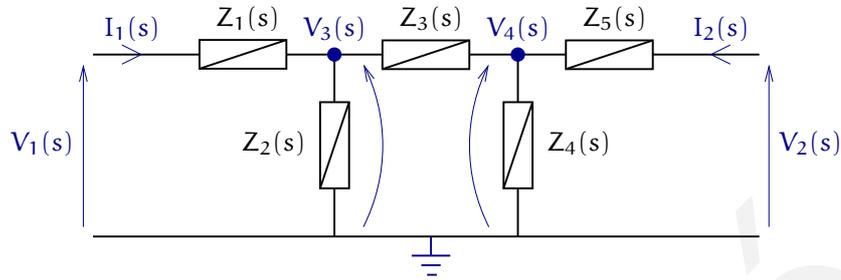


Figura 5.10: Método de nodos aplicado a la red del problema.

obteniéndose

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) & 0 & -Y_1(s) & 0 \\ 0 & Y_5(s) & 0 & -Y_5(s) \\ -Y_1(s) & 0 & Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) & -Y_3(s) \\ 0 & -Y_5(s) & -Y_3(s) & Y_3(s) + Y_4(s) + Y_5(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Las corrientes $I_1(s)$ e $I_2(s)$ se asumen como originadas a partir de fuentes independientes de corriente.

La expresión (5.83) constituye la ecuación matricial resultante de aplicar el método de nodos a la red inicialmente propuesta.

Una vez obtenida la matriz que relaciona las tensiones de referencia con las fuentes independientes de corriente, se procede a particionar el problema aplicando el análisis general dado en la figura 5.11, según

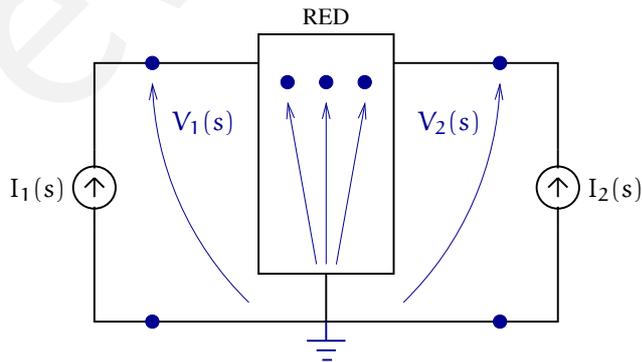


Figura 5.11: Método de nodos aplicado a una red de dos puertas general, que no contiene fuentes independientes de corriente.

$$\boxed{\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}(s) & \underline{Y}_{12}(s) \\ \underline{Y}_{21}(s) & \underline{Y}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (5.84)$$

En donde

$$\underline{Y}_{11}(s) \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (5.85)$$

$$\underline{Y}_{12}(s) \in \mathbb{C}^{2 \times (n-2)} \quad (5.86)$$

$$\underline{Y}_{21}(s) \in \mathbb{C}^{(n-2) \times 2} \quad (5.87)$$

$$\underline{Y}_{22}(s) \in \mathbb{C}^{(n-2) \times (n-2)} \quad (5.88)$$

Efectuando la partición anterior, es posible re-escribir el sistema matricial propuesto en (5.84) como

$$\underline{Y}_{11}(s) \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} + \underline{Y}_{12}(s) \begin{bmatrix} V_3(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

$$\underline{Y}_{21}(s) \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} + \underline{Y}_{22}(s) \begin{bmatrix} V_3(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Despejando el vector $\begin{bmatrix} V_3(s) & \dots & V_n(s) \end{bmatrix}^T$ en la expresión (5.90), se obtiene *Es posible invertir la matriz $\underline{Y}_{22}(s)$ dado que es cuadrada y suponiendo que es no singular para casi todos los s .*

$$\begin{bmatrix} V_3(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \end{bmatrix} = -\underline{Y}_{22}(s)^{-1} \underline{Y}_{21}(s) \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

Finalmente, reemplazando (5.91) en (5.89), se obtiene

$$\boxed{\underbrace{(\underline{Y}_{11}(s) - \underline{Y}_{12}(s)\underline{Y}_{22}(s)^{-1}\underline{Y}_{21}(s))}_{\underline{Y}_{cc}(s)} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}} \quad (5.92)$$

La expresión (5.92) permite calcular en forma inmediata la matriz de admitancia de cortocircuito $\underline{Y}_{cc}(s)$, la cual queda definida como

$$\boxed{\underline{Y}_{cc}(s) = \underline{Y}_{11}(s) - \underline{Y}_{12}(s)\underline{Y}_{22}(s)^{-1}\underline{Y}_{21}(s)} \quad (5.93)$$

El resultado expresado en (5.93) sólo es válido cuando la red de dos puertas está conformada por resistores, inductores, condensadores, inductancias mutuas, transformadores ideales y fuentes controladas.

Aplicando la idea anterior al problema propuesto, se aprecia que las matrices resultantes de la partición son

$$\underline{Y}_{11}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) & 0 \\ 0 & Y_5(s) \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

$$\underline{Y}_{12}(s) = \begin{bmatrix} -Y_1(s) & 0 \\ 0 & -Y_5(s) \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

$$\underline{Y}_{21}(s) = \begin{bmatrix} -Y_1(s) & 0 \\ 0 & -Y_5(s) \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

$$\underline{Y}_{22}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) & -Y_3(s) \\ -Y_3(s) & Y_3(s) + Y_4(s) + Y_5(s) \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (5.92), se obtiene

$$\underline{Y}_{cc}(s) = \frac{1}{\det\{\underline{Y}_{22}(s)\}} \begin{bmatrix} -Y_1(s)^2 \{Y_3(s) + Y_4(s) + Y_5(s)\} + Y_1(s) \det\{\underline{Y}_{22}(s)\} & -Y_1(s)Y_3(s)Y_5(s) \\ -Y_1(s)Y_3(s)Y_5(s) & -Y_5(s)^2 \{Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)\} + Y_5(s) \det\{\underline{Y}_{22}(s)\} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

Finalmente, al efectuar la evaluación numérica de (5.98) en base a los datos entregados, resulta

$$\underline{Y}_{cc}(s) = \frac{1}{50s^3 + 211s^2 + 219s + 67} \begin{bmatrix} 19s^2 + 64s + 36 & -(s+1)(4s+3) \\ -(s+1)(4s+3) & 14s^2 + 35s + 17 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Como se puede apreciar en la expresión (5.99), dado que la red analizada está conformada únicamente por elementos R y L, entonces se satisface que $y_{12}(s) = y_{21}(s)$. Esta última igualdad debe satisfacerse siempre en los casos analizados bajo el supuesto de redes sin fuentes de alimentación.

Errores

El problema analizado en esta sección es fuente común de errores tanto conceptuales como de operatoria algebraica. A continuación se mencionan los errores más frecuentes.

Error 1 Aplicar en forma incorrecta el método de nodos a la red propuesta (por ejemplo, deduciendo en forma errada los términos de la matriz que relaciona las tensiones con las corrientes). Esto puede ser evitado si se considera que el método de nodos basa su idea central en la ley de corrientes de Kirchoff, por lo que la suma orientada de las corrientes en cada nodo debe ser cero.

Error 2 Particionar la matriz desarrollada a través del método de nodos en forma errada. Dicha partición debe ser desarrollada acorde a lo expresado en las relaciones (5.85) a (5.88), por lo que es de importancia mantener las dimensiones correctas en cada una de las particiones a fin de obtener el resultado buscado.

Error 3 Utilizar los valores de impedancias en vez de las admitancias. Este error común ocurre normalmente por no prevenir que el método de nodos ocupa los valores de admitancias (dadas por $Z(s)^{-1}$) en vez de los valores de impedancias ($Z(s)$).

Error 4 Manipulación algebraica errada de las matrices definidas en (5.85)-(5.88). Este error está asociado normalmente a cálculos errados a la hora de efectuar la operatoria de producto entre matrices, o bien en el proceso de inversión de $Y_{22}(s)$. Por ende, es necesario un manejo adecuado del álgebra de matrices.

Una variante de interés

Tal como se presentó en la sección 5.3.1, la caracterización de admitancia de cortocircuito puede calcularse directamente a partir de la caracterización de impedancia, según

$$\underline{Y}_{cc}(s) = \underline{Z}_{ca}(s)^{-1} \quad (5.100)$$

Y dado que en la sección 5.2.2 se calculó la caracterización de impedancia de la red analizada en este problema, resultando en

$$\underline{Z}_{ca}(s) = \frac{1}{5s+9} \begin{bmatrix} 14s^2 + 35s + 17 & (s+1)(4s+3) \\ (s+1)(4s+3) & 19s^2 + 64s + 36 \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

Entonces, es posible calcular la matriz de admitancia para la misma red según

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{cc}(s) &= \underline{Z}_{ca}(s)^{-1} \\ &= \frac{1}{50s^3 + 211s^2 + 219s + 67} \begin{bmatrix} 19s^2 + 64s + 36 & -(s+1)(4s+3) \\ -(s+1)(4s+3) & 14s^2 + 35s + 17 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.102)$$

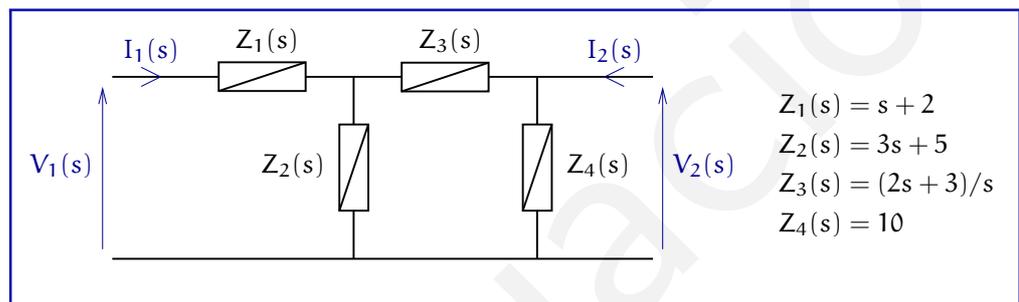
El resultado obtenido en (5.102) es idéntico al resultado obtenido en (5.99), demostrando así la equivalencia entre las caracterizaciones de admitancia e impedancia para una misma red. Vale destacar que esta equivalencia sólo es válida cuando ambas caracterizaciones existen para una misma red, ya que en algunos casos el inverso de una de las matrices puede no existir (dado que su determinante es igual a cero). En consecuencia, es importante recordar que la equivalencia (5.100) sólo tiene sentido si ambas matrices existen.

5.4. Caracterización de parámetros híbridos.

5.4.1. Cálculo de los parámetros híbridos H.

Problema 5.5.

En esta sección se abordará el procedimiento general para la obtención de los parámetros híbridos H.



Considere la red de la figura, compuesta sólo por elementos resistivos, inductivos y capacitivos.

5.5.1 Determine la caracterización de la red mediante sus parámetros híbridos $\underline{H}(s)$.

5.5.2 ¿Cómo se relacionan los parámetros híbridos $\underline{H}(s)$ con la caracterización de impedancia $Z_{ca}(s)$?

5.5.3 ¿Qué condición satisface $\underline{H}(s)$ para una red conformada únicamente por R, L, C, M y T.I.?

5.5.4 ¿Cuál es la red de dos puertas equivalente en función de la matriz $\underline{H}(s)$?

Solución

La caracterización de la red mediante parámetros híbridos H es una forma de representar a la red a través de un enfoque que mezcla las dos caracterizaciones ya analizadas (de impedancia y de admitancia), pues su definición está dada por

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\underline{H}(s)} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

La matriz que relaciona los dos conjuntos de vectores corresponde a la matriz de parámetros híbridos $\underline{H}(s)$. En base a la expresión (5.103) es posible establecer el siguiente sistema de ecuaciones

$$V_1(s) = h_{11}(s)I_1(s) + h_{12}(s)V_2(s) \quad (5.104)$$

$$I_2(s) = h_{21}(s)I_1(s) + h_{22}(s)V_2(s) \quad (5.105)$$

Donde cada parámetro $h_{ij}(s)$ es calculado según

$$h_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.106)$$

$$h_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (5.107)$$

$$h_{21}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.108)$$

$$h_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (5.109)$$

A partir del conjunto de ecuaciones presentado en (5.104) y (5.105) es posible obtener la caracterización de impedancia. Para ello se despeja la variable $V_2(s)$ en (5.105), obteniéndose

$$V_2(s) = -\frac{h_{21}(s)}{h_{22}(s)}I_1(s) + \frac{1}{h_{22}(s)}I_2(s) \quad (5.110)$$

De donde es posible apreciar que

$$z_{21}(s) = -\frac{h_{21}(s)}{h_{22}(s)} \quad (5.111)$$

$$z_{22}(s) = \frac{1}{h_{22}(s)} \quad (5.112)$$

Reemplazando $V_2(s)$ en la ecuación (5.104) se obtiene

$$V_1(s) = \left\{ h_{11}(s) - \frac{h_{12}(s)h_{21}(s)}{h_{22}(s)} \right\} I_1(s) + \frac{h_{12}(s)}{h_{22}(s)} I_2(s) \quad (5.113)$$

A partir de la expresión (5.113) se deduce que

$$z_{11}(s) = h_{11}(s) - \frac{h_{12}(s)h_{21}(s)}{h_{22}(s)} \quad (5.114)$$

$$z_{12}(s) = \frac{h_{12}(s)}{h_{22}(s)} \quad (5.115)$$

Los resultados expuestos en (5.111), (5.112), (5.114) y (5.115) expresan las equivalencias entre la caracterización de parámetros híbridos H y la caracterización de impedancia Z.

Ahora bien, dado que una red conformada por R, L, C, M y T.I. cumple con que $z_{12}(s) = z_{21}(s)$, entonces es posible establecer que

$$\frac{h_{12}(s)}{h_{22}(s)} = -\frac{h_{21}(s)}{h_{22}(s)} \quad (5.116)$$

Lo anterior conduce a que en una red descrita por R, L, C, M y T.I. se debe cumplir que

$$\boxed{h_{12}(s) = -h_{21}(s)} \quad (5.117)$$

La igualdad anterior es satisfecha para una caracterización híbrida de una red conformada por los elementos anteriormente mencionados.

Otro punto importante que se puede destacar a partir de las ecuaciones (5.110) y (5.113) es que **la caracterización de impedancia se obtiene a partir de la caracterización de parámetros híbridos siempre y cuando se cumpla $h_{22}(s) \neq 0$.**

En base a las definiciones entregadas anteriormente, se procede a calcular cada uno de los parámetros asociados a la caracterización híbrida H en la red propuesta.

El parámetro $h_{11}(s)$ puede calcularse como

$$h_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = Z_1(s) + Z_2(s) // Z_3(s) \quad (5.118)$$

Desarrollando (5.118) se obtiene

$$h_{11}(s) = \frac{3s^3 + 19s^2 + 36s + 21}{3s^2 + 7s + 3} \quad (5.119)$$

Por otra parte, el parámetro $h_{12}(s)$ es calculado según

$$h_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (5.120)$$

La definición anterior de dicho parámetro, en este caso, puede asumirse como un divisor de tensiones desde $V_2(s)$ hacia $V_1(s)$, puesto que, como la corriente $I_1(s)$ es igual a cero, entonces la tensión presente en $Z_2(s)$ es igual a la tensión $V_1(s)$, por lo que la ecuación (5.120) lleva a

$$h_{12}(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)} = \frac{s(3s + 5)}{3s^2 + 7s + 3} \quad (5.121)$$

Dado que la red es recíproca, se cumple que

$$h_{21}(s) = -h_{12}(s) = -\frac{s(3s + 5)}{3s^2 + 7s + 3} \quad (5.122)$$

Finalmente, el parámetro $h_{22}(s)$ se calcula según la definición (5.109) que, para el caso en análisis, corresponde a

$$h_{22}(s) = \frac{1}{Z_4(s) // \{Z_2(s) + Z_3(s)\}} \quad (5.123)$$

El desarrollo numérico de (5.123) lleva a

$$h_{22}(s) = \frac{3s^2 + 17s + 3}{10(3s^2 + 7s + 3)} \quad (5.124)$$

Una vez determinados los parámetros de la caracterización híbrida H, es posible obtener una red equivalente a la entregada en el problema en función de dichos parámetros. La figura 5.12 presenta la red de dos puertas equivalente, expresada a través de los parámetros híbridos H. En dicha figura los parámetros $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ corresponden a

$$\alpha(s) = h_{12}(s)V_2(s) \quad (5.125)$$

$$\beta(s) = h_{21}(s)I_1(s) \quad (5.126)$$

Para el caso de esta caracterización, una red recíproca no posee una red equivalente reducida, por lo que todas las redes de dos puertas expresadas a través de sus parámetros híbridos sólo son descritas correctamente por la red de la figura.

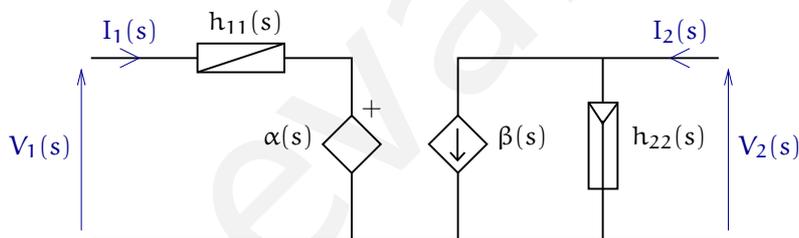


Figura 5.12: Descripción general de una red de dos puertas mediante su caracterización híbrida.

En el caso de la caracterización híbrida, los elementos de la contradiagonal corresponden a coeficientes de fuentes controladas de tensión ($h_{12}(s)$) y de corriente ($h_{21}(s)$).

Errores

El desarrollo de un problema de las características presentadas puede originar errores de diverso tipo, siendo los más frecuentes los que se mencionan a continuación.

Error 1 Aplicar en forma incorrecta las definiciones de los parámetros híbridos $h_{ij}(s)$. Entre los errores más frecuentes se encuentran la inversión de la definición de alguno de los parámetros o suponer tensiones o corrientes nulas cuando en realidad no lo son.

Error 2 Cambiar la orientación de las fuentes controladas en la red equivalente. Este error común puede ser evitado recordando que la orientación de todas las fuentes controladas en cualquier representación sigue la orientación de las tensiones y corrientes en las puertas.

Error 3 Aplicar la igualdad (5.117) a redes que no están conformadas únicamente por R, L, C, M y T.I. En el caso de que la red esté compuesta adicionalmente por fuentes controladas e independientes, no se cumplirá siempre que $h_{12}(s) = -h_{21}(s)$.

Error 4 Manipulación incorrecta de los términos algebraicos. Para evitar errores de arrastre se sugiere mantener el tratamiento simbólico del problema hasta el resultado final, después de lo cual se procede al reemplazo de los términos numéricos y algebraicos respectivos.

Una variante de interés

Consideremos el caso general en el que a la red híbrida se le conecta en su segunda puerta una admitancia de carga $Y_c(s)$, después de lo cual se desea conocer la transferencia $V_2(s)/V_1(s)$ resultante de esta modificación. En términos generales, la transferencia $V_2(s)/V_1(s)$ se modifica en la mayor parte de los casos, pues circulará a través de los terminales de la segunda puerta una corriente $I_2(s)$ no nula. La figura 5.13 ilustra la idea presentada en este párrafo.

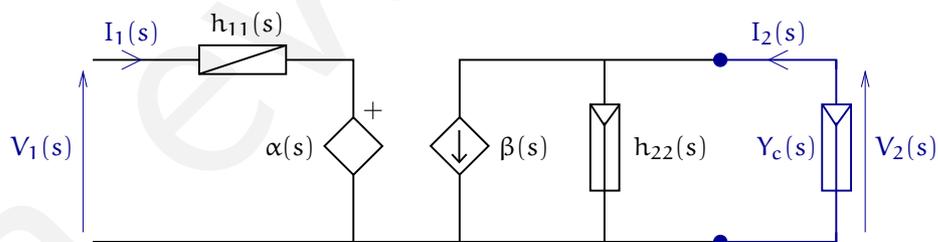


Figura 5.13: Red de dos puertas bajo descrita mediante parámetros híbridos con una admitancia de carga $Y_c(s)$.

Se sabe que la relación entre tensión y corriente en la admitancia $Y_c(s)$ corresponde a

$$I_2(s) = -Y_c(s)V_2(s) \quad (5.127)$$

Reemplazando esta relación en (5.105) se obtiene

$$-Y_c(s)V_2(s) = h_{21}(s)I_1(s) + h_{22}(s)V_2(s) \quad (5.128)$$

Despejando $I_1(s)$ en función de $V_2(s)$ en (5.128), resulta

$$I_1(s) = -\frac{Y_c(s) + h_{22}(s)}{h_{21}(s)} V_2(s) \quad (5.129)$$

Reemplazando la igualdad (5.129) en (5.104), da lugar a

$$V_1(s) = \left\{ -\frac{h_{11}(s)Y_c(s) + h_{11}(s)h_{22}(s)}{h_{21}(s)} + h_{12}(s) \right\} V_2(s) \quad (5.130)$$

En consecuencia, la transferencia $V_2(s)/V_1(s)$ corresponde a

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{h_{11}(s)Y_c(s) + h_{11}(s)h_{22}(s)}{h_{21}(s)} + h_{12}(s) \quad (5.131)$$

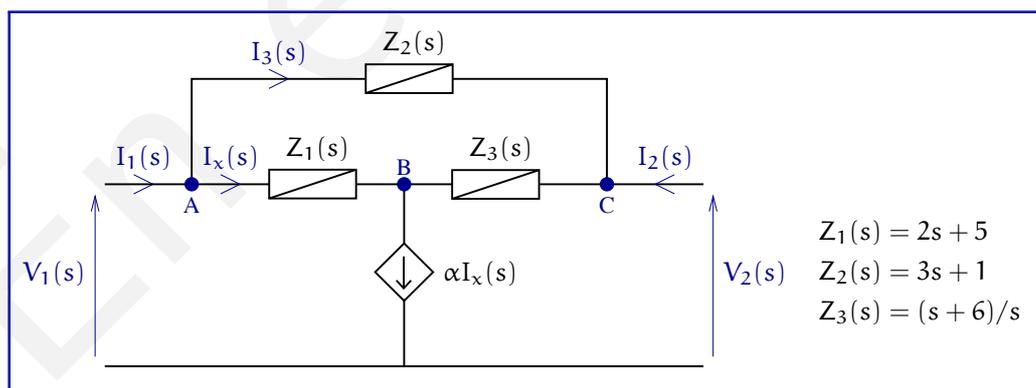
En el caso del problema central de esta sección, la transferencia $V_2(s)/V_1(s)$ corresponde a

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{10Y_c(s)(3s^3 + 19s^2 + 36s + 21) + 3s^3 + 59s^2 + 106s + 21}{10s(3s + 5)} \quad (5.132)$$

5.4.2. Cálculo de los parámetros híbridos G.

Problema 5.6.

En esta sección se ilustra el cálculo de los parámetros híbridos G, los que están relacionados directamente con los parámetros híbridos H analizados en el problema anterior.



Considere la red de la figura, compuesta por elementos resistivos, inductivos, capacitivos y una **fuentes de corriente controlada por corriente**.

5.6.1 Calcule cada uno de los parámetros asociados a la caracterización híbrida G.

5.6.2 Describa la red de dos puertas propuesta mediante la red equivalente en función de los parámetros G.

5.6.3 ¿Cuál es la relación entre la caracterizaciones H y G?

Solución

La caracterización de parámetros híbridos G constituye una segunda manera de parametrizar a la red de dos puertas mediante vectores que están conformados por combinaciones de las tensiones y corrientes de puerta, tal como ocurre en el caso de la caracterización H.

La definición de esta caracterización está dada por

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(s)} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.133)$$

Donde cada parámetro $g_{ij}(s)$ es calculado según

$$g_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (5.134)$$

$$g_{12}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} \quad (5.135)$$

$$g_{21}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (5.136)$$

$$g_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} \quad (5.137)$$

Dada la definición expuesta en (5.133), resulta directo deducir mediante una comparación con la expresión (5.103) que la relación entre las caracterizaciones G y H de una misma red de dos puertas estará dada por

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{H}(s)^{-1} \quad (5.138)$$

La igualdad propuesta en (5.138) es válida sólo **cuando ambas caracterizaciones están bien definidas**, es decir, que no existan parámetros indefinidos y que el inverso de dichas matrices esté bien definido.

Enfocando el análisis a la red propuesta, se tiene que cada uno de los parámetros híbridos $g_{ij}(s)$ pueden ser determinados mediante un cálculo directo de las corrientes y tensiones en la red. Así, para el caso del parámetro $g_{11}(s)$ es necesario efectuar un LCK sobre el nodo B, lo cual resulta en

$$I_3(s) + I_x(s) = \alpha I_x(s) \Rightarrow I_3(s) = (\alpha - 1) I_x(s) \quad (5.139)$$

De manera similar, un LCK sobre el nodo A arroja que

$$I_1(s) = I_3(s) + I_x(s) = \alpha I_x(s) \quad (5.140)$$

En consecuencia, la corriente $I_1(s)$ queda en función de la corriente de control $I_x(s)$. Por lo tanto, es necesario establecer la dependencia de $V_1(s)$ en función de la misma variable. Para ello se establece el siguiente sistema de ecuaciones

$$V_1(s) = Z_1(s) I_x(s) + V_x(s) \quad (5.141)$$

$$V_1(s) = \{Z_2(s) + Z_3(s)\} (\alpha - 1) I_x(s) + V_x(s) \quad (5.142)$$

Reemplazando la igualdad (5.140) en (5.141) y despejando $V_x(s)$, se obtiene

$$V_x(s) = V_1(s) - Z_1(s) \frac{I_1(s)}{\alpha} \quad (5.143)$$

Finalmente, reemplazando (5.143) en (5.142), resulta

$$V_1(s) = \{Z_2(s) + Z_3(s)\} (\alpha - 1) \frac{I_1(s)}{\alpha} + V_1(s) - Z_1(s) \frac{I_1(s)}{\alpha} \quad (5.144)$$

Ahora, despejando en (5.144) la variable $V_1(s)$, se logra

$$V_1(s) = \{Z_2(s) + Z_3(s)\} (\alpha - 1) \frac{I_1(s)}{\alpha} + V_1(s) - Z_1(s) \frac{I_1(s)}{\alpha} \quad (5.145)$$

La ecuación (5.145) conduce a

$$\underbrace{\{Z_2(s) + Z_3(s)\} (\alpha - 1) - Z_1(s)}_{F(s)} \frac{I_1(s)}{\alpha} = 0 \quad (5.146)$$

Dado que la igualdad (5.146) debe cumplirse para todo valor de $F(s)$, entonces la única solución posible para el problema es

$$I_1(s) = 0 \quad (5.147)$$

Lo que necesariamente conduce a que $g_{11}(s) = 0$.

Por otro lado, el parámetro $g_{12}(s)$ se calcula cortocircuitando la puerta 1 y estableciendo el cociente entre las corrientes $I_1(s)$ e $I_2(s)$. Efectuando un LCK sobre el nodo C (y considerando que $I_3(s) = I_1(s) - I_x(s)$) se obtiene

$$I_2(s) = -(I_1(s) - I_x(s)) + (\alpha - 1) I_x(s) = \alpha I_x(s) - I_1(s) \quad (5.148)$$

Por otro lado, efectuando un LCK sobre la malla compuesta por las impedancias $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$, resulta

$$(I_1(s) - I_x(s)) Z_2(s) + (\alpha - 1) I_x(s) Z_3(s) = I_x(s) Z_1(s) \quad (5.149)$$

Despejando $I_x(s)$ en (5.149) resulta en

$$I_x(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s) - (\alpha - 1) Z_3(s)} I_1(s) \quad (5.150)$$

En consecuencia, reemplazando el resultado expuesto en (5.150) en (5.148) se obtiene

$$I_2(s) = \left[\alpha \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s) - (\alpha - 1) Z_3(s)} - 1 \right] I_1(s) \quad (5.151)$$

Por lo tanto, el parámetro $g_{12}(s)$ está dado por

$$g_{12}(s) = \left[\alpha \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s) - (\alpha - 1) Z_3(s)} - 1 \right]^{-1} \quad (5.152)$$

Reemplazando los valores algebraicos entregados en el problema, se obtiene

$$g_{12}(s) = \frac{5s^2 + (7 - \alpha)s + 6(1 - \alpha)}{(3\alpha - 5)s^2 + (2\alpha - 7)s + 6(\alpha - 1)} \quad (5.153)$$

Por otro lado, el parámetro $g_{21}(s)$ se calcula mediante el cociente entre las tensiones de puerta $V_2(s)$ y $V_1(s)$, considerando la corriente $I_2(s)$ nula. Bajo este supuesto, un análisis similar al efectuado con $g_{11}(s)$ lleva a que $g_{21}(s) = 1$, puesto que, dado que $I_2(s) = 0$, obliga a que $I_3(s) = (\alpha - 1) I_x(s)$ cumpliéndose de esta manera la ecuación (5.147).

Finalmente, el parámetro $g_{22}(s)$ se calcula como el cociente entre $V_2(s)$ e $I_2(s)$ considerando la puerta 1 cortocircuitada. Bajo el supuesto anterior, es claro que

$$V_2(s) = - (I_1(s) - I_x(s)) Z_2(s) \quad (5.154)$$

Además, por LVK se cumple que

$$V_2(s) = Z_3(s)(\alpha - 1) I_x(s) - Z_1(s) I_x(s) \quad (5.155)$$

Igualando 5.154 y 5.155 y despejando $I_x(s)$, resulta

$$I_x(s) = - \frac{Z_2(s)}{(\alpha - 1) Z_3(s) - Z_2(s) - Z_1(s)} I_1(s) \quad (5.156)$$

Es posible utilizar la ecuación (5.148) en el cálculo de $g_{22}(s)$ puesto que la red resultante es idéntica a la analizada en el caso de $g_{12}(s)$, en donde esta igualdad es válida.

Tomando la ecuación (5.156) y reemplazándola en (5.148) y (5.154) llevan a que el parámetro $g_{22}(s)$ esté dado por

$$g_{22}(s) = - \frac{[2s^2 + (6 - \alpha)s + 6(1 - \alpha)] (3s + 1)}{(3\alpha - 5)s^2 + (2\alpha - 7)s + 6(\alpha - 1)} \quad (5.157)$$

De los resultados desprendidos en esta sección es necesario destacar lo siguiente

- Los polos de las transferencias (5.153) y (5.157) dependen del valor de α . Esta dependencia incide directamente en la estabilidad de la red analizada, pudiendo incluso presentar modos naturales inestables para ciertos valores de α .
- Si bien los modos naturales son siempre estables en el caso de redes sin fuentes controladas, no ocurre lo mismo en el caso de redes con fuentes controladas, en donde se pueden originar modos naturales inestables.
- Dado que la red estudiada posee una fuente controlada, los elementos de la contradiagonal no cumplen una igualdad específica. Esto último siempre ocurre en el caso de redes conformadas únicamente por elementos resistivos, inductivos, capacitivos, transformadores ideales e inductancias mutuas, cumpliéndose en dicho caso que

$$g_{12}(s) = -g_{21}(s) \quad (5.158)$$

La igualdad (5.158) puede deducirse directamente de la relación entre los parámetros híbridos G y H, considerando las ecuaciones (5.133) y (5.138).

En base a los parámetros G antes calculados, es posible establecer una red equivalente a la presentada originalmente. La figura 5.14 expone la red equivalente en función de los parámetros híbridos $g_{ij}(s)$, en donde

$$\alpha(s) = g_{12}(s) I_2(s) \quad (5.159)$$

$$\beta(s) = g_{21}(s) V_1(s) \quad (5.160)$$

Comparando esta figura con la figura 5.12 se puede apreciar que los parámetros híbridos G corresponden al recíproco de los parámetros híbridos H.

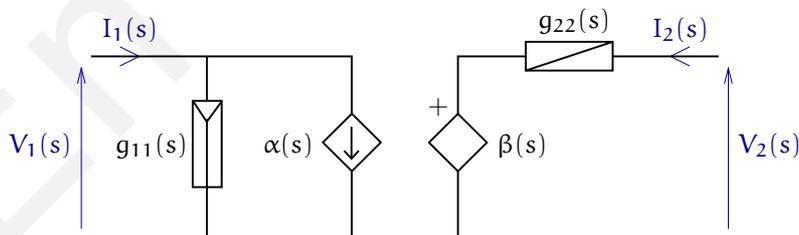


Figura 5.14: Descripción de la red mediante su caracterización híbrida G.

Errores

El problema expuesto en esta sección requiere de un análisis más profundo al efectuado en los problemas anteriores, dado que la red no es recíproca. Por lo tanto, la posibilidad de errores aumenta al considerar un mayor número de ecuaciones y deducciones mediante las leyes de interconexión. A continuación se mencionan los errores más frecuentes.

Error 1 Errores en el planteamiento de las leyes de interconexión (LCK y LVK).

Este error normalmente se asocia a invertir el sentido de las corrientes y establecer diferencias de potencial en sentidos opuestos. En consecuencia, resulta importante mantener un orden al momento de plantear dichas ecuaciones.

Error 2 Deducción incorrecta de los parámetros híbridos \underline{G} , aplicando las definiciones en forma errada (por ejemplo, invirtiendo su orden o las condiciones bajo las cuales se calculan). Esto puede ser solucionado estudiando cuidadosamente las definiciones entregadas en las ecuaciones (5.134) a (5.137).

Error 3 Considerar que la igualdad (5.158) se satisface incondicionalmente para la red estudiada en este problema. Si bien existen algunas redes no recíprocas que cumplen con dicha igualdad, no es posible suponer que será satisfecha para cualquier red no recíproca. Una condición suficiente para cumplir con la igualdad (5.158) es que la red analizada sea recíproca. Dado que en este caso no se cumple esta condición, entonces el supuesto inicial es incorrecto y no es posible aplicar la expresión $g_{12}(s) = -g_{21}(s)$.

Error 4 Aplicar equivalencias en la red de forma tal que la variable de control desaparezca (por ejemplo, a través de movilidad de fuentes). Siempre que se efectúen transformaciones en la red debe tenerse cuidado que la variable de control no desaparezca; si así ocurre, el problema pierde sentido.

Una variante de interés

Consideremos que se desea calcular la caracterización híbrida \underline{H} al mismo problema propuesto. Una alternativa sería considerar la definición de los parámetros híbridos \underline{H} y calcularlos directamente. Sin embargo, dado que se posee la caracterización \underline{G} y se sabe que

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{\det(\underline{G}(s))} \begin{bmatrix} g_{22}(s) & -g_{12}(s) \\ -g_{21}(s) & g_{11}(s) \end{bmatrix} \quad (5.161)$$

Entonces, probando que $\det(\underline{G}(s)) \neq 0$ para casi todo s , entonces es posible calcular la caracterización \underline{H} en base a los cálculos antes efectuados.

En efecto, se sabe que

$$\det(\underline{G}(s)) = -g_{12}(s) = -\frac{5s^2 + (7 - \alpha)s + 6(1 - \alpha)}{(3\alpha - 5)s^2 + (2\alpha - 7)s + 6(\alpha - 1)} \quad (5.162)$$

Que resulta diferente de cero para casi todo s . Por lo tanto, la caracterización H se puede calcular a partir de su recíproco G , lo cual resulta en

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{[2s^2 + (6 - \alpha)s + 6(1 - \alpha)](3s + 1)}{5s^2 + (7 - \alpha)s + 6(1 - \alpha)} & 1 \\ \frac{(3\alpha - 5)s^2 + (2\alpha - 7)s + 6(\alpha - 1)}{5s^2 + (7 - \alpha)s + 6(1 - \alpha)} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.163)$$

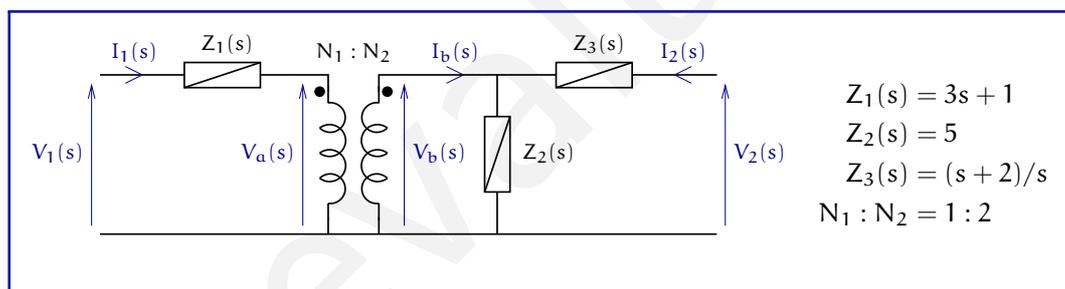
El resultado expuesto en (5.163) corresponde al mismo resultado que se obtendría de analizar la red mediante los parámetros híbridos $h_{ij}(s)$.

5.5. Parámetros de transmisión T.

5.5.1. Cálculo de los parámetros de transmisión T.

Problema 5.7.

En este problema se presentará la última parametrización posible para una red de dos puertas: la parametrización de cadena o transmisión T.



Considere la red de la figura, compuesta por elementos resistivos, inductivos, capacitivos y un transformador ideal.

5.7.1 Calcule cada uno de los parámetros asociados a la caracterización de transmisión T.

5.7.2 ¿Qué condición satisface la caracterización de transmisión cuando la red es **recíproca**?

Solución

Los parámetros de transmisión T constituyen una última forma de caracterizar una red de dos puertas. Su utilidad quedará expuesta en la medida que se desarrolle el presente problema.

Los parámetros de transmisión se definen según

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(s)} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.164)$$

Se debe notar que en el caso de los parámetros B(s) y D(s) existe un signo menos asociado a cada parámetro, dada la definición.

En el que cada parámetro es calculado como

$$A(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (5.165)$$

$$B(s) = - \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.166)$$

$$C(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (5.167)$$

$$D(s) = - \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (5.168)$$

Mediante la aplicación de las definiciones antes expuestas al problema propuesto se podrán obtener cada uno de los parámetros de transmisión T. En el caso del parámetro A(s), este parámetro se calcula efectuando el cociente entre las dos tensiones de puerta, considerando que la corriente en la segunda puerta es nula, lo que implica necesariamente que dicha puerta se encuentra en circuito abierto. en un primer acercamiento al problema, es posible establecer que

$$V_1(s) - Z_1(s)I_1(s) - V_a(s) = 0 \quad (5.169)$$

Pero, dado que $I_2(s) = 0$, entonces se cumple que

$$V_b(s) = V_2(s) \quad (5.170)$$

Además, dada las características del transformador ideal, se satisface también que

$$V_a(s) = \frac{N_1}{N_2} V_b(s) = \frac{N_1}{N_2} V_2(s) \quad (5.171)$$

En tanto que la corriente $I_b(s)$ puede calcularse como

$$I_b(s) = \frac{V_2(s)}{Z_2(s)} \quad (5.172)$$

Lo que conduce a una corriente en el lado a del transformador de

$$I_1(s) = \frac{N_2}{N_1} I_b(s) = \frac{N_2}{N_1} \frac{V_2(s)}{Z_2(s)} \quad (5.173)$$

Reemplazando (5.171) y (5.173) en (5.169), resulta

$$V_1(s) - Z_1(s) \frac{N_2}{N_1} \frac{V_2(s)}{Z_2(s)} - \frac{N_1}{N_2} V_2(s) = 0 \quad (5.174)$$

Efectuando un poco de manipulación algebraica sobre (5.174), se obtiene

$$V_1(s) = \frac{(N_2)^2 Z_1(s) + (N_1)^2 Z_2(s)}{N_1 N_2 Z_2(s)} V_2(s) \quad (5.175)$$

Reemplazando los valores numéricos entregados en la expresión (5.175), se obtiene el parámetro $A(s)$ como

$$A(s) = \frac{6}{5}s + \frac{9}{10} \quad (5.176)$$

De la misma manera es posible calcular el parámetro $C(s)$, el cual corresponde al cociente entre la corriente de la primera puerta y la tensión en la segunda puerta, con la corriente de la segunda puerta igual a 0. En consecuencia, es posible utilizar los mismos resultados expuestos anteriormente. Utilizando la expresión (5.173) en la definición (5.167) se obtiene

$$C(s) = \frac{I_1(s)}{V_2(s)} = \frac{N_2}{N_1} \frac{1}{Z_2(s)} \quad (5.177)$$

El reemplazo numérico en (5.177) resulta en

$$C(s) = \frac{2}{5} \quad (5.178)$$

Por otro lado, los parámetros $B(s)$ y $D(s)$ se calculan bajo el supuesto de que la tensión en la segunda puerta es nula, es decir, se encuentra cortocircuitada. Un primer análisis a la red permite deducir por LVK que

$$V_1(s) - Z_1(s)I_1(s) - V_a(s) = 0 \quad (5.179)$$

El resultado expuesto en (5.179) es idéntico al presentado en (5.169). No obstante, las deducciones posteriores difieren. En efecto, al analizar el lado b del transformador ideal es posible determinar una impedancia equivalente de valor

$$Z_{eq}(s) = Z_2(s) // Z_3(s) \quad (5.180)$$

Reflejando la impedancia hacia el lado a del transformador, resulta en

$$Z_{ref}(s) = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_{eq}(s) \quad (5.181)$$

Por lo tanto, la corriente $I_1(s)$ está dada por

$$I_1(s) = \frac{V_1(s)}{Z_1(s) + Z_{ref}(s)} \quad (5.182)$$

Por otro lado, la tensión $V_b(s)$ puede calcularse según

$$V_b(s) = -I_2(s)Z_3(s) \quad (5.183)$$

Lo que lleva a que la tensión en el lado a del transformador esté dada por

$$V_a(s) = \frac{N_1}{N_2} V_b(s) = -\frac{N_1}{N_2} I_2(s)Z_3(s) \quad (5.184)$$

Reemplazando los resultados expuestos en (5.182) y (5.184) en (5.179) se obtiene

$$V_1(s) - Z_1(s) \frac{V_1(s)}{Z_1(s) + Z_{ref}(s)} + \frac{N_1}{N_2} I_2(s)Z_3(s) = 0 \quad (5.185)$$

Efectuando operatoria algebraica sobre (5.185) resulta

$$V_1(s) = -\frac{N_1}{N_2} \frac{Z_3(s)}{Z_{ref}(s)} (Z_1(s) + Z_{ref}(s)) I_2(s) \quad (5.186)$$

El signo menos que aparece en (5.186) no aparece en (5.187) debido a la definición del parámetro B(s).

Por lo tanto, el parámetro de transmisión B(s) corresponde a

$$B(s) = \frac{N_1}{N_2} \frac{Z_3(s)}{Z_{ref}(s)} (Z_1(s) + Z_{ref}(s)) \quad (5.187)$$

Tomando en consideración para el problema en particular que

$$Z_{eq}(s) = \frac{5(s+2)}{2(3s+1)} \quad (5.188)$$

$$Z_{ref}(s) = \frac{5(s+2)}{8(3s+1)} \quad (5.189)$$

Se tiene que el valor numérico para B(s) está dado por

$$B(s) = \frac{72s^2 + 53s + 18}{10s} \quad (5.190)$$

Aplicando la definición del transformador ideal, se tiene que la corriente en el lado b depende del lado la corriente en el lado a según

$$I_b(s) = \frac{N_1}{N_2} I_a(s) = \frac{N_1}{N_2} I_1(s) \quad (5.191)$$

La dependencia de $I_2(s)$ puede obtenerse mediante un divisor de corrientes, el cual está dado por

$$I_2(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)} I_b(s) \quad (5.192)$$

Reemplazando (5.191) en (5.192) resulta

$$I_2(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)} \frac{N_1}{N_2} I_1(s) \quad (5.193)$$

amente el signo menos
ente en (5.193) ha sido
en (5.194), debido a la
ón del parámetro D(s).

Por lo tanto, el parámetro D(s) está dado por

$$D(s) = \frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_2(s)} \frac{N_2}{N_1} \quad (5.194)$$

Reemplazando los valores numéricos entregados, resulta

$$D(s) = \frac{4(3s + 1)}{5s} \quad (5.195)$$

Un aspecto interesante de resaltar en este problema es que

$$\begin{aligned} A(s)D(s) - B(s)C(s) &= \frac{4(12s + 9)(3s + 1) - 2(72s^2 + 53s + 18)}{50s} \\ &= \frac{2(72s^2 + 78s + 18) - 2(72s^2 + 53s + 18)}{50s} = \frac{50s}{50s} = 1 \end{aligned} \quad (5.196)$$

Este resultado, que puede parecer coincidencia, no lo es: **toda red recíproca (es decir, conformada por R, L, C, M y T.I.) cumplirá siempre que**

$$A(s)D(s) - B(s)C(s) = \det(\underline{T}(s)) = 1 \quad (5.197)$$

La ecuación (5.197) constituye la condición satisfecha por cualquier red recíproca descrita en función de sus parámetros de transmisión T.

Errores

El problema propuesto en esta sección puede originar múltiples errores. A continuación se presentan los errores más frecuentes.

Error 1 Aplicación incorrecta de las definiciones de los parámetros de transmisión (por ejemplo, que se cortocircuite la puerta opuesta cuando se necesita mantener en circuito abierto). Estos errores pueden ser evitados estudiando en detalle las implicancias de las definiciones entregadas para los parámetros T.

Error 2 Deducción incorrecta de las leyes de interconexión. Esto puede ocurrir debido a un mal manejo de las leyes de tensión y corriente (LVK y LCK) o a errores en la deducción de las leyes asociadas a cada componente.

Error 3 Establecer corrientes nulas (o tensiones nulas) cuando éstas no necesariamente lo son (por ejemplo, suponiendo una tensión nula en el transformador). Este error es común cuando se trata de simplificar el problema suponiendo que algunas de las tensiones o corrientes de la red son nulas, aparte de las dadas por las definiciones de los parámetros.

Error 4 Operatoria en la manipulación algebraica de los términos asociados al problema. Se recomienda que el tratamiento del problema sea de forma simbólica hasta la resolución final del problema, en donde se reemplazan los términos simbólicos por sus equivalentes algebraicos.

Una variante de interés

Consideremos ahora que se desean conectar dos redes de dos puertas a las que se conoce su caracterización \mathbb{T} . En particular, supongamos para este caso que se desean conectar en cascada dos cuadripolos cuyas descripciones obedecen a la red propuesta en esta sección. La figura 5.15 ilustra esta conexión. Según dicha figura es posible establecer que

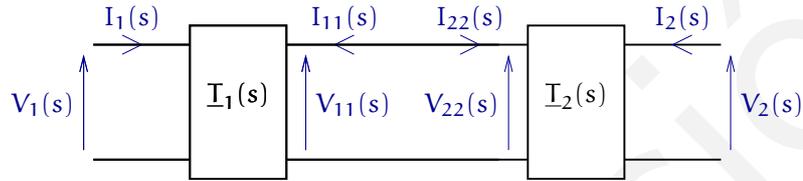


Figura 5.15: Redes de dos puertas conectadas en cascada.

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \mathbb{T}_1(s) \begin{bmatrix} V_{11}(s) \\ -I_{11}(s) \end{bmatrix} \quad (5.198)$$

$$\begin{bmatrix} V_{22}(s) \\ I_{22}(s) \end{bmatrix} = \mathbb{T}_2(s) \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.199)$$

Pero, a partir de la figura 5.15, también es cierto que

$$V_{11}(s) = V_{22}(s) \quad (5.200)$$

$$-I_{11}(s) = I_{22}(s) \quad (5.201)$$

Por lo que es posible re-escribir la expresión como

$$\boxed{\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \mathbb{T}_1(s)\mathbb{T}_2(s) \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}} \quad (5.202)$$

En consecuencia, la caracterización \mathbb{T} equivalente para una conexión en cascada de dos cuadripolos estará dada por

$$\boxed{\mathbb{T}_{eq}(s) = \mathbb{T}_1(s)\mathbb{T}_2(s)} \quad (5.203)$$

El resultado expuesto en (5.203) **se cumple en forma incondicional y es un resultado no conmutativo**, es decir, $\mathbb{T}_1(s)\mathbb{T}_2(s) \neq \mathbb{T}_2(s)\mathbb{T}_1(s)$.

En este caso en particular, supongamos que se disponen de dos redes como las presentadas en el problema de esta sección y cuya caracterización \mathbb{T} está definida

según los cálculos efectuados anteriormente. En consecuencia, una conexión en cascada de estas dos redes dará lugar a

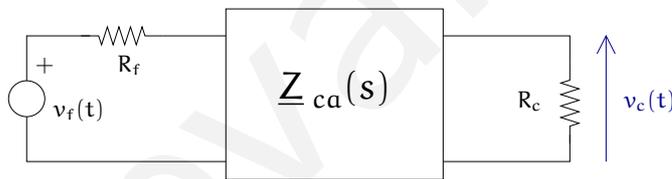
$$\begin{aligned} \underline{I}_{eq}(s) &= \underline{I}(s)\underline{I}(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{144s^3 + 504s^2 + 293s + 72}{100s} & \frac{(72s^2 + 53s + 18)(12s^2 + 33s + 8)}{100s^2} \\ \frac{12s^2 + 33s + 8}{25s} & \frac{72s^3 + 197s^2 + 114s + 16}{25s^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.204)$$

Dado que las redes conectadas en cascada son recíprocas, el resultado expuesto en (5.204) sigue manteniendo la propiedad presentada en (5.197).

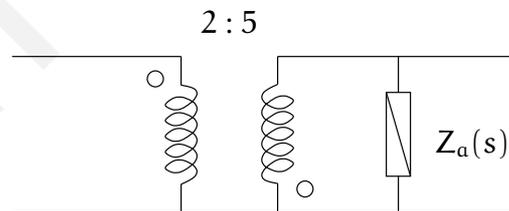
5.6. Ejercicios suplementarios

Problema 5.8 (100 pts.). Calcule $v_c(t)$, suponiendo que las condiciones iniciales son cero, y que $R_f = 2 \text{ } [\Omega]$, $R_c = 1 \text{ } [\Omega]$, $v_f(t) = 20 \text{ } [V]$, $\forall t \geq 0$ y

$$\underline{Z}_{ca}(s) = \begin{bmatrix} 3 + 4s & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$



Problema 5.9. En la red de la figura, calcule la matriz de parámetros de impedancia de circuito abierto.

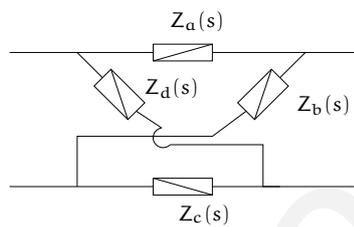


Problema 5.10. Una red de dos puertas tiene la matriz de transmisión dada por

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix}$$

Proponga una red, **sólo con resistores positivos**, si existe, que tenga tal representación.

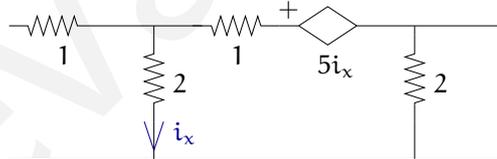
Problema 5.11 (100 pts.). Considere la red de la figura, con $Z_a(s) = 1$, $Z_b(s) = s + 1$, $Z_c(s) = s + 4$, y $Z_d(s) = s$.



5.11.1 Calcule una caracterización paramétrica para la red (escoja usted una que esté bien definida)

5.11.2 Determine cuáles de las otras caracterizaciones paramétricas están bien definidas .

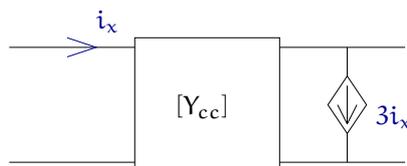
Problema 5.12. Para la red de la figura calcule el parámetro g_{21}



Problema 5.13. En la red de la figura se sabe que

$$Y_{cc}(s) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine la caracterización H para la red completa.

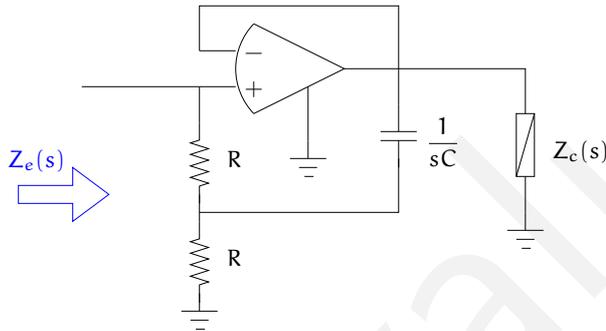


Problema 5.14. Las redes de los dos problemas precedentes se conectan en cascada (elija usted el orden de la conexión). Calcule la matriz de transmisión [T] para el conjunto, si existe.

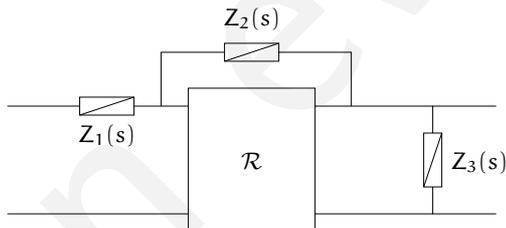
Problema 5.15. De los cuadripolos que se indican, señale qué caracterizaciones paramétricas existen para cada uno de ellos

- Un transformado ideal
- Un amplificador operacional ideal
- Un acoplamiento con inductancias finitas L_1 , L_2 y M

Problema 5.16. Calcule la impedancia de entrada $Z_e(s)$ de la red de la figura, cuando $Z_c(s) \rightarrow \infty$. Comente sobre la utilidad de esta red.



Problema 5.17. Se supone que se conocen todas las caracterizaciones paramétricas de la red de dos puertas \mathcal{R}



Determine una caracterización paramétrica (la que usted estime más conveniente) para el cuadripolo que resulta de agregar las impedancias $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$.

En evaluación

Apéndice A

La transformada de Laplace

A.1. Introducción

En este apéndice se define y estudian las propiedades de la transformada de Laplace, aplicable a funciones arbitrarias de tiempo continuo. También hemos incluido una sección relativa a descomposición en fracciones parciales de funciones racionales, debido a su utilidad para obtener la transformada inversa de diversas funciones. Recomendamos las Referencias [2], [5] y [6].

A.2. Definición de la transformada

Dada una función de tiempo continuo $y(t)$, definida para $0 \leq t < \infty$, entonces su transformada de Laplace $Y(s)$, y su transformada de Laplace inversa están definidas por las ecuaciones:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} y(t) dt \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} Y(s) ds \quad (\text{A.2})$$

Note que en la definición de la transformada *directa* (A.1), el límite inferior de la integral es 0^- , es decir, es el límite por la izquierda:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} y(t) dt = \lim_{|h| \rightarrow 0} \int_{-|h|}^{\infty} e^{-st} y(t) dt \quad (\text{A.3})$$

El par formado por la transformada de Laplace (A.1) y su inversa (A.2) está bien definido, es decir, ambas integrales convergen, si existen $\sigma \in \mathbb{R}$ y una constante

positiva $k < \infty$ tales que:

$$|y(t)| < ke^{\sigma t} \quad ; \forall t \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

es decir, es **suficiente** que $y(t)$ sea de *orden exponencial*.

La condición (A.4) define la región $\Re\{s\} > \sigma$, conocida como **región de convergencia** de la transformada (ver Figura A.1). Dentro de ésta, tenemos que:

$$|y(t)e^{-st}| = |y(t)| |e^{-st}| \leq ke^{\sigma t} \left| e^{-\Re\{s\}t} \right| \left| e^{-j\Im\{s\}t} \right| = ke^{(\sigma - \Re\{s\})t} \quad (\text{A.5})$$

expresión que converge a cero, cuando t tiende a ∞ . Por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)e^{-st} = 0 \quad (\text{A.6})$$

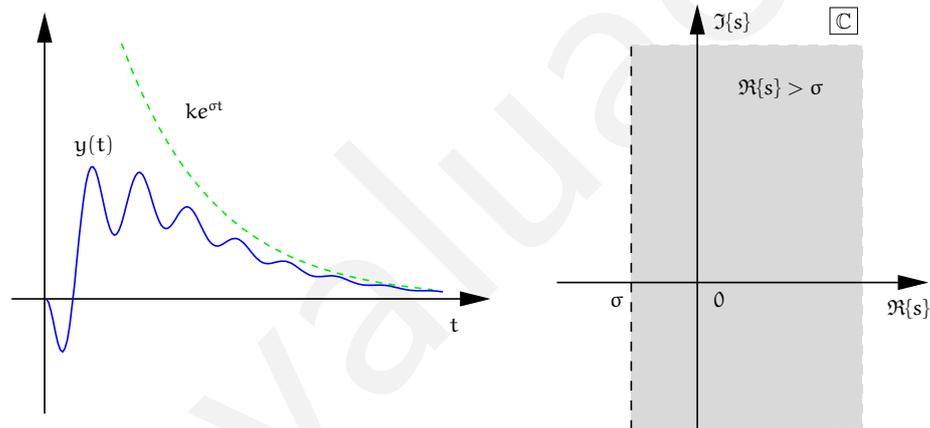


Figura A.1: Función $y(t)$ de orden exponencial y región de convergencia de su transformada de Laplace.

En general, el siguiente lema se refiere al rol de la región de convergencia de la transformada.

Lema A.1. Sea $h(t)$ una función temporal y $H(s)$ su transformada de Laplace, cuya región de convergencia está dada por todos los valores de $s \in \mathbb{C}$, tal que $\Re\{s\} > \sigma$. Entonces, para cualquier z_0 en la región de convergencia, es decir, $\Re\{z_0\} > \sigma$, tenemos que:

$$\int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-z_0 t} dt = \lim_{s \rightarrow z_0} H(s) \quad (\text{A.7})$$

Demostración

De la definición de la transformada de Laplace (A.1) tenemos que, para todo s en la región de convergencia:

$$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.8})$$

Por lo tanto, el resultado es directo, dado que z_0 está en la región de convergencia de la transformada, $\Re\{s\} > \sigma$.

□□□

Ejemplo A.1. Considere la función:

$$y(t) = e^{2t} \quad t \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

La transformada de Laplace de $y(t)$ puede calcularse resolviendo la integral (A.1) o usando MAPLE, con ayuda del paquete `inttrans` que define la transformada de Laplace, su inversa, y otras transformaciones integrales.

MAPLE

```
> y(t):=exp(2*t);
> with(inttrans):
Y(s) := laplace(y(t), t, s);
```

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad (\text{A.10})$$

cuya región de convergencia es $\Re\{s\} > 2$. Ahora, si consideramos la integral:

$$I(z_0) = \int_0^{\infty} e^{-z_0 t} y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-z_0 t} e^{2t} dt \quad (\text{A.11})$$

tenemos que claramente para $z_0 = 3$:

$$I(3) = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{2t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (\text{A.12})$$

que, tal como establece el Lema A.1, coincide con el valor de la transformada en ese punto:

$$\lim_{s \rightarrow 3} Y(s) = Y(3) = \frac{1}{3-2} = 1 \quad (\text{A.13})$$

Sin embargo, si consideramos un punto fuera de la región de convergencia de la transformada de Laplace, por ejemplo $z_0 = 1$, entonces claramente la integral en (A.11) diverge, mientras que $Y(1) = -1$.

□□□

En la sección siguiente, la demostración rigurosa de varias de las propiedades de la transformada de Laplace requiere asegurar la *convergencia uniforme* de las integrales en (A.1)–(A.2), para poder intercambiar, por ejemplo, el orden entre límites e integrales. El lector interesado puede consultar fuentes especializadas (por ejemplo, [5]) donde se establece que, dada la Condición (A.4), la transformada de Laplace converge uniformemente en la región $\Re\{s\} \geq \sigma_u > \sigma$.

A.3. Propiedades

La transformada de Laplace posee una serie de propiedades, que resultan muy útiles en el análisis de señales y respuesta de sistemas a excitaciones. Además, estas mismas propiedades permiten obtener la transformada de ciertas funciones en base las transformadas de otras señales más simples.

A continuación revisamos las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, que se resumen en la Tabla A.1 en la página 264. Además, en la Tabla A.2 en la página 265, aparecen algunas funciones comunes y sus respectivas transformadas de Laplace.

Lema A.2. Linealidad

La transformada de Laplace es un **operador lineal**, es decir, dadas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ funciones definidas en $[0, \infty)$, cuyas transformadas de Laplace son $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$, respectivamente, entonces:

$$\mathcal{L}\{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\} = \alpha Y_1(s) + \beta Y_2(s) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{A.14})$$

Demostración

Esta propiedad surge directamente de la definición de la transformada de Laplace mediante la integral (A.1), y por tanto se deja como ejercicio al lector. $\square\square\square$

Lema A.3. Escalamiento en t

Sea $y(t)$ una función definida en $[0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, y sea α una constante positiva, entonces:

$$\mathcal{L}\{y(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} Y\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad ; \alpha > 0 \quad (\text{A.15})$$

Demostración

Es directa de reemplazar en la definición de la transformada de Laplace (A.1), donde hacemos el cambio de variables $\eta = \alpha t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(\alpha t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} y(\alpha t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} y(\eta) e^{-s \frac{\eta}{\alpha}} \frac{d\eta}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{0^-}^{\infty} y(\eta) e^{-\frac{s}{\alpha} \eta} d\eta = \frac{1}{\alpha} Y\left(\frac{s}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$\square\square\square$

El siguiente corolario es directa consecuencia del lema anterior, por lo que su demostración se deja como ejercicio al lector.

Corolario A.1. Escalamiento en s

Sea $y(t)$ una función definida en $[0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, y sea α una constante real positiva, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\alpha} y\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} = Y(\alpha s) \quad (\text{A.17})$$

$\square\square\square$

Lema A.4. Derivada en t

Sea $y(t)$ una función continua en $(0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, y tal que su derivada es seccionalmente continua, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0^-) \quad (\text{A.18})$$

Demostración

Reemplazando la derivada de $y(t)$ en la definición de la transformada (A.1), e integrando por partes tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = e^{-st}y(t)\Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st}y(t)) - y(0^-) + s\mathcal{L}\{y(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

La Ecuación (A.6) asegura que el primer término en el lado derecho converge a cero, con lo que se obtiene el resultado (A.18). $\square\square\square$

```
MAPLE
> with(inttrans):
  laplace(diff(y(t),t),t,s);
```

La ejecución de este código entrega como resultado:

$$s \text{ laplace}(y(t), t, s) - y(0) \quad (\text{A.20})$$

El Lema A.4 puede aplicarse repetidamente a la n -ésima derivada de $y(t)$ con lo que se obtiene el siguiente resultado.

Corolario A.2. Derivadas en t de orden superior

Sean $y(t)$ y sus primeras $n-1$ derivadas, funciones de orden exponencial (Condición (A.4)) y continuas en $(0, \infty)$, y sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ su transformada de Laplace. Entonces tenemos que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0^-) - \dots - \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0^-} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.21})$$

Demostración

Como hemos mencionado, resulta de aplicar recursivamente el Lema A.4. Por ejemplo, al aplicar dicho resultado a la n -ésima derivada tenemos que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right)\right\} = s\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right\} - \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0^-} \quad (\text{A.22})$$

$\square\square\square$

Este resultado anterior es clave, pues podemos afirmar que:

La transformada de Laplace permite convertir ecuaciones diferenciales, con derivadas en el tiempo t , en ecuaciones algebraicas, en que aparecen polinomios en la variable s , incluyendo las condiciones iniciales de la función $y(t)$ y de sus derivadas.

En el siguiente ejemplo, hemos ilustrado la aplicación de los resultados anteriores junto al uso apropiado de los comandos en MAPLE.

Ejemplo A.2. Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt} = v_a(t) \quad (\text{A.23})$$

Podemos definir esta ecuación en MAPLE y aplicarle transformada de Laplace a ambos lados, utilizando el resultado A.21:

```
MAPLE
> with(inttrans):
edo := diff(theta(t), t, t) + 2*diff(theta(t), t) = v_a(t):
EDO := laplace(edo, t, s);
```

La ejecución de este código entrega como resultado:

$$s^2 \text{laplace}(\theta(t), t, s) - D(\theta)(0) - s\theta(0) + 2s \text{laplace}(\theta(t), t, s) - 2\theta(0) = \text{laplace}(v_a(t), t, s) \quad (\text{A.24})$$

Si ahora definimos las condiciones iniciales $\theta(0^-) = 0$ y $\dot{\theta}(0^-) = 0$, y la entrada como un escalón unitario (función de Heaviside) en $t = 0$, $\mu(t)$, entonces tenemos que:

```
MAPLE
> theta(0):=0 : D(theta)(0):=0 : v_a(t):=Heaviside(t) :
Theta(s):=solve(EDO, laplace(theta(t), t, s));
```

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 + 2s} V_a(s) = \frac{1}{s(s+2)} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2(s+2)} \quad (\text{A.25})$$

donde podemos ahora descomponer en fracciones parciales (véase la Sección A.4) y aplicar transformada de Laplace inversa, con ayuda de la Tabla A.2 en la página 265:

MAPLE

```
> Theta(s):=convert(Theta(s),parfrac,s);
  theta(t):=invlaplace(Theta(s),s,t);
```

$$\Theta(s) = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{2s^2} \quad (\text{A.26})$$

$$\theta(t) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t\right)\mu(t) \quad (\text{A.27})$$

Note que MAPLE no genera el escalón unitario en la solución, sin embargo, lo hemos incluido como forma de enfatizar que la solución es válida **sólo para** $t > 0$.

□□□

Lema A.5. Integral en t

Sea $y(t)$ una función seccionalmente continua en el intervalo $[0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, entonces:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{0^-}^t y(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} Y(s) \quad (\text{A.28})$$

Demostración

Primero definimos la integral de $y(t)$ como otra función:

$$f(t) = \int_{0^-}^t y(\tau) d\tau \quad (\text{A.29})$$

Entonces, si usamos el teorema fundamental del Cálculo [3], y luego aplicamos la transformada de Laplace usando el Lema A.4, se llega a:

$$\frac{df(t)}{dt} = y(t) \quad / \mathcal{L} \{ \} \quad (\text{A.30})$$

$$s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^-) = Y(s) \quad (\text{A.31})$$

a partir de lo cual se obtiene (A.28), ya que, de la Definición (A.29) se deduce que $f(0^-) = 0$.

□□□

Lema A.6. Derivada en s

Sea $y(t)$ una función seccionalmente continua definida en $[0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = -\frac{dY(s)}{ds} \quad (\text{A.32})$$

Demostración

Si reemplazamos $t y(t)$ en la definición (A.1), podemos reescribir la transformada como:

$$\mathcal{L}\{t y(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} t y(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} -\frac{d}{ds} (y(t) e^{-st}) dt \quad (\text{A.33})$$

donde podemos intercambiar el orden entre derivada e integral para obtener:

$$\mathcal{L}\{t y(t)\} = -\frac{d}{ds} \left(\int_{0^-}^{\infty} y(t) e^{-st} dt \right) = -\frac{d Y(s)}{ds} \quad (\text{A.34})$$

□□□

Al igual que en el caso del Lema A.4 en la página 253, para el caso de funciones de la forma $t^n y(t)$ es posible aplicar repetidamente el resultado anterior, lo que da lugar al siguiente corolario.

Corolario A.3. Derivadas en s de orden superior

Sea $y(t)$ una función seccionalmente continua definida en $[0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{t^n y(t)\} = (-1)^n \frac{d^n Y(s)}{ds^n} \quad (\text{A.35})$$

Demostración

Resulta de aplicar repetidamente el Lema A.6, y dejamos los detalles como ejercicio para el lector.

□□□

Ejemplo A.3. Consideremos el caso en que nos interesa obtener la transformada de Laplace de la función $y(t) = t^2$. Según la definición (A.1):

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \int_{0^-}^{\infty} t^2 e^{-st} dt \quad (\text{A.36})$$

Esta integral se puede resolver sin mayores dificultades usando alguna tabla de antiderivadas [3] o aplicando dos veces integración por partes. Sin embargo, si se aplica el Corolario A.3 tenemos:

$$\mathcal{L}\{t^2 \cdot 1\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} (\mathcal{L}\{1\}) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{2}{s^3} \quad (\text{A.37})$$

□□□

En base al Corolario A.3 y siguiendo las líneas del ejemplo es fácil demostrar (por ejemplo, usando el *método de inducción*) la expresión no recursiva para $\mathcal{L}\{t^n\}$ que aparece en la Tabla A.2 en la página 265.

Lema A.7. Desplazamiento en t

Sea $y(t-a)$, en que $a > 0$, la versión desplazada de una función $y(t)$, seccionalmente continua, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, y $\mu(t-a)$ la función escalón unitario también desplazada a la derecha. Entonces:

$$\mathcal{L}\{y(t-a)\mu(t-a)\} = e^{-sa}Y(s) \quad (\text{A.38})$$

Demostración

El resultado se obtiene reemplazando en la definición (A.1):

$$\mathcal{L}\{\mu(t-a)y(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} \mu(t-a)y(t-a)e^{-st} dt = \int_{a^-}^{\infty} y(t-a)e^{-st} dt \quad (\text{A.39})$$

y, haciendo el cambio de variable $\eta = t - a$, tenemos que:

$$\mathcal{L}\{\mu(t-a)y(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} y(\eta)e^{-s(\eta+a)} d\eta = e^{-sa} \underbrace{\int_{0^-}^{\infty} y(\eta)e^{-s\eta} d\eta}_{Y(s)} \quad (\text{A.40})$$

□□□

Una distinción muy importante que se debe tener presente al utilizar el lema anterior es:

$$\mathcal{L}\{y(t-a)\mu(t-a)\} \neq \mathcal{L}\{y(t-a)\mu(t)\} \quad (\text{A.41})$$

Note además que la transformada de Laplace del lado derecho **no puede obtenerse** a partir de la expresión (A.38), sino que debe recurrirse a la definición de la transformada o a otra de sus propiedades.

Ejemplo A.4. Para ver una aplicación del Lema A.7 consideremos la transformada de Laplace de un pulso $p(t)$.

$$p(t) = \begin{cases} 1 & ; \text{si } 0 \leq t < a \\ 0 & ; \text{si } t \geq a \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Esta señal puede reescribirse usando la función de Heaviside o escalón unitario $\mu(t)$, en lugar de definirla por tramos. En base a esa descripción se puede calcular la transformada de Laplace de $p(t)$:

```
MAPLE
> assume(a>0); interface(showassumed=0);
p(t):=piecewise(t<0,0,t<a,1,0);
p(t):=convert(p(t),Heaviside);
P(s):=laplace(p(t),t,s);
```

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

$$p(t) = \text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - a) = \mu(t) - \mu(t - a) \quad (\text{A.44})$$

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-as} = \frac{1 - e^{-sa}}{s} \quad (\text{A.45})$$

□□□

A continuación se presenta otro resultado relacionado con el desplazamiento temporal de una función.

Lema A.8. Función periódica

Consideremos la función periódica:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_T(t - nT) \quad (\text{A.46})$$

en que $y_T(t)$ es igual a una función $f(t)$ dentro del intervalo $[0, T]$ e igual a cero fuera de él, es decir:

$$y_T(t) = (\mu(t) - \mu(t - T))f(t) \quad (\text{A.47})$$

y su transformada de Laplace es $Y_T(s) = \mathcal{L}\{y_T(t)\}$. Entonces la transformada de Laplace de $y(t)$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} Y_T(s) \quad (\text{A.48})$$

Demostración

Para calcular la transformada de Laplace de (A.46) podemos utilizar la linealidad de la transformada y el Lema A.7 sobre desplazamiento temporal:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} Y_T(s) = Y_T(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \quad (\text{A.49})$$

la cual se puede reescribir, recordando la suma de una serie geométrica:

$$Y(s) = Y_T(s) \frac{1 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nTs} \right)}{1 - e^{-sT}} \quad (\text{A.50})$$

Para determinar la región de convergencia de la transformada $Y(s)$, recurrimos a la Condición (A.4) en la página A.4, donde tenemos que:

$$|y(t)| \leq ke^{\sigma t} \quad \text{si} \quad \begin{cases} k \geq \max_{0 \leq t \leq T} |y_T(t)| \\ \sigma \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

La región de convergencia de la transformada es entonces $\Re\{s\} > 0$, y de esta forma podemos afirmar que en la expresión (A.50):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nTs} = 0 \quad (\text{A.52})$$

y por lo tanto, despejando, se obtiene el Resultado (A.48). □□□

Lema A.9. Desplazamiento en s

Sea $y(t)$ una función seccionalmente continua en el intervalo $[0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$. Entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}y(t)\} = Y(s - a) \quad (\text{A.53})$$

Demostración

De la definición de la transformada (A.1), tenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}y(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{at}y(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-(s-a)t} dt = Y(s - a) \quad (\text{A.54})$$

□□□

Lema A.10. Convolución

Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ funciones causales, seccionalmente continuas y cuyas transformadas de Laplace son $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$, respectivamente. Entonces la transformada de la convolución entre ellas está dada por:

$$\mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} = Y_1(s)Y_2(s) \quad (\text{A.55})$$

donde:

$$y_1(t) * y_2(t) = \int_{0^-}^t y_1(\tau)y_2(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.56})$$

Demostración

Dado que las funciones son causales, es decir, iguales a cero para $t < 0$, podemos reescribirlas como:

$$y_1(t) = \mu(t)y_1(t) \quad (\text{A.57})$$

$$y_2(t) = \mu(t)y_2(t) \quad (\text{A.58})$$

donde los escalones unitarios pueden parecer redundantes, sin embargo, de esta forma la Convólución (A.56) puede reescribirse como:

$$y_1(t) * y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)\mu(\tau)y_2(t - \tau)\mu(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.59})$$

Si reemplazamos ahora en la definición de la Transformada (A.1), podemos intercambiar el orden de las integrales:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)\mu(\tau)y_2(t - \tau)\mu(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)\mu(\tau) \left(\int_{0^-}^{\infty} [y_2(t - \tau)\mu(t - \tau)] e^{-st} dt \right) d\tau \quad (\text{A.60}) \end{aligned}$$

donde, aplicando el Lema A.7 de desplazamiento temporal, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) \mu(\tau) e^{-s\tau} Y_2(s) d\tau \\ &= Y_2(s) \int_{0^-}^{\infty} y_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau = Y_2(s) Y_1(s)\end{aligned}\quad (\text{A.61})$$

□□□

Lema A.11. Producto en el tiempo

Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ funciones seccionalmente continuas definidas en $[0, \infty)$, cuyas transformadas de Laplace son $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$, respectivamente. Entonces la transformada del producto entre $y_1(t)$ e $y_2(t)$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{y_1(t)y_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) Y_2(s-\zeta) d\zeta \quad (\text{A.62})$$

Demostración

Si reemplazamos el producto $y_1(t)y_2(t)$ en la definición de la Transformada (A.1), y expresamos una de ellas como la transformada inversa de su transformada de Laplace, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_1(t)y_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} y_1(t)y_2(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta \right) y_2(t) e^{-st} dt\end{aligned}\quad (\text{A.63})$$

donde, tras intercambiar el orden de las integrales y tras aplicar el Lema A.9 de desplazamiento en s , se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_1(t)y_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) \left(\int_{0^-}^{\infty} e^{\zeta t} y_2(t) e^{-st} dt \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) Y_2(s-\zeta) d\zeta\end{aligned}\quad (\text{A.64})$$

El lector puede verificar que, si $\Re\{s\} > \sigma_1$ y $\Re\{s\} > \sigma_2$ son las regiones de convergencia de $y_1(t)$ e $y_2(t)$, entonces la región de convergencia de la Transformada (A.62) es $\Re\{s\} > \sigma_1 + \sigma_2$.

□□□

Finalmente, a continuación se presentan dos importantes resultados que relacionan los comportamientos asintóticos de la función $y(t)$, y su transformada $Y(s)$. Estos se conocen como el teorema del Valor Inicial y teorema del Valor Final.

Teorema A.1. Teorema del Valor Inicial

Sea $y(t)$ una función continua en $(0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, y tal que su derivada es seccionalmente continua. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) \quad (\text{A.65})$$

Demostración

Consideremos primero el caso en que $y(t)$ es continua en $t = 0$, es decir, $y(0^-) = y(0^+) = y(0)$. Si usamos la Ecuación (A.18), tenemos que:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = sY(s) - y(0^-) = sY(s) - y(0^+) \quad (\text{A.66})$$

Sin embargo, usando la Condición (A.4), la integral del lado izquierdo se puede acotar:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt \leq \int_{0^-}^{\infty} \left| \frac{dy(t)}{dt} \right| e^{-st} dt \leq \int_{0^-}^{\infty} k e^{\sigma t} e^{-st} dt = k \left. \frac{e^{-(s-\sigma)t}}{-s+\sigma} \right|_{0^-}^{\infty} \quad (\text{A.67})$$

donde es claro que, dentro de la región de convergencia $\Re\{s\} > \sigma$, la integral está bien definida, es decir, podemos evaluar en los límites de integración y establecer que:

$$sY(s) - y(0^+) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt \leq \frac{k}{s-\sigma} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{A.68})$$

de donde se obtiene (A.65).

En el caso en que $y(t)$ no es continua en $t = 0$, podemos definir la función:

$$\tilde{y}(t) = y(t) - (y(0^+) - y(0^-)) \mu(t) \quad (\text{A.69})$$

la cual sí es continua en $t = 0$, pues $\tilde{y}(0^-) = y(0^-) = \tilde{y}(0^+)$.

Ahora, si calculamos la transformada de Laplace de la derivada de $\tilde{y}(t)$ se llega a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \right\} &= s\tilde{Y}(s) - \tilde{y}(0^-) = s \left(Y(s) - \frac{y(0^+) - y(0^-)}{s} \right) - y(0^-) \\ &= sY(s) - y(0^+) \quad (\text{A.70}) \end{aligned}$$

Finalmente, de manera idéntica al caso de la derivada de $y(t)$, se demuestra que la transformada de la derivada de $\tilde{y}(t)$ cumple con:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} e^{-st} dt \leq \frac{\tilde{k}}{s-\sigma} \quad (\text{A.71})$$

para algún \tilde{k} , y por lo tanto converge a cero cuando s tiende a infinito, con lo que se obtiene (A.65).

□□□

Teorema A.2. Teorema del Valor Final

Sea $y(t)$ una función definida en $(0, \infty)$, cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, y tal que $y(\infty)$ está bien definida. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (\text{A.72})$$

Demostración

Según el Lema A.4, la transformada de la derivada está dada por la Ecuación (A.18):

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = sY(s) - y(0^-) \quad (\text{A.73})$$

Si consideramos ahora el límite cuando s tiende a cero, en el lado derecho de la igualdad podemos intercambiar el orden con la integral:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt \right) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} \left(\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \right) dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} dt = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \right) - y(0^-) \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Mientras que al lado izquierdo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sY(s) - y(0^-)) = \left(\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \right) - y(0^-) \quad (\text{A.75})$$

Igualando y cancelando los términos $y(0^-)$ se obtiene el resultado en (A.72). $\square\square\square$

Es importante tener presente que los resultados asintóticos en ambos Teoremas A.1 y A.2 son **válidos sólo si los límites involucrados existen**, tanto en el dominio del tiempo como en el de la variable compleja s . Veamos a continuación un ejemplo que ilustra una aplicación errónea del teorema del valor final.

Ejemplo A.5. La transformada de Laplace de $\cos(\omega_0 t)$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (\text{A.76})$$

De acuerdo al teorema del valor final, utilizando la Ecuación (A.72), tenemos que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \right) = 0 \quad (\text{A.77})$$

Sin embargo, es claro que $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos(\omega_0 t)$ no existe, lo cual deja en evidencia la incorrecta aplicación del teorema del valor final. $\square\square\square$

Otra observación relevante es que, para el caso de un sistema afectado por excitaciones externas o condiciones iniciales distintas de cero, es posible que su respuesta sea discontinua en $t = 0$. El teorema del valor inicial A.1 permite calcular el valor de la señal en $t = 0^+$ a partir de su transformada de Laplace. Este valor puede ser distinto a la condición inicial dada en $t = 0^-$. Veamos a continuación un ejemplo que ilustra esta situación.

Ejemplo A.6. Consideremos un circuito eléctrico, como el de la Figura A.2, en el que se conecta una fuente de $1[V]$ en $t = 0$, y donde todas las condiciones iniciales son cero.

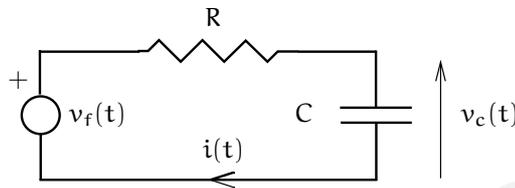


Figura A.2: Circuito RC

Usando la ley de voltajes de Kirchoff tenemos que:

$$v_f(t) = v_R(t) + v_C(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (\text{A.78})$$

Si derivamos a ambos lados, y notamos que la fuente de voltaje equivale a un escalón unitario, tenemos que:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) \quad (\text{A.79})$$

donde, aplicando transformada de Laplace, con condiciones iniciales iguales a cero, obtenemos:

$$s \left(\frac{1}{s} \right) = R [sI(s) - i(0^-)] + \frac{1}{C} I(s) \Rightarrow I(s) = \frac{1}{sR + \frac{1}{C}} \quad (\text{A.80})$$

Si ahora aplicamos el teorema del valor inicial:

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{sR + \frac{1}{C}} = \frac{1}{R} \quad (\text{A.81})$$

que evidentemente es diferente a la corriente inicial $t = 0^-$, que se supuso igual a cero.

□□□

Finalmente, las propiedades de la transformada de Laplace se resumen en la Tabla A.1 en la página siguiente, mientras que la Tabla A.2 en la página 265 muestra algunas funciones comunes y sus respectivas transformadas.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Descripción
$\sum_{i=1}^l a_i y_i(t)$	$\sum_{i=1}^l a_i Y_i(s)$	Linealidad
$y(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} Y\left(\frac{s}{a}\right)$	Escalamiento
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s) - y(0^-)$	Derivada en t
$\frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (k \in \mathbb{N})$	$s^k Y(s) - \sum_{\ell=1}^k s^{k-\ell} \left. \frac{d^{\ell-1} y}{dt^{\ell-1}} \right _{t=0^-}$	Derivada en t de orden superior
$\int_{0^-}^t y(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} Y(s)$	Integral definida
$t y(t)$	$-\frac{dY(s)}{ds}$	Derivada en s
$t^k y(t) \quad (k \in \mathbb{N})$	$(-1)^k \frac{d^k Y(s)}{ds^k}$	Derivada en s de orden superior
$y(t - \tau) \mu(t - \tau)$	$e^{-s\tau} Y(s)$	Desplazamiento en el tiempo t
$e^{at} y(t)$	$Y(s - a)$	Desplazamiento en la variable s
$\int_{0^-}^t y_1(\tau) y_2(t - \tau) d\tau$	$Y_1(s) Y_2(s)$	Convolución de funciones causales
$y_1(t) y_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) Y_2(s - \zeta) d\zeta$	Producto temporal
$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$	Teorema del Valor Final
$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$	Teorema del Valor Inicial

Tabla A.1: Propiedades de la transformada de Laplace.

$f(t) \quad (t \geq 0)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Región de convergencia
$\delta(t)$	1	$\forall s \in \mathbb{C}$
1 (= $\mu(t)$)	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$\mu(t - \tau) \quad (\tau > 0)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{\alpha t} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{s - \alpha}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$t e^{\alpha t} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$\cos(\omega_o t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{\alpha t} \cos(\omega_o t)$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$e^{\alpha t} \text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{\omega_o}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$t \text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{2\omega_o s}{(s^2 + \omega_o^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t \cos(\omega_o t)$	$\frac{s^2 - \omega_o^2}{(s^2 + \omega_o^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\mu(t) - \mu(t - \tau)$	$\frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$	$\forall s \in \mathbb{C}$

Tabla A.2: Transformada de Laplace de algunas funciones simples.

A.4. Descomposición en fracciones parciales

La transformada de Laplace y su inversa están definidas en las ecuaciones (A.1) y (A.2), respectivamente. Sin embargo, la Ecuación (A.2) pocas veces se usa en la práctica para obtener la transformada de Laplace inversa de una función, pues involucra la solución de una integral en el plano complejo, cuyo estudio va más allá del alcance de este texto. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, las Referencias [1] y [5].

La transformada de Laplace a invertir, en la mayoría de los casos que nos interesan, toma la forma:

$$H(s) = \left(\frac{\tilde{b}_n s^n + \tilde{b}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \tilde{b}_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \right) e^{-sT} \quad ; T \geq 0 \quad (\text{A.82})$$

Para encontrar la función temporal $h(t)$ que corresponde a esta función de s , descompondremos (A.82) en una suma de términos más simples. La idea principal es que esos términos correspondan a transformadas de funciones temporales conocidas. Antes de proseguir, podemos hacer dos observaciones sobre la expresión (A.82):

- Según el Lema A.7 en la página 257, la exponencial en s corresponde a un corrimiento en el tiempo.
- Las transformadas *conocidas* que aparecen en la Tabla A.2, con excepción del delta Dirac $\delta(t)$, son estrictamente propias, es decir, el orden del polinomio denominador es mayor que el del numerador.

Por lo tanto, si reescribimos $H(s)$ en la forma:

$$H(s) = \left(\tilde{b}_n + G(s) \right) e^{-sT} \quad (\text{A.83})$$

donde:

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (\text{A.84})$$

entonces, la transformada de Laplace inversa es:

$$h(t) = \delta(t - T) + g(t - T)\mu(t - T) \quad (\text{A.85})$$

En esta expresión, $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Así, hemos reducido el problema de invertir $H(s)$, a uno que exige obtener la transformada de Laplace inversa de una *función racional estrictamente propia*, para lo cual usaremos la descomposición (o expansión) en *fracciones parciales*.

Lema A.12. *Expansión en Fracciones Parciales*

Si factorizamos el polinomio denominador de la función racional (A.84), tenemos que:

$$G(s) = \frac{B(s)}{(s - p_1)^{k_1} \dots (s - p_N)^{k_N}} \quad (\text{A.86})$$

en que $\{p_i \in \mathbb{C}\}$ son los **polos** de $G(s)$, cada uno con multiplicidad k_i , tal que $k_1 + \dots + k_N = n$ es el orden de la función $G(s)$. Entonces, la descomposición (o expansión) en fracciones parciales de $G(s)$, está dada por:

$$G(s) = \left[\frac{K_{11}}{(s-p_1)} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1k_1}}{(s-p_1)^{k_1}} \right] + \dots + \left[\frac{K_{N1}}{(s-p_N)} + \frac{K_{N2}}{(s-p_N)^2} + \dots + \frac{K_{Nk_N}}{(s-p_N)^{k_N}} \right] = \sum_{r=1}^N \sum_{\ell=1}^{k_r} \frac{K_{r\ell}}{(s-p_r)^\ell} \quad (A.87)$$

donde:

$$K_{r\ell} = \frac{1}{(k_r - \ell)!} \left(\frac{d^{k_r - \ell}}{ds^{k_r - \ell}} (s - p_r)^{k_r} G(s) \right) \Big|_{s=p_r} \quad (A.88)$$

Demostración:

Involucra teoría de funciones de variable compleja, en particular, el teorema del residuo, por lo que recomendamos al lector interesado consultar, por ejemplo, las Referencias [1], [5] y [6].

□□□

En algunos casos, para obtener los coeficientes de la expansión en (A.87), en lugar de usar la Ecuación (A.88), puede resultar más simple hacer la suma al lado derecho e igualar los coeficientes del polinomio numerador obtenido con los de $B(s)$ en (A.86). De esta forma, como se ilustra en el Ejemplo A.10 en la página 274, los coeficientes se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones lineal en esos coeficientes.

En la expresión (A.87) aparecen funciones racionales muy simples, cuya transformada de Laplace inversa es fácil de obtener, como establecemos a continuación.

Lema A.13. La transformada de Laplace inversa de la expresión (A.87) está dada por:

$$g(t) = \left(\left[K_{11}e^{p_1 t} + K_{12}te^{p_1 t} + \dots + K_{1k_1} \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} e^{p_1 t} \right] + \dots + \left[K_{N1}e^{p_N t} + K_{N2}te^{p_N t} + \dots + K_{Nk_N} \frac{t^{k_N-1}}{(k_N-1)!} e^{p_N t} \right] \right) \mu(t) = \sum_{r=1}^N \sum_{\ell=1}^{k_r} K_{r\ell} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_r t} \mu(t) \quad (A.89)$$

Demostración

Es directa al considerar el término general de doble sumatoria en (A.87), pues de la Tabla A.2 en la página 265 se tiene que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \iff \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{t^n}{n!} \mu(t) \quad ; n \in \mathbb{N} \quad (A.90)$$

Por lo tanto, reemplazando $n + 1 = \ell$ y aplicando el Lema A.9, que se refiere al corrimiento en la variable s , obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_{r\ell}}{(s - p_r)^\ell} \right\} = K_{r\ell} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_r t} \mu(t) \quad (\text{A.91})$$

y, por linealidad, se obtiene el resultado en (A.89). □□□

Ambos lemas consideran el caso general. Los ejemplos a continuación ilustran la simplicidad del método de expansión en fracciones parciales para obtener transformadas de Laplace inversas.

Ejemplo A.7. Polos simples

Nos interesa obtener la transformada de Laplace inversa de la función:

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^3 + 3s^2 - 4s} \quad (\text{A.92})$$

Factorizando el polinomio denominador se pueden calcular los polos de la función $H(s)$, que se ubican en $s = 0, -4, 1$, todos de multiplicidad 1. Por tanto, usando (A.87), nos interesa descomponerla en la forma:

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s(s + 4)(s - 1)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{21}}{s + 4} + \frac{K_{31}}{s - 1} \quad (\text{A.93})$$

Note que cuando un polo tiene multiplicidad 1, no es necesario calcular derivadas en la Ecuación (A.88), sino que basta simplemente multiplicar $G(s)$ por el factor $(s - p_r)$ y luego reemplazar $s = p_r$. De esta forma calculamos los coeficientes en (A.93):

$$K_{11} = sH(s)|_{s=0} = \frac{2s + 1}{(s + 4)(s - 1)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{-4} \quad (\text{A.94})$$

$$K_{21} = (s + 4)H(s)|_{s=-4} = \frac{2s + 1}{s(s - 1)} \Big|_{s=-4} = \frac{-7}{-4(-5)} = -\frac{7}{20} \quad (\text{A.95})$$

$$K_{31} = (s - 1)H(s)|_{s=1} = \frac{2s + 1}{s(s + 4)} \Big|_{s=1} = \frac{3}{5} \quad (\text{A.96})$$

Con ayuda de la Tabla A.2 se obtiene finalmente:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{s} + \frac{-7}{s + 4} + \frac{3}{s - 1} \right\} = -\frac{1}{4} - \frac{7}{20} e^{-4t} + \frac{3}{5} e^t; \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.97})$$

□□□

MAPLE también es muy útil para obtener tanto la descomposición en fracciones parciales, como la transformada de Laplace inversa de $H(s)$ en el ejemplo anterior.

MAPLE

```
> H(s):=(2*s+1)/(s^3+3*s^2-4*s);
> convert(H(s),parfrac);
> invlaplace(H(s),s,t);
```

A continuación, ilustraremos la expansión en fracciones parciales de una función con polos repetidos.

Ejemplo A.8. Polos repetidos

Consideremos ahora el caso de la función:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad (\text{A.98})$$

Factorizando el denominador, podemos apreciar que posee un único polo en $s = -1$, por tanto nos interesa obtener la expansión (A.87) que en este caso toma la forma:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2}{(s + 1)^3} = \frac{K_{11}}{s + 1} + \frac{K_{12}}{(s + 1)^2} + \frac{K_{13}}{(s + 1)^3} \quad (\text{A.99})$$

Los coeficientes deben obtenerse usando la Ecuación (A.88) en que, a diferencia del Ejemplo A.7, se deben tomar en cuenta las derivadas antes de evaluar en $s = -1$. Comenzamos por el coeficiente del último término en (A.99), que es el más simple de obtener:

$$K_{13} = \frac{1}{0!} [(s + 1)^3 H(s)]_{-1} = [s^2 + 3]_{-1} = 4 \quad (\text{A.100})$$

El siguiente coeficiente se obtiene derivando una vez, y luego evaluando:

$$K_{12} = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{ds} (s + 1)^3 H(s) \right]_{-1} = \left[\frac{d}{ds} (s^2 + 3) \right]_{-1} = [2s]_{-1} = -2 \quad (\text{A.101})$$

Mientras que el coeficiente restante se obtiene derivando nuevamente:

$$K_{11} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s + 1)^3 H(s) \right]_{-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} (2s) \right]_{-1} = 1 \quad (\text{A.102})$$

Por tanto, hemos obtenido:

$$H(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{-2}{(s + 1)^2} + \frac{4}{(s + 1)^3} \quad (\text{A.103})$$

cuya transformada de Laplace inversa es:

$$h(t) = (1 - 2t + 2t^2) e^{-t}; \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.104})$$

□□□

La descomposición en fracciones parciales que aparece en el Lema A.12 en la página 266 es aplicable independientemente de la naturaleza de los polos de $G(s)$, reales o complejos. Podemos notar sin embargo que, en el caso de polos complejos, los coeficientes obtenidos mediante la Ecuación (A.88) también son complejos. A pesar de lo anterior, el siguiente resultado garantiza que las transformadas de Laplace inversas obtenidas en este caso son funciones del tiempo reales.

Lema A.14. *Sea $G(s)$ una función racional estrictamente propia (con coeficientes reales) cuya descomposición en fracciones parciales está dada por el Lema A.12. Entonces:*

- *Los coeficientes correspondientes a polos complejos aparecen en pares complejos conjugados.*
- *La transformada de Laplace inversa de $G(s)$ siempre es una función real.*

Demostración

El teorema fundamental del Álgebra [4] asegura que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales (el denominador $A(s)$, en este caso) aparecen siempre en pares complejos conjugados, es decir, si $p = \alpha + j\beta$, $\beta \neq 0$, es un polo de $G(s)$ con multiplicidad k , entonces $p^* = \alpha - j\beta$ también lo es, y con la misma multiplicidad. Por lo tanto, el(los) coeficiente(s) (A.88) correspondiente(s) a p^* está(n) dado(s) por:

$$\begin{aligned} K_\ell &= \frac{1}{(k-\ell)!} \left[\frac{d^{k-\ell}}{ds^{k-\ell}} (s-p^*)^k G(s) \right]_{s=p^*} \\ &= \left(\frac{1}{(k-\ell)!} \left[\frac{d^{k-\ell}}{ds^{k-\ell}} (s-p)^k G(s) \right]_{s=p} \right)^* = K_\ell^* \quad (\text{A.105}) \end{aligned}$$

lo que demuestra la primera parte del Lema.

A partir del Lema A.13 en la página 267, es fácil verificar que la transformada de Laplace inversa de los términos correspondientes a los polos reales de $G(s)$, siempre es una función real. Para el caso de los polos complejos conjugados, sin embargo, aparecerán términos de la forma:

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^k \left(K_\ell \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{pt} + K_\ell^* \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p^*t} \right) \mu(t) \\ &= \sum_{\ell=1}^k \frac{|K_\ell| t^{\ell-1} e^{\alpha t}}{(\ell-1)!} \left(e^{j(\beta t + \angle K_\ell)} + e^{-j(\beta t + \angle K_\ell)} \right) \mu(t) \\ &= \sum_{\ell=1}^k \frac{2|K_\ell| t^{\ell-1} e^{\alpha t}}{(\ell-1)!} \cos(\beta t + \angle K_\ell) \mu(t) \quad (\text{A.106}) \end{aligned}$$

que es una función real del tiempo. □□□

Una forma de re-expresar, en el dominio de la variable s , la Ecuación (A.106) en el lema anterior, para el caso de multiplicidad 1, está dada por:

$$\frac{K}{s-p} + \frac{K^*}{s-p^*} = \frac{2\Re\{K\}s + (-2\Re\{K^*p\})}{s^2 + (-2\Re\{p\})s + |p|^2} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (\text{A.107})$$

donde todos los coeficientes de la función en el extremo derecho de la ecuación anterior son reales. Es decir, podemos evitar coeficientes complejos en la expansión (A.87), agrupando cada polo complejo con su conjugado. El caso de polos complejos múltiples puede ser entendido de manera análoga.

A continuación presentamos un ejemplo, para ilustrar como se puede obtener la transformada de Laplace inversa a partir de la expresión con coeficientes complejos en el extremo izquierdo de (A.107), o bien, a partir de la que aparece en el extremo derecho, que posee sólo coeficientes reales.

Ejemplo A.9. Polos complejos

Nos interesa obtener la transformada de Laplace inversa de la función racional:

$$H(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.108})$$

en que $0 \leq \xi < 1$ es el factor de amortiguación, y $\omega_n > 0$ es la frecuencia de oscilación natural. Los polos de esta función son complejos y se ubican en (véase la Figura A.3):

$$s = -\omega_n\xi \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\omega_n e^{\pm j\alpha} \quad ; \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad (\text{A.109})$$

Solución 1:

La expansión en fracciones parciales (A.87) toma la forma:

$$H(s) = \frac{b_1s + b_0}{(s + \omega_n e^{j\alpha})(s + \omega_n e^{-j\alpha})} = \frac{K_{11}}{s + \omega_n e^{j\alpha}} + \frac{K_{21}}{s + \omega_n e^{-j\alpha}} \quad (\text{A.110})$$

en que los coeficientes (A.88) resultan complejos:

$$K_{11} = [(s + \omega_n e^{j\alpha}) H(s)]_{s=-\omega_n e^{j\alpha}} = \left[\frac{b_1s + b_0}{s + \omega_n e^{-j\alpha}} \right]_{s=-\omega_n e^{j\alpha}} = \frac{-b_1\omega_n e^{j\alpha} + b_0}{-\omega_n 2j \operatorname{sen} \alpha} \quad (\text{A.111})$$

y el lector puede comprobar que $K_{21} = K_{11}^*$, tal como establece el Lema A.14 en la página anterior.

La descomposición en fracciones parciales es entonces:

$$H(s) = \frac{K_{11}}{s + \omega_n e^{j\alpha}} + \frac{K_{11}^*}{s + \omega_n e^{-j\alpha}} \quad (\text{A.112})$$

y, por tanto, la transformada de Laplace inversa está dada por:

$$\begin{aligned} h(t) &= K_{11} e^{-\omega_n e^{j\alpha} t} + K_{11}^* e^{-\omega_n e^{-j\alpha} t} \\ &= |K_{11}| e^{-\omega_n \cos(\alpha)t} \left[e^{j(\angle K_{11} - \omega_n \operatorname{sen}(\alpha)t)} + e^{j(-\angle K_{11} + \omega_n \operatorname{sen}(\alpha)t)} \right] \\ &= 2|K_{11}| e^{-\cos(\alpha)\omega_n t} \cos(\operatorname{sen}(\alpha)\omega_n t - \angle K_{11}) \quad (\text{A.113}) \end{aligned}$$

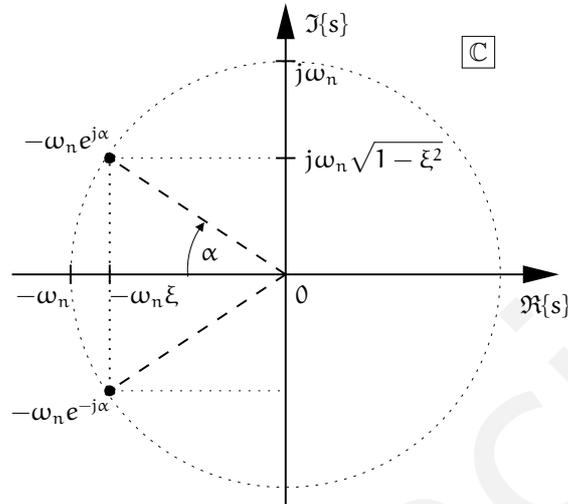


Figura A.3: Polos complejos conjugados, para $\omega_n > 0$ (Ejemplo A.9).

donde:

$$K_{11} = \frac{-b_1 \omega_n (\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha) + b_0}{-\omega_n 2j \operatorname{sen} \alpha} = \frac{b_1}{2} + j \frac{b_0 - b_1 \omega_n \cos \alpha}{2 \omega_n \operatorname{sen} \alpha} \quad (\text{A.114})$$

y, por tanto:

$$|K_{11}| = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_0 - b_1 \omega_n \cos \alpha}{2 \omega_n \operatorname{sen} \alpha}\right)^2} \quad \angle K_{11} = \arctan\left(\frac{b_0 - b_1 \omega_n \cos \alpha}{b_1 \omega_n \operatorname{sen} \alpha}\right) \quad (\text{A.115})$$

Solución 2:

Una forma alternativa de obtener la transformada de Laplace inversa de la función racional en (A.108) es completando el cuadrado en el denominador:

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s + \xi \omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2} \quad (\text{A.116})$$

donde, comparando con las transformadas en la Tabla A.2, vemos que podemos interpretar el denominador, como un corrimiento en s de la transformada de $\cos(\cdot)$ o de $\operatorname{sen}(\cdot)$. De hecho podemos forzar el numerador a tomar la forma de dichas transformadas, y separar términos convenientes:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{b_1(s + \xi\omega_n)}{(s + \xi\omega_n)^2 s + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 s + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} \\
&= b_1 \mathcal{L} \left\{ e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t) \right\} + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 s + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} \\
&= b_1 \mathcal{L} \left\{ e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t) \right\} + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \mathcal{L} \left\{ e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t) \right\}
\end{aligned} \tag{A.117}$$

de donde se obtiene la transformada de Laplace inversa:

$$h(t) = \left(b_1 \cos(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t) + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t) \right) e^{-\xi\omega_n t} \mu(t) \tag{A.118}$$

que el lector puede comprobar que es la misma solución obtenida en (A.113), si notamos en la Figura A.3 que $\cos \alpha = \xi$, y que, por tanto, $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \xi^2}$.

□□□

Con estos ejemplos y un poco de práctica no debiera resultar difícil obtener transformadas de Laplace inversa de funciones racionales. Sin embargo, el *software* científico disponible hoy en día permite obtener la expansión en fracciones parciales de una función racional e incluso directamente su transformada de Laplace inversa.

Sugerimos al lector intentar el comando `residue` de MATLAB, mientras que a continuación mostramos el uso de MAPLE, para el caso del Ejemplo A.9.

```

MAPLE
> interface(showassumed=0);
  assume(omega>0); assume(xi>0); additionally(xi<1);
  assume(b0,real); assume(b1,real);
> H(s):=(b1*s+b0)/(s^2+2*xi*omega*s+omega^2);
  h(t):=evalc(invlaplace(H(s),s,t));

```

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \tag{A.119}$$

$$h(t) = b_1 e^{-\xi\omega t} \cos\left(\sqrt{-\xi^2\omega^2 + \omega^2}t\right) + \frac{(-b_1\xi\omega + b_0) e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}\left(-\sqrt{\xi^2\omega^2 + \omega^2}t\right)}{\sqrt{-\xi^2\omega^2 + \omega^2}} \tag{A.120}$$

Hemos usado el comando `evalc` para simplificar la respuesta que MAPLE entrega para $h(t)$, la que, en ocasiones, parece contener términos complejos. En este

sentido, es importante tener presente que, si bien el uso de *software* ahorra cálculos engorrosos, es fundamental entender e interpretar correctamente los resultados obtenidos.

Como ejemplo final, a continuación ilustramos la descomposición en fracciones parciales de $H(s)$, planteando un sistema de ecuaciones, en lugar de usar la Ecuación (A.88).

Ejemplo A.10. Nos interesa obtener la transformada de Laplace inversa de:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} \quad (\text{A.121})$$

Sus polos se ubican en $p_1 = 0$ (multiplicidad 2) y $p_{2,3} = -1 \pm j$. Por lo tanto, a partir del Lema A.12, sabemos que:

$$H(s) = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{s+1-j} + \frac{K_3}{s+1+j} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_4s + K_5}{s^2 + 2s + 2} \quad (\text{A.122})$$

donde, para evitar calcular los coeficientes complejos K_2 y $K_3 = K_2^*$, hemos agrupado las dos últimas fracciones parciales en una sola.

De todos los coeficientes, el más fácil de obtener es:

$$K_{12} = [H(s)s^2]_{s=0} = \left[\frac{2s^3 + 2s + 2}{s^2 + 2s + 2} \right]_{s=0} = 1 \quad (\text{A.123})$$

mientras que el cálculo de los restantes coeficientes, usando (A.88), es un tanto engoroso. Por esto, podemos igualar la función original con la que resulta en la suma a la derecha de la Ecuación (A.122):

$$\begin{aligned} \frac{2s^3 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} &= \frac{K_{11}}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{K_4s + K_5}{s^2 + 2s + 2} \\ &= \frac{(K_{11} + K_4)s^3 + (1 + 2K_{11} + K_5)s^2 + (2 + 2K_1)s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

donde, igualando los coeficientes de los numeradores a ambos lados, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$K_{11} + K_4 = 2 \quad (\text{A.125})$$

$$1 + 2K_{11} + K_5 = 0 \quad (\text{A.126})$$

$$2 + 2K_1 = 2 \quad (\text{A.127})$$

A partir de este sistema de ecuaciones, se obtiene $K_{11} = 0$, $K_4 = 2$ y $K_5 = -1$, y así se llega a la expansión en fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{2s - 1}{s^2 + 2s + 2} \quad (\text{A.128})$$

cuya transformada de Laplace inversa es:

$$\begin{aligned}h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s-1}{s^2+2s+2} \right\} \\ &= t\mu(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{-3}{(s+1)^2+1} \right\} \\ &= (t + 2e^{-t} \cos(t) - 3e^{-t} \operatorname{sen}(t)) \mu(t) \quad (\text{A.129})\end{aligned}$$

□□□

Finalmente, hemos incluido la Tabla A.3 en la página siguiente, que contiene las transformadas de Laplace más comunes y sus respectivas inversas. Invitamos al lector, como ejercicio, a verificar la validez de las expresiones que allí aparecen.

$Y(s)$	$y(t) ; t \geq 0$
1	$\delta(t)$
$e^{-\tau s} \quad (\tau > 0)$	$\delta(t - \tau)$
$\frac{1}{s}$	1 ($= \mu(t)$)
$\frac{1}{s^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{k}{s + \lambda}$	$ke^{-\lambda t}$
$\frac{e^{-\tau s}}{s + \lambda} \quad (\tau > 0)$	$e^{-\lambda(t-\tau)}\mu(t-\tau)$
$\frac{a_1 s + a_0}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}$	$C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$
	en que $C_1 = \frac{\lambda_1 a_1 - a_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ y $C_2 = \frac{-\lambda_2 a_1 + a_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$
$\frac{a_1 s + a_0}{(s + \lambda)^2}$	$a_1 e^{-\lambda t} + (a_0 - \lambda a_1) t e^{-\lambda t}$
$\frac{a_1 s + a_0}{(s + \lambda)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-\lambda t} [C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)]$
	en que $C_1 = a_1$ y $C_2 = \frac{a_0 - a_1 \lambda}{\omega_0}$
$\frac{k}{s(s + \lambda)}$	$\frac{k}{a} (1 - e^{-\lambda t})$
$\frac{a_1 s + a_0}{s((s + \lambda)^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{a_0}{\lambda^2 + \omega_0^2} [1 - e^{-\lambda t} (C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t))]$
	en que $C_1 = a_0$ y $C_2 = \frac{a_0 \lambda - a_1 (\lambda^2 + \omega_0^2)}{\omega_0}$

Tabla A.3: Transformadas de Laplace inversas útiles.

Apéndice **B**

Funciones de redes y equivalencia de parámetros

B.1. Introducción

En este apéndice resumimos resultados importantes respecto de dos temas asociado a las redes de dos puertas (o cuadripolos). Esos temas son: funciones de redes y equivalencia de parámetros.

Una de las ventajas que existen al describir una red de dos puertas en base a cuatro parámetros, es que se pueden calcular fácilmente ciertas funciones de redes. Estas funciones de redes describen determinadas características claves, cuando el cuadripolo forma parte de un sistema para procesar señales. En general, podemos suponer que el cuadripolo está caracterizado por alguno de los conjuntos de parámetros (impedancia de circuito abierto, admitancia de cortocircuito, híbridos H, híbridos G y parámetros de cadena). Cuando esta red de dos puertas está alimentada por su puerta 1, el subsistema de alimentación puede ser descrito por su equivalente Thevenin ($V_f(s)$, $Z_f(s)$); a su vez, nuestro cuadripolo puede estar alimentando una carga, la que es descrita por la impedancia $Z_c(s)$.

En un segundo tema, resulta conveniente calcular las fórmulas que permiten transitar de una caracterización equivalente a otra, en particular cuando necesitamos caracterizar un cuadripolo que resulta de interconectar varios cuadripolos más sencillos.

B.2. Funciones de redes. Definición.

Se definen a continuación las funciones de redes de uso más frecuente. Estas definiciones están referidas a la red que se muestra en la figura a continuación.

Note que la ganancia de corriente tiene un signo menos.

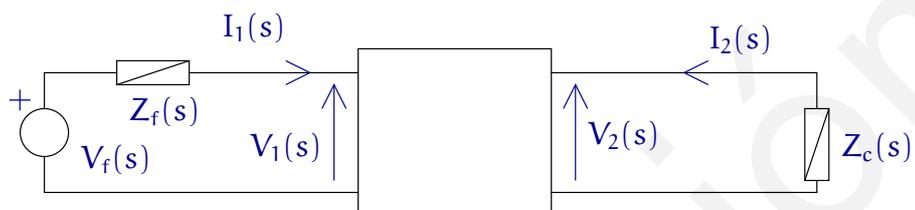


Figura B.1: Cuadripolo cargado y alimentado

Función de red	Definición	Denominación
$Z_e(s)$	$\frac{V_1(s)}{I_1(s)}$	Impedancia de entrada
$Z_s(s)$	$\frac{V_2(s)}{I_2(s)}$ con $V_f(s) = 0$	Impedancia de salida
$H_v(s)$	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$	Transferencia o ganancia de tensión
$H_i(s)$	$-\frac{I_2(s)}{I_1(s)}$	Transferencia o ganancia de corriente

Tabla B.1: Definición de las funciones de redes en cuadripolos

	Z_{ca}	Y_{cc}	G	H	T
$Z_e(s)$	$\frac{\Delta Z + z_{11} Z_c}{z_{22} + Z_c}$	$\frac{y_{22} + Y_c}{\Delta Y) + y_{11} Y_c}$	$\frac{g_{22} + Z_c}{\Delta G + g_{11} Z_c}$	$\frac{\Delta H + h_{11} Y_c}{h_{22} + Y_c}$	$\frac{AZ_c + B}{CZ_c + D}$
$Z_s(s)$	$\frac{\Delta Z + z_{22} Z_f}{z_{11} + Z_f}$	$\frac{y_{11} + Y_f}{\Delta Y) + y_{22} Y_f}$	$\frac{\Delta G + g_{22} Y_f}{g_{11} + Y_f}$	$\frac{h_{11} + Z_f}{\Delta H + h_{22} Z_f}$	$\frac{DZ_f + B}{CZ_f + A}$
$H_i(s)$	$\frac{z_{21}}{z_{22} + Z_c}$	$\frac{-y_{21} Y_c}{\Delta Y) + y_{11} Y_c}$	$\frac{g_{21}}{\Delta G + g_{11} Z_c}$	$\frac{-h_{21} Y_c}{h_{22} + Y_c}$	$\frac{1}{D + CZ_c}$
$H_v(s)$	$\frac{z_{21} Z_c}{\Delta Z + z_{11} Z_c}$	$\frac{-y_{21}}{y_{22} + Y_c}$	$\frac{g_{21} Z_c}{g_{22} + Z_c}$	$\frac{-h_{21}}{\Delta H + h_{11} Y_c}$	$\frac{Z_c}{B + AZ_c}$

Tabla B.2: Caracterización paramétrica de las funciones de redes

B.3. Equivalencia de parámetros

	Z_{ca}	Y_{cc}	T	H	G
Z_{ca}	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \Delta_T \\ 1 & D \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_H & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \Delta_G \end{bmatrix}$
Y_{cc}	$\frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -\Delta_T \\ -1 & A \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta_H \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_G & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix}$
T	$\frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & \Delta_Z \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{y_{21}} \begin{bmatrix} -y_{22} & -1 \\ -\Delta_Y & -y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} -\Delta_H & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}} \begin{bmatrix} -\Delta_G & g_{22} \\ g_{11} & -1 \end{bmatrix}$
H	$\frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_Z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{21} & \Delta_Y \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & \Delta_T \\ -1 & C \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_G} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$
G	$\frac{1}{z_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -z_{12} \\ z_{21} & \Delta_Z \end{bmatrix}$	$\frac{1}{y_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_Y & y_{12} \\ -y_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{A} \begin{bmatrix} C & -\Delta_T \\ 1 & B \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_H} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$

Tabla B.3: Equivalencia de parámetros de cuadripolos

$$\Delta_Z = \det\{Z_{ca}\}; \quad \Delta_Y = \det\{Y_{cc}\}; \quad \Delta_T = \det\{T\}; \quad \Delta_H = \det\{H\}; \quad \Delta_G = \det\{G\} \quad (\text{B.1})$$

Referencias

- [1] R. Churchill and J. Brown. *Complex Variable and Applications*. McGraw Hill Book Company, 1984.
- [2] G. Doetch. *Guide to the applications of Laplace and Z Transform*. D. van Nostand, second edition, 1971.
- [3] J.W. Kitchen. *Calculus of one variable*. Addison Wesley, 1968.
- [4] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Reading, Mass., 2nd. edition, 1984.
- [5] W.R. LePage. *Complex variables and the Laplace transform for engineers*. McGraw-Hill, 1961.
- [6] M.R. Spiegel. *Teoría y problemas de transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, Panamá, 1991.

En evaluación

Índice alfabético

- acoplamiento magnético, 60
- admitancia, 115
- amplificador operacional, 100
 - estabilidad, 204
 - polaridad, 204
- características de filtros
 - ancho de banda (B_W), 152
 - factor de selectividad (Q), 152
 - frecuencia central (ω_o), 152
- caracterización
 - de admitancia de cortocircuito, 217
 - de impedancia de circuito abierto, 206
 - de parámetros de transmisión T , 239
 - de parámetros híbridos G , 233
 - de parámetros híbridos H , 228
- caracterización de circuito abierto
 - método general de análisis, 212, 223
- carga
 - desequilibrada, 6
 - equilibrada, 4
- carga desequilibrada, 21
- causalidad, 259
- condiciones iniciales, 65, 70, 75
- conexión de filtros activos
 - en cascada, 108
 - en paralelo, 110
- convergencia
 - uniforme, 251
- convolución, 259
- cuadripolos, **205**
- degeneraciones, 56, 59, 67, 72
- determinante, 66, 71
- diagrama fasorial
 - variables trifásicas, 7
- diagrama unilineal, 27
- diagramas
 - Bode, 89, 102, 132
- Dirac
 - delta, 58
- diseño de filtros
 - activos
 - elimina-banda, 155
 - pasa-altos, 148
 - pasa-bajos, 144
 - pasa-banda, 150
 - pasivos
 - elimina-banda, 137
 - pasa-altos, 135
 - pasa-bajos, 131
 - pasa-banda, 142
- equivalencia delta-estrella
 - cargas trifásicas, 31
- equivalente monofásico, 17
- equivalente Pi (Π), 220
- equivalente T, 208
- filtro
 - activo
 - elimina-banda, 120, 155
 - notch, 157

- pasa-altos, 106
- pasa-bajos, 100
- pasa-banda, 113
- pasa-todo, 109
- pasivo
 - elimina-banda, 95
 - notch, 156
 - pasa-altos, 88
 - pasa-bajos, 88, 131
 - pasa-banda, 95
- filtro activo universal (FAU), 158
- filtro pasa-banda
 - implementación alternativa, 181
- filtros
 - butterworth, 161
 - elimina-banda, 182
 - pasa-altos, 172
 - pasa-bajos, 166
 - pasa-banda, 176
 - Chebyshev, 188
 - ripple, 188
 - chebyshev, 161
- filtros activos
 - proceso de diseño general, 193
- filtros Butterworth
 - teoría de, 162
- filtros Butterworth y Chebyshev
 - comparación de polos de, 193
- filtros Chebyshev
 - teoría de, 188
- fracciones parciales, 48, 266
 - polos complejos, 270
 - polos múltiples, 269
 - polos simples, 268
- frecuencia
 - espectro, 95, 113
 - frecuencia normalizada, 166, 171
- función
 - causal, 259
 - de orden exponencial, 250
 - estrictamente propia, 266
 - racional, 266
- función de transferencia, 88
- funciones de redes, 277
- ganancia
 - a frecuencia 0, 131
 - grado relativo, 161, 187
- impedancia, 47, 88
- impedancia de entrada, 277
- impedancia de salida, 277
- L'Hôpital
 - teorema de, 63
- linealidad, 49
- método de mallas, 212
- método de nodos, 223
- magnitud
 - cálculo en [dB], 90
- mallas, 81
- medición de potencia activa trifásica
 - método de los wattímetros, 34
- modos forzados, 50, 66, 71
- modos naturales, 50, 55, 66, 71, 80, 83
- neutro, 13
- neutro flotante, 20
- normalización de frecuencias
 - filtro pasa-bajos, 167
- Norton, 82
- parámetros
 - equivalencias, 280
- polos, 267
- potencia aparente trifásica, 9, 14, 21
- red
 - RC, 131
 - RL, 135
 - RLC serie, 137
- red de dos puertas, 206
 - cargada, 210, 222, 232
- red equivalente
 - caracterización de circuito abierto, 208
 - caracterización de cortocircuito, 220
 - caracterización de parámetros híbridos H, 231
- red RC, 52, 87
- red recíproca, 220, 230, 238, 239, 243, 245

- red RL, 91
- red RLC, 47
- red RLC paralelo, 92
- red RLC serie, 98
- redes
 - activas, 100
 - degeneradas, 56, 59
 - pasivas, 87
- redes degeneradas, 56
- representación canónica
 - filtro
 - elimina-banda, 139
 - pasa-altos, 136
 - pasa-bajos, 132
 - pasa-banda, 142
- resonancia, 99
- respuesta en frecuencia, 87
 - análisis cualitativo, 88, 131

- secuencia negativa, 4, 23
- secuencia positiva, 4, 9
- sistema trifásico
 - desequilibrado
 - estrella, 20
 - equilibrado
 - delta, 3
 - estrella, 9, 14

- tensión entre líneas V_ℓ , 9
- tensión entre neutros V_{nN} , 23
- tensión por fase en la carga V_{fn} , 9
- teorema
 - valor final, 262
 - valor inicial, 261
- Thevenin, 82
- transferencia de corriente, 277
- transferencia de tensión, 277
- transformada de Laplace, 249
 - convergencia uniforme, 251
 - definición, 249
 - inversa, 249
 - tabla, 275
 - propiedades, 252, 264
 - región de convergencia, 250
 - tabla, 264
- transformada fasorial, 86
 - inversa, 86
- transformador ideal, 74, 83
- transformador trifásico, 27

- valor
 - final, 262
 - inicial, 261
- valor final
 - teorema, 50, 63
- valor inicial
 - teorema, 49